PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ ПОРЯДКОВ p^n И pq

КЕРОПЕ Б. ЧАКЪРЯН

В работе дается описание конечных разрешимых групп с силовской максимальной подгруппой; предположение о разрешимости, как известно, имет место для всех нечетных простых чисел. Неразрешимые группы с этим свойством включаются в более общую ситуацию, рассмотренную в [1].

Рассматривается и класс конечных групп, содержащих максимальную подгруппу порядка pq, p и q — простые. Доказывается следующая альтернатива: каждая группа этого класса либо простая, либо разрешима. Потом приводится описание разрешимого случая.

Все рассматриваемые здесь группы — конечные. Использованные обозначения являются стандартными, см., например, [2].

Сначала приводим описание разрешимых групп, допускающих максимальную подгруппу примарного порядка.

Теорема 1. *Пусть G — конечная разрешимая группа, P — ее силовская p-подгруппа. P является максимальной подгруппой в G тогда и только тогда, когда* $|G|=p^nq^m$, q — простое и либо $m=1$, либо $m>1$ и в группе $\bar{G}=G/O_p(G)$ силовская q-подгруппа $\bar{Q}$ — минимальный нетривиальный нормальный делитель. Далее, $\bar{Q}$ — элементарная абелева, $Z(\bar{P})$ — циклическая и $|Z(\bar{P})|$ делит $|\bar{Q}|-1$.

Доказательство. Из разрешимости G и максимальности P вытекает $|G:P|=q^m$, q — простое, и $G=PQ$, где Q — силовская q-подгруппа. Если $m=1$, то $|G|=p^nq$ и P очевидно максимальна в G. Пусть теперь $m>1$ и, следовательно, P не является нормальной в G. Группа $\bar{G}=G/O_p(G)$ разрешима и $O_p(\bar{G})=1$, откуда вытекает $O_q(\bar{G})\neq 1$. Ввиду максимальности $\bar{P}=P/O_p(G)$ в $\bar{G}$, $\bar{Q}=O_q(\bar{G})$ является силовской подгруппой $\bar{G}$. Ясно, что $\bar{Q}$ — минимальный нормальный делитель в $\bar{G}$ и, следовательно, $\bar{Q}$ — элементарная абелева. Если, обратно, G — группа указанного в теореме типа, то G очевидно разрешима. Допустим, что $m>1$ и P не является максимальной в G. Тогда должно иметь место включение $\bar{P}\subset\bar{H}\subset\bar{G}$ с некоторой подгруппой $\bar{H}$. Так как $\bar{Q}$ нормальна в $\bar{G}$, $\bar{Q}\cap\bar{H}$ нормальна в $\bar{H}$, а также и в $\bar{Q}$, ибо $\bar{Q}$, в силу своей минимальности, абелева. Тогда $\bar{Q}\cap\bar{H}$ нормальна в $\bar{P}\bar{Q}=\bar{G}$ и, следовательно, $\bar{Q}\cap\bar{H}=1$ или $\bar{Q}$, что приводит к противоречию $\bar{H}=\bar{P}$ или $\bar{H}=\bar{G}$ Таким образом, P максимальна в G.

Далее, $Z(\bar{P})$ нормализует $\bar{Q}$ и $C_{Z(\bar{P})}(\bar{Q})=1$ ввиду $O_p(\bar{G})=1$. Следовательно, можно рассматривать $Z(\bar{P})$ как абелевую группу автоморфизмов $\bar{Q}$. Если

$\bar{x} \in \bar{Q}$, $\bar{x} \neq 1$, то $C_{Z(\bar{P})}(\bar{x})$ нормальна в группе $\langle \bar{P}, \bar{x} \rangle = \bar{G}$ и значит $C_{Z(\bar{P})}(\bar{x}) = 1$. Теперь $Z(\bar{P})$ действует регулярно на $\bar{Q}$, откуда следует [2, Теорема 5.3.14], что $Z(\bar{P})$ — циклическая и $|Z(\bar{P})|$ делит $|\bar{Q}|-1$; заметим, что $\bar{Q} \cong Q$.

В [1] описаны конечные неразрешимые группы G с нильпотентной максимальной подгруппой M (четного порядка) в терминах группы $G/O_2(G)$. В частности, если G простая группа, то M должна быть силовской 2-подгруппой и рассматриваемый класс исчерпывается группами $PSL(2, p)$, p — простое вида $2^n \pm 1 > 7$.

Переходим теперь к группам с максимальной подгруппой порядка pq. Прежде всего дадим элементарное доказательство следующего известного факта [3], который будет нам нужен.

