НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, НЕ ИМЕЮЩИХ РЕШЕНИЙ

ПЕТЪР Р. ПОПИВАНОВ

В этой статье доказываются теоремы о локальной неразрешимости линейных дифференциальных операторов с кратными характеристиками. В частности получен результат о неразрешимости негипоэллиптических квазиоднородных дифференциальных уравнений. В работе обобщаются некоторые теоремы В. В. Грушина, Джилиоли и Ф. Трева, Кардозо и Ф. Трева. На основании метода ВКБ приводятся элементарные доказательства некоторых теорем Ф. Трева и др.

1. В последних несколько лет был достигнут существенный прогресс при изучении локальных свойств линейных дифференциальных и псевдодифференциальных операторов с кратными характеристиками. Укажем, прежде всего, на работы Грушина [4; 5], Трева [8], Кардозо и Трева [7], Джилиоли и Трева [12], Б. де Монвеля [10], Шестранда [6], Хермандера [13] и Меникова [14].

Во всех знакомых нам статьях доказательства локальной неразрешимости проводятся по классической схеме Хермандера из [1]. Заметим, что специфика уравнений с кратными характеристиками приводит обычно к большим техническим трудностям. Цель настоящей статьи — предложить такой способ, который позволяет, с одной стороны, найти простые однотипные доказательства основных теорем несуществования из [4, 5, 7, 12], а, с другой стороны, получить и ряд новых результатов. Главные средства, которые мы применяем — это асимптотическая замена переменных и метод ВКБ. Наконец, упомянем, что метод Грушина для доказательства негипоэллиптичности из [4], соответственно модифицированном Мениковым в [14], будет применяться и в нашей ситуации.

2. Рассмотрим теперь следующий дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами (см. [4]):

$$P(x,\ D)=\sum_{|\alpha+\beta|\leqq m,\ \ |\gamma|\leqq m\delta} a_{\alpha\beta\gamma}\, t^{\gamma} D^{\beta}_{x_1} D^{\alpha}_{t},\ a_{\alpha\beta\gamma}=\mathrm{const}, \tag{1}$$

где $\delta>0$, $m\delta$ — натуральное число, $x_1\in\mathbf{R}^1$, $t\in\mathbf{R}^{n-1}$ и $(\xi_1,\eta)\in\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^{n-1}$. Мы будем считать, что символ $P(t,\xi_1,\eta)$ квазиоднородный, т. е. $P(t/\lambda,\ \lambda^{1+\delta}\xi_1,\lambda\eta)=\lambda^m P(t,\xi_1,\eta)$ $\forall\lambda>0$. Кроме того, предположим выполнение условия

(A) Оператор $P(t, D_{x_1}, D_t)$ эллиптический для $t\neq 0$, т. е. $P^0(t,\xi_1,\eta)=\sum_{|\alpha+\beta|=m,\ |\gamma|=\delta|\beta|} a_{\alpha\beta\gamma}\, t^{\gamma}\xi_1^{\beta}\eta^{\alpha}\neq 0$ для всех $t\neq 0$, $\xi_1\in\mathbf{R}^1$, $\eta\in\mathbf{R}^{n-1}$ и $|\xi_1|+|\eta|>0$.

Тогда, как показано в [4], условие (A) влечет за собой, что $\dim(\mathrm{Ker}\, P(t,\xi_1,D_t)\cap S(\mathbf{R}^{n-1}))<\infty$, если $|\xi_1|=1$ и $P(t,\xi_1,D_t)=\sum_{|\alpha+\beta|\leqq m,\ |\gamma|\leqq m\delta} a_{\alpha\beta\gamma}\, t^{\gamma}\xi_1^{\beta} D_t^{\alpha}$.

Основной результат работы [4] можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема (Грушин). *Квазиоднородный дифференциальный оператор* (1) *для которого выполнено условие* (A), *гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда*

$$\dim(\operatorname{Ker} P(t, \xi_1, D_t) \cap S(\mathbf{R}^{n-1})) = 0, \text{ если } |\xi_1| = 1.$$

Наша первая задача выяснить, что происходить, если ядро оператора $P(t, \xi_1, D_t)$, $|\xi_1| = 1$ не пусто.

