PLISKA
STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

БАЗИС ТОЖДЕСТВ АЛГЕБРЫ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ НАД ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОЛЕМ

ПЛАМЕН Н. СИДЕРОВ

Найдены базисы тождеств ассоциативной алгебры треугольных матриц над произвольным полем и алгебры Ли, ассоциированной с ней над любым бесконечным полем.

Понятия, которые мы считаем известными, можно найти в [4].

Пусть K — любое поле, а F — свободная ассоциативная алгебра (без единицы) над полем K счетного ранга и со свободными образующими x_1, $x_2, \ldots$. Обозначим через $A(n)$ алгебру верхних треугольных матриц порядка n над полем K, т. е.

$$A(n)=\{\sum_{1\leqq i\leqq j\leqq n} a_{ij}e_{ij};\quad a_{ij}\in K\},$$

где e_{ij} — матричные единицы. Пусть V_n — T-идеал алгебры F, состоящийся из всех полиномов, являющихся тождествами в алгебре $A(n)$. Через $[x_1, x_2]$ обозначим, как обычно, коммутатор элементов x_1 и x_2, т. е. полином $x_1x_2 - x_2x_1$. Индуктивно определяем

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k]=[[x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}], x_k].$$

Ю. Н. Мальцев [1] доказал, что в случае, когда характеристика поля K равна нулю, тождество

$$(1)\qquad [x_1, x_2][x_3, x_4]\ldots[x_{2n-1}, x_{2n}]=0$$

является базисом тождеств алгебры $A(n)$. Иными словами, он доказал равенство

$$V_n=(F')^n,$$

где F' — коммутант алгебры F, т. е. идеал в F, порожденный всеми коммутаторами. В Днестровской тетради (проблема № 109) он поставил задачу найти базис тождеств алгебры $A(n)$, когда K — поле любой характеристики. Из теоремы 12 работы [5] можно получить решение этой задачи, если K — бесконечное поле. Полностью она решается следующей теоремой, которая является основным результатом настоящей работы:

Теорема 1. *Если K — любое поле, то для любого натурального n в алгебре F выполняется равенство*

$$V_n=V_1^n.$$

ПЛИСКА Български математически студии. Том 2, 1981, с. 143—152.

В процессе доказательства этой теоремы мы указываем конкретное конечное множество, которое порождает T-идеал V_n. В частности, получается, что тождество (1) является базисом тождеств алгебры $A(n)$ в случае бесконечного поля.

В первом параграфе этой работы рассматривается случай, когда K — любое бесконечное поле, а во втором — когда K — любое конечное поле.

Посредством применения метода доказательства теоремы 1 в третьем параграфе находится базис тождеств алгебры Ли $L(n)=A(n)_L$, ассоциированной с ассоциативной алгеброй $A(n)$, когда K — любое бесконечное поле. Пусть L — свободная алгебра Ли над полем K счетного ранга и со свободными образующими $y_1, y_2, \ldots$ Пусть U_n — вербальный идеал алгебры L, состоящийся из всех полиномов, являющихся тождествами в алгебре $L(n)$. Основным результатом третьего параграфа является следующее утверждение:

Теорема 2. *Если K — любое бесконечное поле, то для любого натурального n в алгебре L выполняется равенство*

$$U_n=(L^2)^n.$$

1. Доказательство теоремы 1 в случае, когда K — бесконечное поле.

В этом параграфе K будет любым бесконечным полем.

Лемма 1.1. *Если f — ненулевой полином и буквы, участвующие в каждом мономе полинома f встречаются в этом мономе в неуменьшающем порядке индексов, то полином f не является тождеством в поле K (рассматриваемое как алгебра над собой).*

Доказательство. Пусть $f=f(x_1, \ldots, x_s)$ — полином с вышеупомянутым свойством и пусть он существенно зависит от букв $x_1, x_2, \ldots, x_s$, т. е. каждая буква участвует в ненулевой степени в каждом мономе полинома f (легко увидеть, что это не является ограничением общности). Проведем индукцию по числу s. Пусть $s=1$. Число корней уравнения $f(x_1)=0$ конечно и, следовательно, f не является тождеством в поле K. Пусть $s>1$. Ясно тогда, что мы можем представить полином f в виде

$$f(x_1, \ldots, x_s)=w_1(x_1, \ldots, x_{s-1})g_1(x_s)+\cdots+w_m(x_1, \ldots, x_{s-1})g_m(x_s),$$

