PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

УНИВЕРСАЛЬНО ПОГРУЖАЕМЫЕ РАСШИРЕНИЯ ГАЛУА

НИКОЛА П. ЗЯПКОВ

Найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы данное расширение Галуа было универсально погружаемое. Идея исследований универсально погружаемых расширений принадлежит А. В. Яковлеву.

1. Задача погружения полей. Пусть K — конечное нормальное сепарабельное расширение поля k с группой Галуа F и пусть α — эпиморфизм конечной группы G на F. Решить задачу погружения $(K/k, G, \alpha)$ — значит построить поле (или алгебру Галуа) L, содержащее K и нормальное над k, причем такое, что группа Галуа расширения L/k равна G и для любого автоморфизма $g \in G$ поля L его ограничение на K совпадает с $\alpha(g)$.

Необходимым (но не достаточным) условием разрешимости задачи погружения является условие согласности Д. К. Фаддеева — Х. Хассе (см. [1, 2]). В работах [3, 4] найдено необходимое и достаточное условие разрешимости задачи погружения в предположении, что $\operatorname{Ker}\alpha$ — абелева группа и поле K содержит корни из единицы, степени равной периоду $\operatorname{Ker}\alpha$. Напомним это условие. Пусть $A=\operatorname{Ker}\alpha$, $\bar{A}=\operatorname{Hom}(A, K^*)$ (группа $\bar{A}$ превращается в F-операторную группу, если положить для $\chi \in \bar{A}, f \in F$

$$\chi^f(a)=[\chi(a^{f^{-1}})]^f=[\chi(\bar{f} a \bar{f}^{-1})]^f$$

для любого $a \in A$), $Z(\bar{A})$ — групповой модуль группы $\bar{A}$, U — ядро естественного эпиморфизма $Z(\bar{A}) \to \bar{A}$. Пусть для задачи погружения выполнено условие согласности. Тогда для разрешимости задачи погружения $(K/k, G, \alpha)$ необходимо и достаточно еще, чтобы распадался некоторый конструктивно вычисляемый элемент ξ из группы $Ext^1_F(U, K^*)$ (дополнительное условие погружения). Если K — поле алгебраических чисел, то дополнительное условие погружения сводится к распадению некоторого элемента $\bar{\xi}$ из $H^1(F, \bar{A})$, причем заранее известно, что ограничение $\bar{\xi}$ на группу разложения любой точки поля K тривиально.

2. Универсально погружаемые расширения. Расширение Галуа K/k назовем универсально погружаемым периода q, если всякая задача погружения $(K/k, G, \alpha)$, ядро которой — абелева группа периода q, разрешима. Заметим, что в этом определении мы не требуем, чтобы K содержало первообразный корень степени q из 1.

Теорема 1. *Пусть K/k — конечное нормальное сепарабельное расширение с группой Галуа F, $\varphi: S \to F$ — эпиморфизм свободной группы*

ПЛИСКА Български математически студии. Том 2, 1981, с. 153—156.

на F, $R=\operatorname{Ker}\varphi$, $G=S/[R, R]R^q$, α — эпиморфизм G на F, индуцированный гомоморфизмом φ. Расширение K/k универсально погружаемое периода q тогда и только тогда, когда разрешима задача погружения $(K/k, G, \alpha)$.

Доказательство. Ядром гомоморфизма α является группа $R/[R, R]R^q$; это ядро абелево и имеет период q. Поэтому если расширение K/k универсально погружаемое периода q, то задача погружения $(K/k, G, \alpha)$ разрешима. Необходимость условия теоремы доказана.