Теорема 1. *Пусть* $P(t, D_{x_1}, D_t)$ *квазиоднородный дифференциальный оператор, для которого выполнено условие* (A) *и* $\operatorname{Ker} P(t, \xi_1, D_t) \cap S(\mathbf{R}^{n-1}) \neq 0$ *для некоторого* ξ_1, $|\xi_1| = 1$. *Тогда уравнение* $P^*(t, D_{x_1}, D_t)u = f$ *неразрешимо локально в окрестности нуля.*

(Здесь, как обычно, P^* — формально сопряженный оператор к оператору P.)

Следствие. *Пусть квазиоднородные операторы* P, P^* *удовлетворяют условию* (A). *Тогда следующие импликации эквивалентны*:

(i) P, P^* — *гипоэллиптичны*,

(ii) P, P^* — *локально разрешимы*,

(iii) $\dim(\operatorname{Ker} P(t, \xi_1, D_t) \cap S(\mathbf{R}^{n-1})) = 0$ *для всех* ξ_1, $|\xi_1| = 1$,
$\dim(\operatorname{Ker} P^*(t, \xi_1, D_t) \cap S(\mathbf{R}^{n-1})) = 0$ *для всех* ξ_1, $|\xi_1| = 1$.

В следующей теореме мы отталкиваемся от требования на квазиоднородности оператора. Итак, рассмотрим в $\mathbf{R}^2_{x,t}$ линейный оператор $P(t, D_x, D_t)$.

Через ξ мы будем обозначать двойственную переменную к переменной x.

Теорема 2. *Пусть дифференциальный оператор вида* (2) *такой, что в ядре обыкновенного дифференциального оператора* $P(t, \xi, D_t)$ *содержится гладкая функция* $\exp(-a\xi t^{k+1})u(t\xi^{1/(1+l)}, \xi^{-\varepsilon})$, $\xi > 0$, $a > 0$, $l \geq 1$, $0 \leq \varepsilon$, k — *нечетное число и* $l \geq k$. *Здесь* $u(t, \mu) \in C^\infty(\mathbf{R}^1 \times [0, 1])$, $u(0, 0) \neq 0$ *и, кроме того, для любого натурального* $N \geq 0$ *существуют константы* $\delta > 0$, $a > \delta$, C_N, M_N, *для которых*

$$\left| \frac{\partial^{\alpha+\beta} u(t, \mu)}{\partial t^\alpha \partial \mu^\beta} \right| \leq C_N \exp[(a-\delta)t^{k+1}], \tag{3}$$

если $|t| \geq M_N$, $0 \leq \mu \leq 1$, $\alpha + \beta \leq N$. *Тогда оператор* $P^*(t, D_x, D_t)$ *неразрешим в окрестности нуля.*

Как следствие этой теоремы мы получаем нижеприводимое утверждение.

Теорема 3. *Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка*

$$P(t, D_x, D_t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - at^k D_x\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - bt^k D_x\right) + ct^l D_x, \tag{4}$$

где константы a, b, c — *вещественные*, $ab > 0$, *число* k — *нечетное и* $k-1 \leq l < 2k$. *Тогда оператор* P *неразрешим локально в нуле в классе обобщенных функций.*

Способ доказательства теоремы 3 допускает многочисленные следствия.

Следствие 1. *В случае, когда* $k = l - 1$, мы получаем [12, теорема 1(*i*)].

Следствие 2. *Если для оператора* (4) $ab < 0$, *утверждается, что уравнение* $P(t, D_x, D_t)u = f$ *не имеет решений в классе* D' *тогда и только тогда, когда* $c/(a-b)$ — *целое число и* $c/(a-b) \equiv 0$ *или* $1 \bmod (k+1)$. *Этот результат доказан в* [12, *теорема 1* (ii), (iii)].