где $w_i(x_1, \ldots, x_{s-1})$ — различные мономы, записанные на буквы $x_1, \ldots, x_{s-1}$, а $g_i(x_s)$ — ненулевые полиномы буквы x_s. Допустим, что полином f является тождеством в поле K. Пусть λ — любой элемент поля K. Тогда полином $f(x_1, \ldots, x_{s-1}, \lambda)$ удовлетворяет условиям леммы, к нему применимо индукционное предположение и, следовательно, $g_i(\lambda)=0$ $(1\leq i\leq m)$. Так, мы получаем, что полиномы $g_i(x_s)$ являются тождествами в поле K. Полученное противоречие доказывает лемму.

Из леммы 1.1 получается

Следствие 1.2. *Не существует ненулевой полином от коммутирующих переменных с коэффициентами из поля K, который бы являлся тождеством в поле K.*

Предложение 1.3. *В алгебре F выполняется равенство $V_1=F'$, т. е. только полиномы из коммутанта F' являются тождествами в поле K.*

Действительно, включение $F'\subseteq V_1$ очевидно, а обратное включение легко получается использованием тождества

$$x_1x_2=x_2x_1+[x_1, x_2] \tag{2}$$

и леммы 1.1.

Замечание. В случае бесконечного поля предложения 1.3 можно доказать легче, но мы использовали эту схему доказательства, потому что она приложима для любого поля K.

Назовем коммутатор $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}]$ специальным, если x_{i_j} — свободные образующие алгебры F.

Для удобства обозначений положим

$$[x_1, x_2^k] = [x_1, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{k}].$$

Определение 1.4. *Любой коммутатор и вида*

$$u = [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_1}^{k_1-1}, x_{i_2}^{k_2-1}, x_{i_3}^{k_3}, \ldots, x_{i_s}^{k_s}], \quad k_i \geqq 1 \quad (1 \leqq i \leqq s), \tag{3}$$

назовем правильным специальным коммутатором, если x_{i_j} — свободные образующие алгебры F и выполняются неравенства $i_1 < i_j$ $(2 \leqq j \leqq s)$, $i_3 < i_4 < \cdots < i_s$.

Если f_i, $i \in I$ — любое множество полиномов, обозначим через $\{f_i;\, i \in I\}_V$ — T-идеал алгебры F, порожденный (как T-идеал) множеством f_i, $i \in I$.

Известно, а и легко доказывается равенство

$$(F')^n = \{[x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}]\}_V.$$

Используя полилинейность полинома $[x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}]$, тождество (2) и тождества

$$[x_1, x_2x_3] = x_2[x_1, x_3] + [x_1, x_2]x_3, \quad [x_1x_2, x_3] = x_1[x_2, x_3] + [x_1, x_3]x_2, \tag{4}$$

мы получаем

Лемма 1.5. *Для любого натурального n любой элемент из $(F')^{n-1}$ является линейной комбинацией полиномов вида*

$$v_1v_2 \ldots v_{n-1}x_{m_1}x_{m_2} \ldots x_{m_s}, \tag{5}$$

где v_i — специальные коммутаторы $(1 \leqq i \leqq n-1)$.

Применяя тождество Якоби, мы получаем

Лемма 1.6. *Любой элемент из $(F')^{n-1}$ по модулю $(F')^n$ является линейной комбинацией полиномов вида*

$$u_1u_2 \ldots u_{n-1}x_1^{m_1}x_2^{m_2} \ldots x_t^{m_t}, \tag{6}$$

где $m_j \geqq 0$ $(1 \leqq j \leqq t)$, а u_i — правильные специальные коммутаторы $(1 \leqq i \leqq n-1)$.

Предложение 1.7. *Пусть полином f является линейной комбинацией с ненулевыми коэффициентами различных полиномов вида* (6). *Тогда он не является тождеством в алгебре $A(n)$.*

Доказательство этого предложения проведем позже.