Лемма 1. *Пусть G конечная группа с абелевой максимальной подгруппой A. Тогда G разрешима.*

Доказательство. Рассуждая индукцией по порядку G, допустим, что A содержит нетривиальный нормальный делитель C группы G. Тогда A/C является абелевой максимальной подгруппой в G/C и значит G/C разрешима, откуда следует разрешимость G. Пусть теперь A не содержит нетривиальных подгрупп, нормальных в G. Очевидно $N_G(A) = A$. Если $x \in G \setminus A$, то $A \cap A^x$ нормализуется двумя различными максимальными подгруппами A и A^x, откуда $A \cap A^x$ нормальна в G, так что $A \cap A^x = 1$. Теперь по известной теореме Фробениуса [2, Теорема 2.7.5] A обладает нормальным дополнением B в G. Если P силовская подгруппа A, то $N_G(P) = A$ и значит P — силовская подгруппа G. Следовательно, A и B являются холловскими подгруппами G. Пусть Q — q-силовская подгруппа B. Так как B нормальна в G, множества силовских q-подгрупп B и G совпадают. Отсюда $|B : N_B(Q)| = |G : N_G(Q)|$. Для каждого простого делителя p порядка A имеем p не делит $|B|$ и значит p не делит $|G : N_G(Q)|$. Теперь $N_G(Q)$ содержит силовскую p-подгруппу группы A. Отсюда можно заключить, что $A \subset N_G(Q)$ и тогда Q нормальна в G. Ввиду максимальности A имеем $B = Q$. B и $G/B \cong A$ разрешимы и, следовательно, G тоже разрешима.

Лемма 2. *В конечной группе G имеется максимальная подгруппа простого порядка p тогда и только тогда, когда для некоторого простого r либо $|G| = pr$, либо*

(*) $|G| = pr^m$, $m > 1$ — *показатель r по модулю p и силовская p-подгруппа не является нормальной в G.*

Доказательство. Пусть H — максимальная подгруппа порядка p в G. Из леммы 1 следует, что G разрешима и, следовательно, $|G : H| = r^m$, r — простое. Теперь утверждение следует из [4].

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа с максимальной подгруппой H порядка pq, p и q — простые. Тогда G либо простая, либо разрешима.*

Доказательство. Допустим, что G — неразрешимая непростая группа. Из леммы 1 следует, что H неабелева и значит $p \neq q$. Пусть $p > q$ и P — подгруппа порядка p в H. Тогда P нормальна в H. Если P нормальна в G, то H/P является максимальной подгруппой порядка q в G/P и по лемме 1 G/P разрешима, откуда вытекает разрешимость G. Следовательно, P не является нормальной в G. Теперь $N_G(P) = H$ и тогда $C_G(P) = C_H(P) = P$. Кроме того, из максимальности H следует, что P — силовская подгруппа G.

Пусть теперь N—минимальный нетривиальный нормальный делитель G. Если P не лежит в N, то $P \cap N = 1$ и, ввиду $C_G(P) = P$, P действует на N как регулярная группа автоморфизмов простого порядка. Хорошо известный результат Томсона [2, Теорема 10.2.1] утверждает, что N нильпотентна. N не лежит в H и тогда $G = NH$ так, что $G/N = NH/N \cong H/N \cap H = H$ разрешима и отсюда G тоже разрешима. Значит $P \subset N$. P — силовская подгруппа N и $N \neq H$ (ибо P не является нормальной в G). Следовательно, $N_N(P) = C_N(P) = P$ и по известной теореме Бернсайда [2, Теорема 7.4.3] N обладает нормальным p-дополнением A. P опять действует регулярно на A и тогда A нильпотентна, а N — разрешима, откуда G тоже разрешима. Это противоречие доказывает теорему.

Теперь дадим простое описание разрешимых групп из рассматриваемого класса, не уточняя многочисленные варианты достаточности приведенных условий.

Теорема 3. *Если G — конечная разрешимая группа с максимальной подгруппой H порядка pq, p и q — простые, то G — группа одного из следующих типов (r—простое):*

(i) $|G| = pqr$;

(ii) $|G| = pqr^m$, $m > 1$, *и существует нормальная подгруппа C порядка p или q так, что G/C — группа типа* (*) леммы 2;

(iii) $|G| = pqr^m$, $m > 1$, *и существует элементарная абелева нормальная подгруппа R порядка r^m так, что $G/R \cong H$.*

Доказательство. Из разрешимости G снова имеем $|G:H| = r^m$, r—простое.

Если $m = 1$, то G — группа типа (i).

Если $m > 1$, H не является нормальной в G. Если максимальная нормальная подгруппа C группы G, лежащая в H, нетривиальна, то C порядка p или q и H/C максимальна в G/C и простого порядка так, что G—группа типа (ii).

Если, наконец, $C = 1$ и R — минимальный нетривиальный нормальный делитель G, из разрешимости G вытекает, что R элементарная абелева. Тогда $R \cap H$ нормальна в $RH = G$ и, следовательно, $R \cap H = 1$. В силу $G = RH$ и. $R \cap H = 1$ получаем $|R| = r^m$ и $G/R \cong H$. Таким образом, G — группа типа (iii)

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Baumann. Endliche nichtauflösbare Gruppen mit einer nilpotenten maximalen Untergruppe. *J. Algebra*, **38**, 1976, 119—135.
2. D. Gorenstein. Finite groups. New York, 1968.
3. I. N. Herstein. A remark on finite groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9**, 1958, 255—257.
4. К. Чакърян. Крайни групи, в които две силови подгрупи са максимални. *Годишник Соф. унив., Мат. фак.*, **66**, 1971/72, 349—352.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 9. 3. 1977