Следствие 3. *Пусть для оператора* (4) $a=b\neq 0$ *и* $l\geqq k-1$. *При этом условии оператор* P *неразрешим локально в нуле.*

Последний результат принадлежит Кардозо и Треву [7].

3. Теперь приступим к доказательству вышесформулированных результатов. Из-за технических соображений сперва рассмотрим теоремы 2 и 3. Итак, напомним необходимое условие Хермандера для разрешимости линейного дифференциального оператора в окрестности нуля в классе обобщенных функций. Предположим, что уравнение $P(x, D)u=f$ локально разрешимо в нуле. Тогда существуют окрестность $\omega\ni 0$, натуральное число $N\geqq 0$, константа $C(\omega)$, такие, что для любой пары функций $f, v\in C_0^\infty(\omega)$ выполнена оценка

$$|\int fv dx|\leqq C(\omega)\sum_{|\alpha|\leqq N}\sup|D^\alpha f|\sum_{|\alpha|\leqq N}\sup|D^\alpha P^* v|, \tag{5}$$

где P^* — формально сопряженный оператор к оператору P. Мы докажем все наши теоремы, показывая, что для любой окрестности $\omega\ni 0$ и произвольных $N\in\mathbf{Z}_+$ и C неравенство (5) заведомо нарушается при специальном выборе функций f и v.

Итак, мы докажем теорему 2. Для этой цели фиксируем $\omega\ni 0$ и рассмотрим функцию $\varphi\in C_0^\infty(\omega)$, $\varphi\equiv 1$, в некоторой подокрестности $\omega'\subset\omega$, $0\in\omega'$. Вводим функцию $\psi(t)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$, $\psi\geqq 0$, $\operatorname{supp}\psi\subset[1, 2]$, для которой $\int\psi(\varrho)d\varrho=1$. В качестве f выбираем элемент $F\in C_0^\infty(\omega)$,

$$\int F(x, t)dxdt=1, \tag{6}$$

который подложен асимптотической замене переменных: $f_\lambda(x, t)=F(\lambda^2 x, \lambda^2 t)$. Очевидно, $\operatorname{supp} f_\lambda\subset\omega$, если параметр λ достаточно большой. Наконец, положим

$$v_\lambda(x, t)=\varphi(x, t)\int\psi(\lambda\varrho)\exp(ix\varrho\lambda^2-a\varrho\lambda^2 t^{k+1})u(t(\varrho\lambda^2)^{1/(1+l)}, (\varrho\lambda^2)^{-\varepsilon})d\varrho.$$

Заметим, что $P(t, D_x, D_t)[\exp(ix\varrho-\varrho a t^{k+1})u(t\varrho^{1/(1+l)}, \varrho^{-\varepsilon})]=\exp(ix\varrho)P(t, \varrho, D_t)$ $[\exp(-a\varrho t^{k+1})u(t\varrho^{1/(1+l)}, \varrho^{-\varepsilon})]$ и, следовательно,

$$Pv_\lambda=\eta(x, t)Q(w_\lambda),$$

где $w_\lambda=\int\psi(\lambda\varrho)\exp(ix\varrho\lambda^2-at^{k+1}\varrho\lambda^2)u(t(\varrho\lambda^2)^{1/(1+l)}, \varrho^{-\varepsilon})d\varrho$, $Pw_\lambda=0$, $\eta\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, $\eta\equiv 0$ в окрестности нуля вида $|x|+|t|\geqq 2\tilde\eta$, $\tilde\eta>0$, и Q — некоторый линейный дифференциальный оператор.