Из леммы 1.6 и прделожения 1.7 следует

Теорема 1.8. *Если ε — естественный эпиморфизм алгебры $(F')^{n-1}$ на фактор-алгебру $(F')^{n-1}/(F')^n$, то образы полиномов вида* (6) *образуют базис линейного пространства $(F')^{n-1}/(F')^n$.*

Доказательство теоремы 1. Докажем равенство $V_n = (F')^n$, откуда по предложению 1.3 следует $V_n = V_1^n$. Проведем индукцию по числу n. Основание индукции следует из предложения 1.3. Пусть мы уже доказали равенство $V_{n-1}=(F')^{n-1}$. Докажем $V_n=(F')^n$. Включение $(F')^n\subseteq V_n$ очевидно. Допустим, что существует полином $f\in V_n\setminus(F')^n$. Так как $V_n\subset V_{n-1}=(F')^{n-1}$, то по лемме 1.6 полином f по модулю $(F')^n$ является ненулевой линейной комбинацией полиномов вида (6). По предложению 1.7 полином f не является тождеством в алгебре $A(n)$, т. е. $f\notin V_n$. Полученное противоречие доказывает и обратное включение $V_n\subseteq(F')^n$. Теорема 1 доказана.

Для доказательства предложения 1.7 нам нужно ввести линейный порядок в множестве всех полиномов вида (6).

Пусть сначала u — правильный специальный коммутатор вида (3), а v — правильный специальный коммутатор вида

(7) $$v=[x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_1}^{l_1-1}, x_{j_2}^{l_2-1}, x_{j_3}^{l_3}, \ldots, x_{j_p}^{l_p}].$$

Определение 1.9. *Говорим, что $u>v$, если выполняется одно из следующих трех условий:*

(а) $s>p$,

(б) $s=p$, *но* $(i_1, i_2, \ldots, i_s)>(j_1, j_2, \ldots, j_s)$ *лексикографически, т. е.* $i_1>j_1$ *или* $i_1=j_1$, *но* $i_2>j_2$ *и т. д.,*

(в) $s=p$ *и* $(i_1, i_2, \ldots, i_s)=(j_1, j_2, \ldots, j_s)$, *но* $(k_1, k_2, \ldots, k_s)>(l_1, l_2, \ldots, l_s)$ *лексикографически.*

Легко проверить, что так получается линейный порядок в множестве всех правильных специальных коммутаторов.

Если a — полином вида (6), то назовем $u_1u_2\ldots u_{n-1}$ началом полинома a, а $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_t^{m_t}$ — его концом. Пусть $b=v_1v_2\ldots v_{n-1}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}$ — полином того же вида. Говорим, что начало полинома a больше начала b, если это выполняется лексикографически, т. е. существует $i\,(1\leq i\leq n-1)$ такое, что для каждого $j<i$ мы имеем $u_j=v_j$, но $u_i>v_i$. Говорим, что конец полинома a больше конца полинома b, если это выполняется лексикографически.

Определение 1.10. *Пусть a и b — полиномы вида* (6). *Говорим, что $a>b$, если выполняется одно из следующих условий:*

(а) *начало полинома a больше начала полинома b,*

(б) *начало полинома a совпадает с началом полинома b, но его конец больше конца полинома b.*

Так, мы получаем линейный порядок в множестве всех полиномов вида (6). Теперь мы можем приступить к доказательству предложения 1.7.

Доказательство предложения 1.7. Пусть

(8) $$f=\varepsilon_1a_1+\varepsilon_2a_2+\cdots+\varepsilon_ma_m,$$

где a_i — различные полиномы вида (6) и $0\neq\varepsilon_i\in K$ $(1\leq i\leq m)$. Мы можем считать, что выполняются следующие неравенства: $a_1>a_2>\cdots>a_m$.

Допустим, что полином f является тождеством в алгебре $A(n)$.