Докажем теперь достаточность. Пусть $(K/k, H, \beta)$ — какая-то задача погружения с абелевым ядром периода q. Поскольку S — свободная группа, существует такой гомоморфизм $\psi: S\rightarrow H$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& S \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] \\
H \arrow[r, "\beta"'] & F
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Ядро гомоморфизма β коммутативно и имеет период q; поэтому для любых элементов $r_1, r_2, r\in R$ имеют место равенства

$$\psi[r_1, r_2]=[\psi(r_1), \psi(r_2)]=1, \quad \psi(r^q)=[\psi(r)]^q=1$$

(мы воспользовались тем, что элементы $\psi(r_1)$, $\psi(r_2)$, $\psi(r)$ принадлежат $\operatorname{Ker}\beta$, так как $\beta\psi(r_1)=\varphi(r_1)=1$, $\beta\psi(r_2)=1$, $\beta\psi(r)=\varphi(r)=1$). Следовательно, $\operatorname{Ker}\psi \supset[R, R]R^q$, и поэтому гомоморфизм ψ индуцирует гомоморфизм γ группы $S/[R, R]R^q=G$ в группу H. При этом, очевидно, диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] \\
H \arrow[r, "\beta"'] & F
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Обозначим через $G*_F H$ прямое произведение групп G и H с объединенной фактор-группой F, т. е. в прямом произведении $G\times H$ возьмем подгруппу, состоящую из всех таких элементов $g\times h$, что $\alpha(g)=\beta(h)$. Покажем, что $G*_F H$ является полупрямым произведением групп $\operatorname{Ker}\beta=B$ и G. Пусть $\gamma_1: G*_F H\rightarrow G$ такой гомоморфизм группы $G*_F H$ на группу G, который отображает элемент $g\times h$ в g, т. е. $\gamma_1(g\times h)=g$. Ядро гомоморфизма γ_1 состоит из элементов $1\times h$, где $h\in B$, т. е. $\operatorname{Ker}\gamma_1\approx B$. Имеем точную последовательность

$$1\rightarrow B\rightarrow G*_F H\xrightarrow{\gamma_1} G\rightarrow 1.$$

Существует гомоморфизм $\delta\colon G\to G*_F H$, такой, что $\delta(g)=g\times\gamma(g)$. Элемент $g\times\gamma(g)$ принадлежит группе $G*_F H$, поскольку $\beta(\gamma(g))=\alpha(g)$ (вытекает из коммутативности второй диаграммы). Ясно, что $\gamma_1\delta=id$. Следовательно, $G*_F H$ — полупрямое произведение группы B и G.

По предположению, существует решение L задачи погружения $(K/k, G, \alpha)$. Известно, что полупрямая задача погружения с абелевым ядром разрешима. Пусть M решение полупрямой задачи погружения $(L/k, G*_F H, \gamma_1)$. Композиция гомоморфизма γ_1 с α дает эпиморфизм $\alpha_1\colon G*_F H\to F$. Легко проверить, что M решает задачу погружения $(K/k, G*_F H, \alpha_1)$. Тогда подалгебра K_1 алгебры M, принадлежащая подгруппе $\operatorname{Ker}\alpha$ группы $G*_F H$, решает задачу погружения $(K/k, H, \beta)$. Теорема доказана.

3. Универсально погружаемые поля алгебраических чисел. В этом пункте считаем, что K (а значит и k) — поле алгебраических чисел и K содержит первообразный корень из 1 степени q. Ядро гомоморфизма α является группой $A=R/[R, R]R^q$; это ядро — абелева группа и имеет период q. Известно, что A, рассматриваемый как F-модуль, с точностью до слагаемых вида $Z(F)/qZ(F)$, изоморфно модулю $I^2/_qI^2$ (см. [6, 7]). Здесь I — модуль Шевалле, т. е. ядро F-эпиморфизма (единственного) $Z(F)$ на Z; I^2 обозначает $I\otimes_Z I$. Имеем

$$H^1(F, \bar{A})=H^1(F, \operatorname{Hom}_Z(A, K^*))=H^1(F, \operatorname{Hom}_Z(A, Z/qZ)).$$

Но

$$H^1(F, \operatorname{Hom}_Z(Z(F)/qZ(F),\ Z/qZ))=H^1(F, \operatorname{Hom}_Z(Z(F), Z/qZ)).$$