Мы покажем, что при таком выборе v_λ и f_λ неравенство (5) не имеет место при $\lambda\to+\infty$. Итак,

$$\iint f_\lambda v_\lambda dxdt=\iiint\varphi F(\lambda^2 x, \lambda^2 t)\psi(\lambda\varrho)\exp(ix\varrho\lambda^2-a\varrho\lambda^2 t^{k+1})u(t(\varrho\lambda^2)^{1/(1+l)}, (\varrho\lambda^2)^{-\varepsilon})d\varrho dxdt.$$

После элементарной замены переменных находим, что

$$\iint f_\lambda v_\lambda dxdt=\lambda^{-5}\iiint\psi(\varrho)\varphi(x/\lambda^2, t/\lambda^2)F(x, t)\exp[\varrho(i\frac{x}{\lambda}-\frac{at^{k+1}}{\lambda^{2k+1}})]$$
$$\times u(t\varrho^{1/(1+l)}\lambda^{-(2l+1)/(l+1)}, (\varrho\lambda)^{-\varepsilon})d\varrho dxdt=\lambda^{-5}I_\lambda.$$

Так как $1\leqq\varrho\leqq 2$, то $\lambda\leqq\lambda\varrho\leqq 2\lambda$ и, таким образом, $\lambda\to+\infty$ влечет за собой, что

$$I_\lambda\to u(0, 0)\varphi(0, 0)\int\psi(\varrho)d\varrho\cdot\iint F(x, t)dxdt=u(0, 0)\neq 0.$$

С другой стороны, очевидно, что $\sup\limits_{|\alpha|\leq N} |D^\alpha(F(\lambda^2 x, \lambda^2 t))| \leq C\lambda^{2N}$. Следовательно, мы должны оценить $\sup |D^\alpha P^* v_\lambda|$ для всех (x, t), удовлетворяющих неравенство $2\tilde{\eta} \leq |x| + |t| \leq 2A$. В этой оценке воспользуемся неравенствами (3). Мы рассмотрим сперва случай $|t| \geq \tilde{\eta}$. Тогда простая выкладка показывает, что если $\alpha+\beta \leq N$, то

$$|D_x^\alpha D_t^\beta w_\lambda| \leq C_N \int \psi(\lambda\varrho)(\varrho\lambda^2)^{\alpha+\beta} \exp(-at^{k+1}\varrho\lambda^2) \exp[(a-\delta)t^{k+1}(\varrho\lambda^2)^{(k+1)/(l+1)}]d\varrho$$

$$\leq \frac{C_N}{\lambda} \int \psi(\varrho)(\varrho\lambda)^N \exp(-\varrho\lambda\tilde{\eta}^{k+1}\delta)d\varrho \leq \frac{C_{N,M}}{\lambda^{1+M}} \int_0^\infty \frac{\psi(\varrho)}{\varrho^M} d\varrho,$$

где $M \geq N$.

Действительно $\lambda\varrho \in \operatorname{supp}\psi \Longrightarrow \lambda \leq \lambda^2\varrho \leq 2\lambda$ и, кроме того, для любого натурального $M \geq 0$: $\lambda^N e^{-\lambda} \leq C_M \lambda^{-M}$, $(\lambda \geq 1)$.

Наконец, изучим случай $|x| \geq \tilde{\eta}$. Тогда легко сообразить, что

$$\frac{\partial^M}{\partial\varrho^M} \exp(ix\varrho\lambda^2 - a\varrho\lambda^2 t^{k+1}) = (ix\lambda^2 - a\lambda^2 t^{k+1})^M \exp(ix\varrho\lambda^2 - a\varrho\lambda^2 t^{k+1}).$$

Следовательно, при $\alpha+\beta \leq N$

$$(\lambda^2|x| + \lambda^2 t^{k+1})^M |D_x^\alpha D_t^\beta w_\lambda| \leq C_N \Big| \int \sum_{\gamma\leq|\beta|} \frac{\partial^M}{\partial\varrho^M} \exp(ix\varrho\lambda^2 - a\varrho\lambda^2 t^{k+1})$$

$$\times (\varrho\lambda^2)^{\alpha+\beta}\psi(\lambda\varrho)u^{(\gamma)}(t(\varrho\lambda^2)^{1/(1+l)}, (\varrho\lambda^2)^{-\varepsilon})d\varrho$$