Рассмотрим любой гомоморфизм $\eta: F\to A(n)$ и пусть

$$x_k\eta=\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\alpha(k)_{ij}e_{ij},\ \alpha(k)_{ij}\in K.$$

Если w — любой коммутатор, то $w\eta$ является линейной комбинацией матричных единиц e_{ij}, в которой не участвуют элементы вида e_{ii}. Это так, потому что коммутант алгебры $A(n)$ совпадает с подалгеброй всех строго треугольных матриц.

Рассмотрим любой полином $a=u_1u_2\ldots u_{n-1}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_t^{m_t}$ вида (6). Допустим, что $a\eta\neq 0$. Тогда элемент $u_1\eta$ является линейной комбинацией матричных единиц, в которой коэффициент перед e_{12} отличен от нуля, элемент $u_2\eta$ — линейной комбинацией матричных единиц, в которой коэффициент перед e_{23} отличен от нуля и т. д. (Во всех остальных случаях $a\eta=0$.) Тогда мы имеем $a\eta=\lambda e_{1n}$, где $\lambda\in K$.

Пусть в записи (6) полинома a k-тый коммутатор u_k есть элемент вида (3). Тогда

$$u_k\eta=\sum_{1\leq i\leq j\leq n} c_{ij}^{(k)}e_{ij},$$

где коэффициенты $c_{ij}^{(k)}$ являются полиномами от $\alpha(l)_{ij}$. Легко вычислить, что для коэффициента $c_{k\,k+1}^{(k)}$ перед $e_{k\,k+1}$ выполняется равенство

$$c_{k\,k+1}^{(k)}=\{\alpha(i_1)_{k\,k+1}[-\alpha(i_2)_{kk}+\alpha(i_2)_{k+1\,k+1}]-\alpha(i_2)_{k\,k+1}[-\alpha(i_1)_{kk}+\alpha(i_1)_{k+1\,k+1}]\}$$
$$\times[-\alpha(i_1)_{kk}+\alpha(i_1)_{k+1\,k+1}]^{k_1-1}[-\alpha(i_2)_{kk}+\alpha(i_2)_{k+1\,k+1}]^{k_2-1}[-\alpha(i_3)_{kk}+\alpha(i_3)_{k+1\,k+1}]^{k_3}$$
$$\ldots[-\alpha(i_s)_{kk}+\alpha(i_s)_{k+1\,k+1}]^{k_s}.$$

Поэтому значение $a\eta$ элемента a равно

$$a\eta=c_{12}^{(1)}c_{23}^{(2)}\ldots c_{n-1\,n}^{(n-1)}\alpha(1)_{nn}^{m_1}\alpha(2)_{nn}^{m_2}\ldots\alpha(t)_{nn}^{m_t}e_{1n}.$$

Так, мы получаем, что значение $f\eta$ полинома f — это полином g от букв $\alpha(l)_{ij}$ ($l=1,2,\ldots,1\leq i\leq j\leq n$), умноженный на e_{1n}. Но e_{1n} — базисный элемент. Так как полином f является тождеством в алгебре $A(n)$, то полином g должен являться тождеством в поле K. Применяя следствие 1.2, мы получаем, что g — нулевой полином. Рассмотрим следующий моном полинома g, который появляется из элемента $a_1\eta$ в записи (8) полинома f (будем считать, что a_1 — полином вида (6), а его первый коммутатор u_1 — вида (3)):

$$\alpha(i_2)_{12}\alpha(i_1)_{11}^{k_1}\alpha(i_2)_{11}^{k_2-1}\alpha(i_3)_{11}^{k_3}\ldots\alpha(i_s)_{11}^{k_s}\ldots\alpha(1)_{nn}^{m_1}\alpha(2)_{nn}^{m_2}\ldots\alpha(t)_{nn}^{m_t}. \tag{9}$$

Мы покажем, что в записи полинома g не появляется второй моном, подобный этому. Из этого следует, что коэффициент ε_1 перед a_1 равен нулю. Этим противоречием предложение 1.7 будет доказано.

Очевидно, второго монома, подобного моному (9), нет в записи $a_1\eta$. Рассмотрим теперь другой элемент (например, a_2) в записи (8) полинома f. Пусть

$$a_1=u_1u_2\ldots u_{n-1}x_1^{m_1}x_1^{m_2}\ldots x_t^{m_t},$$

$$a_2=v_1v_2\ldots v_{n-1}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}.$$

Мы имеем $a_1>a_2$ (определение 1.10). Рассмотрим следующие два случая.