Хорошо известно, что $\operatorname{Hom}_Z(Z(F), Z/qZ)$ — слабо инъективный F-модуль и поэтому

$$H^1(F, \operatorname{Hom}_Z(Z(F),\ Z/qZ))=0.$$

Таким образом

$$H^1(F, \bar{A})=H^1(F, \operatorname{Hom}_Z(I^2/qI^2,\ Z/qZ))=H^1(F, \operatorname{Hom}_Z(I^2, Z/qZ)).$$

Модуль I^2 — проективный, конечно-порожденный Z-модуль. Тогда

$$H^1(F, \operatorname{Hom}_Z(I^2, Z/qZ))\approx H^1(F, \operatorname{Hom}_Z(I^2, \mathrm{Z})\otimes Z/qZ)$$
$$\approx H^1(F, \operatorname{Hom}_Z(I, \operatorname{Hom}_Z(I, Z))\otimes Z/qZ).$$

Известно, что

$$\operatorname{Hom}_Z(I, Z)\approx\Gamma,$$

где Γ совпадает с $Z(F)/Z$.
Поэтому

$$\operatorname{Hom}_Z(I, \operatorname{Hom}_Z(I, Z))\approx\operatorname{Hom}_Z(I, \Gamma)\approx\operatorname{Hom}_Z(I, Z)\otimes\Gamma\approx\Gamma\otimes\Gamma=\Gamma^2.$$

Отсюда следует, что

$$H^1(F, \bar{A})\approx H^1(F, \Gamma^2\otimes Z/qZ).$$

По определению Γ, имеем точную последовательность

$$0\to Z\to Z(F)\to\Gamma\to 0.$$

Умножим эту последовательнось тензорно на Γ:

$$0 \to \Gamma \to Z(F) \otimes \Gamma \to \Gamma^2 \to 0.$$

Последние две последовательности умножим тензорно на Z/qZ:

$$0 \to Z/qZ \to Z(F) \otimes Z/qZ \to \Gamma \otimes Z/qZ \to 0$$

$$0 \to \Gamma \otimes Z/qZ \to Z(F) \otimes \Gamma \otimes Z/qZ \to \Gamma^2 \otimes Z/qZ \to 0.$$

Модули $Z(F) \otimes Z/qZ$ и $Z(F) \otimes \Gamma \otimes Z/qZ$ — гомологически тривиальные F-модули. Таким образом,

$$H^1(F, \bar{A}) \approx H^1(F, \Gamma^2 \otimes Z/qZ) \approx H^2(F, \Gamma \otimes Z/qZ) \approx H^3(F, Z/qZ).$$

Итак, нами доказана

Теорема 2. *Пусть K/k — конечное нормальное сепарабельное расширение полей алгебраических чисел с группой Галуа F, содержащее первообразный корень степени q из 1. Расширение K/k универсально погружаемое периода q тогда и только тогда, когда для задачи погружения $(K/k, G, \alpha)$ выполнено условие согласности и распадается некоторый элемент из $H^3(F, Z/qZ)$, причем, заранее известно, что ограничение этого элемента на группу разложения любой точки поля K тривиально.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев. Исследования по геометрии Галуа. *Мат. сб.*, **15**, 1944, 243—276.
2. H. Hasse. Existenz und Mannigfaltigkeit Abelscher Algebren mit vorgegebener Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers. *Math. Nachr.*, **1**, 1948, 40—61.
3. А. В. Яковлев. Задача погружения полей. *Известия АН СССР. Сер. матем.*, **28**, 1964, 645—660.
4. А. В. Яковлев. Задача погружения для числовых полей. *Известия АН СССР. Сер. матем.*, **31**, 1967, 211—224.
5. З. И. Боревич, Д. К. Фаддеев. Теория гомологии в группах. I. *Вестник Ленингр. ун-та*, **11**, 1956, № 7, 3—39.
6. З. И. Боревич, Д. К. Фаддеев. Теория гомологии в группах. II. О проективных резольвентах конечных групп. *Вестник Ленингр. ун-та*, **14**, 1959, № 7, 72—87.

Высший педагогический институт
9700 Шумен

Поступила 12. 10. 1977