$$= C_N \Big| \int \exp(ix\varrho\lambda^2 - a\varrho\lambda^2 t^{k+1}) \sum_{\gamma\leq\beta} \frac{\partial^M}{\partial\varrho^M} [(\varrho\lambda^2)^{\alpha+\beta}\psi(\lambda\varrho)u^{(\gamma)}(t(\varrho\lambda^2)^{1/(1+l)}, (\varrho\lambda^2)^{-\varepsilon})]d\varrho \Big|$$

$$= C_N \Big| \int \exp(ix\varrho\lambda^2 - a\varrho\lambda^2 t^{k+1}) \sum_{\gamma\leq\beta} \lambda^{\alpha+\beta} \frac{\partial^M}{\partial\varrho^M} [(\varrho\lambda)^{\alpha+\beta}\psi(\lambda\varrho)u^{(\gamma)}(t(\varrho\lambda^2)^{1/(1+l)}, (\varrho\lambda^2)^{-\varepsilon})]d\varrho \Big|$$

$$\leq \tilde{C}_N \lambda^{M+N-1} \sum_{\gamma\leq\beta} \int \exp(-a\varrho\lambda t^{k+1}) \Big| \frac{\partial^M}{\partial\varrho^M} [\varrho^{\alpha+\beta}\psi(\varrho)u^{(\gamma)}(t(\varrho\lambda)^{1/(1+l)}, (\varrho\lambda)^{-\varepsilon})]d\varrho$$

$$\leq \tilde{C}_{M,N} \lambda^{M+N-1} \int_1^2 \exp(-a\varrho\lambda t^{k+1})\varrho^N \lambda^{M/(1+l)} \exp[(a-\delta)t^{k+1}(\varrho\lambda)^{(k+1)/(l+1)}]d\varrho$$

$$\leq \operatorname{const} \lambda^{N-1+M(1+1)/(1+l)}.$$

Таким образом, для всех мультииндексов $\alpha+\beta \leq N$

$$|D_x^\alpha D_t^\beta w_\lambda| \leq \operatorname{const} \tilde{\eta}^{-M} \lambda^{N-1-Ml/(l+1)} \quad (\text{т. к. } |x| \geq \tilde{\eta}).$$

Для достаточно больших M неравенство (5), очевидно, нарушается, если $\lambda \to +\infty$.

4. Мы докажем, что предположения (3) имеют место в случае дифференциального оператора (4). Инверсия $x \to -x$ показывает, что условия теоремы 3 выполнены одновременно для сопряженного оператора P^*. Поэтому, не ограничивая общности, в дальнейшем мы будем писать в (5) $P(t, D_x, D_t)$ вместо $P^*(t, D_x, D_t)$. Сделаем частичное преобразование Фурье относительно x в уравнение $P(t, D_x, D_t)v = 0$. Тогда

(7) $$\widehat{P}\widehat{v} \equiv \frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial t^2} - (a+b)\xi t^k \frac{\partial \widehat{v}}{\partial t} + (abt^{2k} + ct^l \xi - kb\xi t^{k-1})\widehat{v} = 0,$$

где $\widehat{v}(t, \xi) = \int \exp(ix\xi) v(t, x) dx$.

Стандартным образом мы избавимся от $\partial\widehat{v}/\partial t$ в (7). Для этой цели в (7) сделаем следующую замену:

$$\widehat{v}(t, \xi) = z(t, \xi) \exp\left(-\frac{a+b}{2} \xi \frac{t^{k+1}}{k+1}\right).$$

Тогда наше уравнение переходит в

(8) $$z''(t, \xi) + [-(a-b)^2 t^{2k} \xi^2/4 + ct^l \xi + (a-b)k\xi t^{k-1}/2] z(t, \xi) = 0.$$

В выражении (8) воспользуемся удобной асимптотической заменой переменных: $s = t\xi^{1/(k+1)}$, $\xi > 0$. Обозначая по определению $u(s, \xi) = z(s\xi^{-1/(k+1)}, \xi)$, мы находим

(9) $$u''(s, \xi) + [-(a-b)^2 s^{2k}/4 + (a-b)ks^{k-1}/2 + cs^l \xi^{(k-l-1)/(k+1)}] u(s, \xi) = 0, a > b, \xi > 0.$$