Первый случай. Начало элемента a_1 больше начала элемента a_2. Пусть для простоты $u_1=v_1$, но $u_2>v_2$ (определение 1.9) (общий случай рассматривается аналогично). Пусть u_2 — полином вида

$$u_2=[x_{q_1},x_{q_2},x_{q_1}^{t_1-1},x_{q_2}^{t_2-1},x_{q_3}^{t_3},\ldots,x_{q_r}^{t_r}],$$

а v_2 — полином вида (7). Тогда мы имеем

$$u_2\eta=\{\alpha(q_1)_{23}[-\alpha(q_2)_{22}+\alpha(q_2)_{33}]-\alpha(q_2)_{23}[-\alpha(q_1)_{22}+\alpha(q_1)_{33}]\}$$
$$\times[-\alpha(q_1)_{22}+\alpha(q_1)_{33}]^{t_1-1}[-\alpha(q_2)_{22}+\alpha(q_2)_{33}]^{t_2-1}[-\alpha(q_3)_{22}+\alpha(q_3)_{33}]^{t_3}$$
$$\ldots[-\alpha(q_r)_{22}+\alpha(q_r)_{33}]^{t_r},$$
$$v_2\eta=\{\alpha(j_1)_{23}[-\alpha(j_2)_{22}+\alpha(j_2)_{33}]-\alpha(j_2)_{23}[-\alpha(j_1)_{22}+\alpha(j_1)_{33}]\}$$
$$\times[-\alpha(j_1)_{22}+\alpha(j_1)_{33}]^{l_1-1}[-\alpha(j_2)_{22}+\alpha(j_2)_{33}]^{l_2-1}[-\alpha(j_3)_{22}+\alpha(j_3)_{33}]^{l_3}$$
$$\ldots[-\alpha(j_p)_{22}+\alpha(j_p)_{33}]^{l_p}.$$

Пусть выполняется условие (а) определения 1.9, т. е. $r>p$. Тогда существует буква, которая участвует в записи u_2, но не участвует в записи v_2. Пусть сначала эта буква есть x_{q_2}. Тогда буква $\alpha(q_2)_{23}$ участвует в мономе (9), но не участвует в мономах, появлющихся из $a_2\eta$ (буква с нижним индексом $k\,k+1$ может появиться только из k-ого коммутатора). Пусть теперь другая буква (например, x_{q_r}) участвует в записи u_2, но не участвует в записи v_2. Тогда в записи монома (9) участвует переменная $\alpha(q_r)_{22}$. Эта переменная может появиться в записи $a_2\eta$ только из коммутаторов $v_1\eta$ и $v_2\eta$. Она не может появиться из коммутатора $v_2\eta$, потому что x_{q_r} не участвует в записи v_2. Допустим, что она появится из коммутатора $v_1\eta$. Тогда, в каждом мономе, в котором она появляется, буква $\alpha(q_r)_{11}$ будет участвовать в меньшей степени, чем в мономе (9) (это ясно из вида $v_1\eta$). Этим рассмотрен случай (а) определения 1.9.

Случаи (б) и (в) рассматриваются аналогично.

Второй случай. Начало полинома a_1 совпадает с началом полинома a_2, но его конец больше конца полинома a_2. В этом случае любой моном полинома g, появляющийся из $a_2\eta$, отличен от любого монома, появляющийся из $a_1\eta$ (и, в частности, от монома (9)).

Этим предложение 1.7 доказано.

2. Доказательство теоремы 1 в случае, когда K — конечное поле. Пусть K — любое конечное поле и число элементов поля K равно q. Тогда в K выполняется тождество $x_1^q-x_1=0$. Из теоремы Джекобсона [2, теорема 3.1.2] получаем, что из этого тождества следует тождество $[x_1, x_2]=0$, т. е. $F'\subset\{x_1^q-x_1\}_V$.

