PLISKA
STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

УСИЛЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ РАДЕМАХЕРА О ГРАФАХ

НИКОЛАЙ Г. ХАДЖИИВАНОВ

Памяти К. Дочева посвящается

Туран [1] доказал, что всякий граф с n вершинами и числом ребер $>n^2/4$ содержит треугольник. В тех же самых предположениях Радемахером было доказано (неопубликовано), что число треугольников не меньше $[n/2]$. В [2] доказано, что в этих предположениях через любую вершину максимальной степени проходит треугольник. В этой работе доказано, что снова в этих предположениях число треугольников, проходящих через вершины максимальной степени, не меньше $[n/2]$.

Пусть V — конечное множество точек, а E — совокупность некоторых неупорядоченных пар различных элементов множества V. Графом $G=(V, E)$ называют упорядоченную пару (V, E); элементы множества V называются вершинами графа, а элементы множества E — ребрами графа. Если $e\in E$, тогда вершины v_1 и v_2 ребра e называют концами ребра и говорят, что e соединяет вершины v_1 и v_2 или что проходит через эти вершины: пишут $e=[v_1, v_2]$ и иногда говорят, что v_1 и v_2 — смежные вершины. Треугольником будем называть неупорядоченное множество трех различных вершин v_1, v_2 и v_3, если они попарно смежны; обозначаем его $[v_1, v_2, v_3]$ и говорим, что проходит через вершины v_1, v_2 и v_3 и что имеет стороны $[v_1, v_2]$, $[v_2, v_3]$ и $[v_3, v_1]$.

Для любого множества S вершин графа G степенью $d(S; G)$ множества S относительно графа G называем число ребер, проходящих через вершины множества S. В частности, $d(V; G)=e(G)$, где $e(G)$ — число ребер графа G. Очевидно

$$\Sigma\{d(v;\ G)\,|\,v\in V\}=2e(G).$$

Для любого подмножества S вершин графа G порожденным подграфом $\langle S\rangle$ называется граф, множество вершин которого является S и две вершины из S смежны в $\langle S\rangle$ тогда и только тогда, когда они смежны в G.

В 1940 г. Туран доказал, [1], что для любого n всякий граф G с n вершинами и $e(G)>n^2/4$ содержит треугольник. В 1975 г. автором и Неновым [2] было доказано, что в этих же предположениях через любую вершину максимальной степени графа G проходит треугольник. В 1941 г. Радемахер доказал (неопубликовано), что в этих же самих предположениях граф G содержит не менее $[n/2]$ треугольников, где $[x]$ — целая часть числа x.

ПЛИСКА Български математически студии. Том 2, 1981, с. 99—102.

Целью настоящей статьи является доказательство следующего усиления теоремы Редемахера:

Теорема. *Для любого n всякий граф G с n вершинами и $e(G)>n^2/4$ содержит не менее $[n/2]$ треугольников, любой из которых имеет вершину максимальной степени.*

Сначала докажем два вспомогательные предложения.

Лемма 1 (Н. Хаджииванов и Н. Ненов [2]). *Пусть G — граф с n вершинами и $e(G)>n^2/4$. Тогда через любую вершину максимальной степени проходит некоторый треугольник.*

Для полноты приведем здесь доказательство этой леммы, принадлежащее обоим ее авторам.

Допустим, что v_1 — вершина максимальной степени $d(v_1; G)=d$ графа G, которая не является вершиной никакого треугольника этого графа. Пусть $v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}$ — все те вершины графа G, которые не смежны вершине v_1. Любое ребро графа G проходит хотя бы через одну из вершин v_1, $v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}$. Действительно, если это не так, тогда существует ребро $[v', v'']$, где v' и v'' смежны вершине v_1. Это невозможно, потому что $[v_1, v', v'']$ есть треугольник через вершину v_1, а таких по предположению не существует.

Из доказанного следует

$$e(G)\leqq d(v_1;\ G)+d(v_2;\ G)+\cdots+d(v_{n-d};\ G).$$

Так как вершина v_1 имеет максимальную степень, то $d(v_i;\ G)\leqq d$ и, следовательно,

$$e(G)\leqq d(n-d)\leqq n^2/4.$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Пусть S — некоторое множество вершин графа G. Введем следующие обозначения: k — число тех вершин v графа $\langle S\rangle$, для которых $d(v;\ \langle S\rangle)\geqq 2$; l — число изолированных ребер графа $\langle S\rangle$, т. е. таких ребер, оба конца которых имеют степень 1 в графе $\langle S\rangle$.

Лемма 2. $d(S;\ G)\leqq \Sigma\{d(v;\ G)\mid v\in S\}-k-l.$

Доказательство. Из равенства $\Sigma\{d(v;\ \langle S\rangle)\mid v\in S\}=2e(\langle S\rangle)$ непосредственно следует $k+l\leqq e(\langle S\rangle)$. Тогда

$$e(\langle S\rangle)\leqq \Sigma\{d(v;\ \langle S\rangle)\mid v\in S\}-k-l.$$

Пусть p — число ребер графа G, любое из которых проходит через некоторую вершину множества S, но не является ребром графа $\langle S\rangle$. Имеем

$$p+e(\langle S\rangle)=d(S;G),\ \ p+\Sigma\{d(v;\langle S\rangle)\mid v\in S\}=\Sigma\{d(v;G)\mid v\in S\}.$$

Этим искомое неравенство доказано.