Пусть $\varepsilon = -(k-l-1)/(k+1)$. Тогда $0 \leqq \varepsilon < 1$ и, разумеется, u является функцией аргументов s и $\xi^{-\varepsilon}$. Поэтому мы заключаем, что

$$\widehat{v}(t, \xi) = \exp\left(-\frac{a+b}{2k+2} \xi t^{k+1}\right) u(t\, \xi^{1/(k+1)}, \xi^{-\varepsilon})$$

удовлетворяет уравнению (7). Вся остальная часть наших рассуждений сводится к изучению асимптотики следующей задачи Коши:

(10) $$u''(s, \mu) + [-(a-b)^2 s^{2k}/4 + (a-b)ks^{k-1}/2 + cs^l \mu] u(s, \mu) = 0,$$
$$u(0, \mu) = 1, \ u'(0, \mu) = 0.$$

Нас интересуют оценки для $\partial^{\alpha+\beta} u/\partial s^\alpha \partial \mu^\beta$, α, β — произвольные мультииндексы, которые выполнены для всех достаточно больших $|s|$ и всех $\mu \in [0, 1]$. Кроме того, заметим, что $P(s, \mu) = (a-b)^2 s^{2k}/4 - (a-b)ks^{k-1}/2 - cs^l \mu = s^{2k}[(a-b)^2/4 + O(s^{-1}) + \mu O(s^{-1})]$, $|s| \to +\infty$ — полином степени $2k$ от s, а его коэффициенты зависят линейно от параметра $\mu \in [0, 1]$. Как хорошо известно, задача Коши

(11) $$u'' - P(s, \mu) u = 0, \ u(0, \mu) = 1, \ u'(0, \mu) = 0,$$

имеет единственное аналитическое решение, определенное вдоль числовой оси $s \in \mathbf{R}^1$ для любого $\mu \in [0, 1]$. Следовательно, $u(s, \mu) \in C^\infty(\mathbf{R}^1 \times [0, 1])$. Приступим теперь к оценке u и ее производных. Для этой цели воспользуемся методом ВКБ (см. [3, Дополнение 1]). Мы хотим обратить внимание, что из доказательства Федорюка в [3] легко извлечь следующее утверждение.

Лемма. *Рассмотрим оператор $L = d^2/ds^2 - P(s, \mu)$, где полином $P(s, \mu) = s^{2k}[(a-b)^2/4 + O(s^{-1}) + \mu O(s^{-1})]$, $|s| \to \infty$, $a > b$. Тогда существует константа $C > 0$, независящая от $\mu \in [0, 1]$ и такая, что если $s \geqq C$ и $P(s, \mu) \geqq 1$, уравнение $Lu = 0$ имеет решения $u_1(s, \mu)$, $u_2(s, \mu) \in C^\infty(\mathbf{R}^1) \cap C(\mathbf{R}^1 \times [0, 1])$, для которых выполнены асимптотические формулы:*

(12) $$u_i(s, \mu) = [P(s, \mu)]^{-1/4} \exp\left[\pm \int_C^s \sqrt{P(r, \mu)}\, dr\right][1 + 0(1)],$$

$$u_i'(s, \mu) = -[P(s, \mu]^{-1/4} \exp[\pm \int_C^s \sqrt{P(r, \mu)}dr][1+0(1)], \quad s \geq C, \ i=1, \ 2,$$

где остаточный член $o(1)$ стремится к нулю, когда $s \to +\infty$ равномерно относительно $\mu \in [0, 1]$.

Заметим, что Вронскиан решений u_1, u_2 в точности равняется на $-2 + o(1)$ для $s \geq C$ и, следовательно, u_1, u_2 линейно-независимы. Кроме того, инверсия $s \to -s$ в уравнении $Lu = 0$ показывает, что равномерные асимптотические формулы вида (12) выполнены для всех $s \leq -C$, где C достаточно большая константа, независящая от μ.