Доказательство следующей леммы 2.1, следствия 2.2 и предложения 2.3 аналогично доказательству леммы 1.1, следствия 1.2 и предложения 1.3.

Лемма 2.1. *Если f — ненулевой полином и буквы, участвующие в каждом мономе полинома f, встречаются в этом мономе в неуменьшающем порядке индексов, и степень этого полинома относительно каждой буквы меньше числа q, то f не является тождеством в поле K (рассматриваемое как алгебра над собой).*

Следствие 2.2. *Не существует ненулевой полином от коммутирующих переменных с коэффициентами из K, который является тождеством в поле K и степень которого относительно каждой буквы меньше числа q.*

Предложение 2.3. *В алгебре F над полем K, число элементов которого равно q, выполняется равенство $V_1=\{x_1^q-x_1\}_V$.*

Определение 2.4. (а) *Любой коммутатор вида*

$$[(x_{i_1}^q - x_{i_1}), x_{i_2}^{k_2}, \ldots, x_{i_s}^{k_s}], \tag{10}$$

где выполняются неравенства

$$i_2 < i_3 < \cdots < i_s, \tag{11}$$

$$0 \leq k_j < q \quad (2 \leq j \leq s), \tag{12}$$

назовем правильной формой первого типа. Если не выполняются некоторые из неравенств (11) *или для некоторого* j $(2 \leq j \leq s)$ *мы имеем* $k_j \geq q$, *назовем его просто формой первого типа.*

(б) *Любой правильный специальный коммутатор вида* (3) *назовем правильной формой второго типа, если выполняются неравенства* $k_j < q$ $(1 \leq j \leq s)$. *Если некоторые из этих неравенств не выполняются, назовем его просто формой второго типа.*

Замечание. Если в (10) мы имеем $k_2 = k_3 = \cdots = k_s = 0$, то эту форму по определению будем считать равной элементу $x_{i_1}^q - x_{i_1}$.

Лемма 2.5. *В алгебре* F *выполняется тождество*

$$[x_1, x_2^q] - [x_1, x_2] = [x_1, (x_2^q - x_2)].$$

Доказательство. Индукцией легко доказывается равенство

$$[x_1, x_2^q] = x_1 x_2^q - \binom{q}{1} x_2 x_1 x_2^{q-1} + \cdots + (-1)^{q-1} \binom{q}{q-1} x_2^{q-1} x_1 x_2 + (-1)^q x_2^q x_1.$$

Используя, что число q является степенью характеристики поля K, и, следовательно, $\binom{q}{m} = 0$, мы получаем утверждение леммы.

Используя тождества (2) и (4), тождество Якоби и лемму 2.5, получаем следующие аналоги леммы 1.5 и леммы 1.6:

Лемма 2.6. *Для любого натурального* n *любой элемент из* V_1^{n-1} *является линейной комбинацией полиномов вида*

$$v_1 v_2 \ldots v_{n-1} x_{m_1} x_{m_2} \ldots x_{m_s}, \tag{13}$$

где v_i $(1 \leq i \leq n-1)$ — *формы первого или второго типа.*

Лемма 2.7. *Для любого натурального* n *любой элемент из* V_1^{n-1} *по модулю* V_1^n *является линейной комбинацией полиномов вида*

$$u_1 u_2 \ldots u_{n-1} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_t^{m_t}, \tag{14}$$

где $0 \leq m_j < q$ $(1 \leq j \leq t)$, *а* u_i — *правильные формы первого или второго типа* $(1 \leq i \leq n-1)$.

Предложение 2.8. *Пусть полином* f *является линейной комбинацией с ненулевыми коэффициентами различных полиномов вида* (14). *Тогда он не является тождеством в алгебре* $A(n)$.

Доказательство этого предложения проведем позже.

Из леммы 2.7 и предложения 2.8 мы получаем

Теорема 2.9. *Если* ε — *естественный эпиморфизм алгебры* V_1^{n-1} *на фактор-алгебру* V_1^{n-1}/V_1^n, *то образы элементов вида* (14) *образуют базис линейного пространства* V_1^{n-1}/V_1^n.

Доказательство теоремы 1 в случае конечного поля уже можно провести аналогично доказательству этой теоремы в случае бесконечного поля.