Теперь уже можно перейти к доказательству теоремы. Пусть v_1 — вершина максимальной степени $d(v_1; G)=d$ графа G, а $v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}$ — все те вершины графа G, которые не смежны вершине v_1. Предположим, что

$d(v_2; G)=d(v_3; G)=\cdots=d(v_q; G)=d$, а $d(v_i; G)\leqq d-1$ при $q<i\leqq n-d$.

Любое ребро графа G имеет точно один из следующих трех типов:

1) e проходит через v_1;

2) e проходит через некоторую из вершин $v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}$;

3) e соединяет вершины, смежные вершине v_1.

Число ребер первого типа равно d.

Любое ребро второго типа проходит или через некоторую из вершин $v_2, v_3, \ldots, v_q$, или через некоторую из вершин $v_{q+1}, v_{q+2}, \ldots, v_{n-d}$. Применяя лемму 2 к множестве $S=\{v_2, v_3, \ldots, v_q\}$, заключаем, что

$$d(S;G)\leqq\sum_{i=2}^{q}d(v_i;G)-k-l=(q-1)d-k-l.$$

Отметим, что если множество S пусто, тогда это неравенство выполнено по тривиальным соображениям: числа $d(S;G)$, k и l равны 0, а $q=1$.

С другой стороны, $d(\{v_{q+1}, v_{q+2}, \ldots, v_{n-d}\};G)\leqq(n-d-q)(d-1)$. Таким образом, число ребер второго типа не больше чем $(q-1)d-k-l+(n-d-q)(d-1)$.

Найдем оценку сверху и для числа ребер третьего типа. Через m обозначим число тех вершин v графа $\langle S\rangle$, для которых $d(v;\langle S\rangle)\leqq 1$ и v не является вершиной изолированного ребра графа $\langle S\rangle$. Через любую из этих вершин, согласно лемме 1, проходит хотя бы один треугольник графа G. Все эти треугольники различны и никакой из них не проходит через вершину v_1. Это следует из того, что рассматриваемые вершины попарно несмежны и никакая из них не смежна вершине v_1. Аналогично, для любого изолированного ребра графа $\langle S\rangle$ найдем треугольник графа G, проходящий через хотя бы один из концов этого ребра. Эти треугольники тоже не будут проходить через вершину v_1 и будут различны между собой. Они отличны и от всех треугольников вышерассмотренного типа, так как конец изолированного в $\langle S\rangle$ ребра может быть смежным в $\langle S\rangle$ только другому концу этого же самого ребра. Число этих треугольников равно l, так как таково число изолированных в $\langle S\rangle$ ребер.

Окончательно нам удалось найти $m+l$ различных треугольников графа G, проходящих через некоторые вершины максимальной степени, но н содержащих вершину v_1.

Обозначим через t число всех треугольников графа G, любой из которых имеет вершину максимальной степени в G. Согласно только что доказанному, через вершину v_1 проходят не более чем $t-m-l$ треугольников. Так как число ребер третьего типа очевидно равно числу треугольников, проходящих через v_1, то оно не больше чем $t-m-l$.

Нами получены оценки сверху для чисел ребер первого, второго и третьего типа. Следовательно, можем написать

$$e(G)\leqq d+(q-1)d-k-l+(n-d-q)(d-1)+t-m-l.$$

Заметим, что $m+k+2l=q-1$.

Действительно:

1) $m+2l$ — это число всех вершин v графа $\langle S\rangle$, для которых $d(v;\langle S\rangle)\leqq 1$

2) k — число всех вершин v графа $\langle S\rangle$, для которых $d(v;\langle S\rangle)\geqq 2$;

3) $q-1$ — число всех вершин графа $\langle S\rangle$.

Из доказанного равенства следует

$$d+(q-1)d-k-l+(n-d-q)(d-1)+t-m-l=(n-d)(d-1)+t+1.$$

Итак, доказано, что $e(G)\leqq(n-d)(d-1)+t+1$.

Из этого неравенства утверждение теоремы следует элементарно. Действительно, пусть $e(G)>n^2/4$. Тогда

$$t\geqq[n^2/4]-(n-d)(d-1).$$

Легко проверить, что

$(n-d)(d-1)\leqq n(n/2-1)/2$ при четном n; $(n-d)(d-1)\leqq((n-1)/2)^2$ при нечетном n.

Следовательно,

$n^2/4-(n-d)(d-1)\geqq n/2$ при четном n; $n^2/4-(n-d)(d-1)\geqq(n-1)/2$ при нечетном n.

Этим неравенство $t\geqq[n/2]$ доказано, а заодно с ним и теорема, так как t есть число всех треугольников графа G, проходящих через вершины максимальной степени в G.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Turán. On the theory of graphs. *Colloq. Math.*, **3**, 1954, 19—30.
2. Н. Хаджииванов, Н. Ненов. О максимуме числа ребер графа. *Доклады БАН*, **29**, 1976, 1575—1578.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 23. 2. 1977