Доказательство леммы дословно повторяет доказательство [3, Добавление 1 лемма 1.1], поскольку все соответствующие оценки в [3, Добавление 1] равномерны относительно параметра $\mu \in [0, 1]$ и равномерный предел последовательности непревывных функций тоже непрерывная функция.

Пользуясь этой леммой, мы оценим $u(s, \mu)$ для значений $|s| \geq C$. Действительно, если $s \geq C$, то

$$u(s, \mu) = C_1(\mu)u_1(s, \mu) + C_2(\mu)u_2(s, \mu),$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s, \mu) = C_1(\mu)\frac{\partial u_1}{\partial s}(s, \mu) + C_2(\mu)\frac{\partial u_2}{\partial s}(s, \mu).$$

Следовательно, функции $C_i(\mu)$, $i=1, 2$, непрерывно зависят от $\mu \in [0, 1]$, откуда делаем вывод, что $|u(s, \mu)| \leq \mathrm{const}(|u_1| + |u_2|)$, если $s \geq C$ и $\mu \in [0, 1]$.

Пусть теперь $\eta > 0$ произвольное положительное число. Тогда можно найти константы $C_0(\eta)$, $C_{00}(\eta)$, $C_{000}(\eta)$, такие, что

$$C_0(\eta) \exp[\frac{a-b}{2k+2}(1+\eta)s^{k+1}] \geq \exp[\int_C^s \sqrt{P(r, \mu)}dr] \geq C_{00}(\eta) \exp[\frac{a-b}{2k+2}(1-\eta)s^{k+1}]$$

$$\text{для } |s| \geq C_{000}(\eta),$$

$$C_0(\eta) \exp[\frac{a-b}{2k+2}(1+\eta)s^{k+1}] \geq [P(s, \mu)]^{1/4} \exp[\int_C^s \sqrt{P(r, \mu)}dr]$$

$$\geq C_{00}(\eta) \exp[(1-\eta)\frac{a-b}{2k+2}s^{k+1}], \quad |s| \geq C_{000}(\eta).$$

Следовательно, для всех $|s| \geq C_{000}(\eta)$ имеет место неравенство

$$|u(s, \mu)| \leq \mathrm{const}_0(\eta) \exp[(1+\eta)\frac{a-b}{2k+2}s^{k+1}].$$

Пользуясь еще раз асимптотическим равенством (12), легко найти, что

$$\left|\frac{\partial u}{\partial s}(s, \mu)\right| \leq \mathrm{const}_1(\eta) \exp[(1+\eta)\frac{a-b}{2k+2}s^{k+1}], \ |s| \geq C_{111}(\eta), \quad \mu \in [0, 1].$$

Из (11) следует, что $|u_{ss}''| \leq \mathrm{const}\, s^{2k} |u|$ для всех $|s| \geq C_{222}(\eta)$, т. е.

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s, \mu)\right| \leq \mathrm{const}_2(\eta) \exp[(1+2\eta)\frac{a-b}{2k+2}s^{k+1}], \quad |s| \geq C_{222}(\eta), \quad \mu \in [0, 1].$$

Последовательно дифференцируя (11) относительно s, находим индуктивным образом, что существуют константы $C_{NNN}(\eta) \geq C_{(N-1)(N-1)(N-1)}$, $\mathrm{const}_N(\eta) \geq \mathrm{const}_{N-1}(\eta)$ и такие, что

$$\left|\frac{\partial^N u}{\partial s^N}\right| \leq \mathrm{const}_N(\eta) \exp\left[(1+N\eta)\frac{a-b}{2k+2}s^{k+1}\right], \text{ когда } |s| \geq C_{NNN}(\eta) \text{ и } \mu \in [0,\ 1].$$

Оценим теперь $u^{(a)}_\mu(s, \mu)$. Для этой цели продифференцируем (11) относительно μ. Итак, $(u'_\mu)''_{ss}-Pu'_\mu-P'_\mu u=0$, т. е.