Следующее предложение указывает конкретное конечное порождающее множество T-идеала $V_1^n = V_n$.

Предложение 2.10. *Все полиномы вида*

$$g = g_1 g_2 \dots g_n, \tag{15}$$

где любой полином g_i равен некоторому из двух полиномов

1) $x_1^q - x_1$, 2) $[x_1, x_2]$,

записанных на разные буквы, порождают $V_1^n = V_n$ как T-идеал.

Доказательство. Обозначим через W_n — T-идеал, порожденный всеми полиномами вида (15). Включение $W_n \subseteq V_1^n$ очевидно. Используя тождество (2), индукцией по числу i получается, что все полиномы вида $g_1 \dots g_i x_k g_{i+1} \dots g_n$ принадлежат идеалу W_n. Из этого легко следует равенство $W_n = V_1^n$.

Замечание. Нетрудно заметить, что в действительности V_n порождается как T-идеал полиномом $g = (x_1^q - x_1) \dots (x_n^q - x_n)$.

Введем линейный порядок в множестве всех правильных форм (первого и второго типа).

Будем считать, что любая правильная форма первого типа больше любой правильной формы второго типа. Мы уже имеем линейный порядок в множестве правильных форм второго типа (опр. 1.9).

Пусть теперь u — правильная форма первого типа вида (10), а v — правильная форма первого типа и

$$v = [(x_{j_1}^q - x_{j_1}), x_{j_2}^{l_2}, \dots, x_{j_p}^{l_p}].$$

Определение 2.11. *Будем считать $u > v$, если выполняется одно из следующих трех условий:*

(а) $s > p$,

(б) $s = p$, *но* $(i_1, i_2, \dots, i_s) > (j_1, j_2, \dots, j_s)$ *лексикографически,*

(в) $s = p$ *и* $(i_1, i_2, \dots, i_s) = (j_1, j_2, \dots, j_s)$, *но* $(k_2, k_3, \dots, k_s) > (l_2, l_3, \dots, l_s)$ *лексикографически*.

Так, мы получаем линейный порядок в множестве всех правильных форм первого типа.

Тем самым мы получили линейный порядок в множестве всех правильных форм (первого и второго типа).

Пусть a и b — полиномы вида (14). Будем считать, что $a > b$, если выполняются условия определения 1.10.

Доказательство предложения 2.8 аналогично доказательству предложения 1.7 из первого параграфа. Пусть

$$f = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \dots + \varepsilon_m a_m,$$

где a_i — различные полиномы вида (14) и $0 \neq \varepsilon_i \in K$ $(1 \leq i \leq m)$. Мы можем считать, что выполняются неравенства $a_1 > a_2 > \dots > a_m$. Рассмотрим снова любой гомоморфизм $\eta: F \to A(n)$ и пусть

$$x_k \eta = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha(k)_{ij} e_{ij}.$$

Если u — правильная форма первого типа вида (10) и если

$$u\eta = \sum_{1 \leqq i \leqq j \leqq n} a_{ij} e_{ij},$$

то легко вычисляется, что

(16) $$a_{k\,k+1} = \alpha(i_1)_{k\,k+1}[\alpha(i_1)_{kk}^{q-1} + \alpha(i_1)_{kk}^{q-2}\alpha(i_1)_{k+1\,k+1} + \cdots + \alpha(i_1)_{kk}\alpha(i_1)_{k+1\,k+1}^{q-2}$$
$$+ \alpha(i_1)_{k+1\,k+1}^{q-1} - 1][-\alpha(i_2)_{kk} + \alpha(i_2)_{k+1\,k+1}]^{k_2} \cdots [-\alpha(i_s)_{kk} + \alpha(i_s)_{k+1\,k+1}]^{k_s}.$$

Как и в первом параграфе, мы выделим (главный) моном от букв $\alpha(l)_{ij}$, который участвует в записи элемента $a_1\eta$. Пусть

$$a_1 = u_1 u_2 \dots u_{n-1} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_t^{m_t},$$

где u_i — правильные формы (первого или второго типа).

Если $u_k(1 \leqq k \leqq n-1)$ — правильная форма первого типа и коэффициент $a_{k\,k+1}$ перед $e_{k\,k+1}$ в записи $u_k\eta$ вида (16), то часть (главного) монома, появляющаяся из элемента $u_k\eta$, будет

$$\alpha(i_1)_{k\,k+1}\alpha(i_1)_{kk}^{q-1}\alpha(i_2)_{kk}^{k_2} \dots \alpha(i_s)_{kk}^{k_s}.$$

Если u_k — правильная форма второго типа, мы поступаем как в первом параграфе.

Часть (главного) монома, которая появляется из конца элемента $a_1\eta$, будет

$$\alpha(1)_{nn}^{m_1}\alpha(2)_{nn}^{m_2} \dots \alpha(t)_{nn}^{m_t}.$$

Доказательство предложения 2.8 далее заканчивается совершенно аналогично доказательству предложения 1.7.

3. Базис тождеств алгебры Ли, ассоциированной с алгеброй треугольных матриц над бесконечным полем. Если $b_1, b_2, \dots, b_s$ любые элементы алгебры L, то мы положим для удобства $b_1 b_2 \dots b_s = (\dots((b_1 b_2) b_3)\dots) b_s$. Тоже по определению $b_1 b_2^k = b_1 \underbrace{b_2 b_2 \dots b_2}_{k}$.

Любой моном вида $y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_s}$ назовем специальным коммутатором, если y_{i_j} — свободные образующие алгебры $L(1 \leqq j \leqq s)$. Если выполняются неравенства $i_1 < i_j\,(2 \leqq j \leqq s)$ и $i_3 < i_4 < \cdots < i_s$, назовем его правильным специальным коммутатором.

Так как $(L^2)^n = \{(x_1 x_2)(x_3 x_4) \dots (x_{2n-1} x_{2n})\}_V$, то индукцией по числу n и использованием тождества Якоби получается, что любой элемент из $(L^2)^{n-1}$ является линейной комбинацией полиномов вида $v_1 v_2 \dots v_{n-1}$, где v_i — специальные коммутаторы $(1 \leqq i \leqq n-1)$. Применяя тождество Якоби, мы получаем

Лемма 3.1. *Для любого натурального n любой элемент из $(L^2)^{n-1}$ по модулю $(L^2)^n$ является линейной комбинацией полиномов вида*

(17) $$u_1 u_2 \dots u_{n-1},$$

где u_i — правильные специальные коммутаторы $(1 \leqq i \leqq n-1)$.

Доказательство теоремы 2 проводится так же, как и доказательство теоремы 1, использованием следующего утверждения:

Предложение 3.2. *Пусть ненулевой полином $g \in L$ является линейной комбинацией с ненулевыми коэффициентами различных полиномов вида* (17). *Тогда он не является тождеством в алгебре Ли* $L(n)$.

Доказательство. Обозначим через F_L алгебру Ли, ассоциированную со свободной ассоциативной алгеброй F. Отображение

$$y_i \to x_i, \quad i=1, 2, \ldots,$$

продолжается единственным образом до гомоморфизма

$$\eta : L \to F_L.$$

Пусть $f = g\eta \in F$. По теореме 1 работы [3] гомоморфизм η является мономорфизмом и, следовательно, $f \neq 0$. Теперь легко применяется предложение 1.7. Предложение 3.2 доказано.

Автор выражает благодарность Г. К. Генову за постановку проблем и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Мальцев. Базис тождеств алгебры верхних треугольных матриц. *Алгебра и логика*, **10**, 1971, 393—401.
2. И. Н. Херстейн. Некоммутативные кольца. Москва, 1972.
3. А. И. Ширшов. О свободных кольцах Ли. *Мат. сб.*, **45**, 1958, № 2, 113—122.
4. М. Б. Гаврилов, Л. И. Давидов, И. К. Тонов. Няколко бележки върху PI-алгебрите. *Годишник на Соф. унив., Мат. фак.*, **64**, 1969/1970, 277—292.
5. J. Levin. A matrix representation for associative algebras. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **188**, 1974, 293—308.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 29. 6. 1977