$$(u'_\mu)_{ss}-Pu'_\mu=P'_\mu u. \tag{13}$$

Так как (13) неоднородное уравнение, то мы воспользуемся методом варьирования переменных (Лагранжа) при изучении поведения u'_μ, $|s|\to+\infty$. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial \mu}=A(s, \mu)u_1(s, \mu)+B(s, \mu)u_2(s, \mu), \quad |s| \geq C_{NNN}(\eta), \quad \mu \in [0,\ 1],$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial A}{\partial s}u_1+\frac{\partial B}{\partial s}u_2=0,\\ \frac{\partial A}{\partial s}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial s}+\frac{\partial B}{\partial s}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial s}=\frac{\partial P}{\partial \mu}\cdot u.\end{gathered} \tag{14}$$

Из (14) находим, что

$$\frac{\partial A}{\partial s} = -u_2\frac{\partial P}{\partial \mu}u\Big/\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_2}{\partial s}\end{vmatrix}, \quad |s| \geq C_{NNN}(\eta), \quad \mu \in [0,\ 1],$$

$$\frac{\partial B}{\partial s} = +u_1\frac{\partial P}{\partial \mu}u\Big/\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_2}{\partial s}\end{vmatrix}.$$

Окончательно $A(s, \mu)=A(C_{NNN}(\eta),\ \mu)+\int^s_{C_{NNN}(\eta)}(\partial A/\partial r)dr$. Замечание, что

$$\frac{\partial u}{\partial \mu}=Au_1+Bu_2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \mu}\right)'_s=A\frac{\partial u_1}{\partial s}+B\frac{\partial u_2}{\partial s},$$

показывает, что A, B являются непрерывными функциями аргументов (s, μ). Таким образом, $A(C_{NNN}(\eta), \mu)$, $B(C_{NNN}(\eta), \mu)$ ограничены при $\mu \in [0,\ 1]$. Тогда

$$|A(s, \mu)| \leq \mathrm{const}+\int_{C_{NNN}(\eta)}^{s}\left|\frac{\partial A}{\partial r}\right|dr \leq \mathrm{const}\,(\eta)\left(1+\int_{C_{NNN}(\eta)}^{s}|uu_2|\left|\frac{\partial P}{\partial \mu}\right|dr\right)$$

$$\leq \mathrm{const}\,(\eta)\left(1+\int_{C_{NNN}(\eta)}^{s} r^{2k}\exp\left[\frac{a-b}{2k+2}r^{k+1}2(1+\eta)\right]dr\right).$$

Согласно правилу Лопиталя

$$\int_{C_{NNN}(\eta)}^{s} r^{2k}\exp\left[\frac{a-b}{2k+2}2r^{k+1}(1+\eta)\right]dr \leq \mathrm{const}\,(\eta)\exp\left[2\frac{a-b}{2k+2}(1+2\eta)s^{k+1}\right].$$

Подобными выкладками можно показать, что

$$|B(s, \mu)| \leq \mathrm{const}\,(\eta)\left(1+\exp\left[\frac{a-b}{2k+2}3\eta s^{k+1}\right]\right).$$

Тогда

$$\left|\frac{\partial u}{\partial\mu}\right|\leqq\operatorname{const}(\eta)\exp\left[\frac{a-b}{2k+2}(1+5\eta)s^{k+1}\right],\quad |s|\geqq C_{NNN}(\eta),\quad \mu\in[0,\ 1].$$

Последовательно дифференцируя (11), мы получим индуктивно, что если $\alpha\leqq N$, то с некоторыми константами $C(\eta)$, $l(N)$

$$\left|\frac{\partial^\alpha u}{\partial\mu^\alpha}\right|\leqq C(\eta)\exp\left[\frac{a-b}{2k+2}(1+l\eta)s^{k+1}\right],\quad |s|\geqq C_{NNN}(\eta),\quad \mu\in[0,\ 1].$$

Наконец, общий случай $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta}u}{\partial s^\alpha\partial\mu^\beta}$ сразу сводится к уже изученным случаям $\dfrac{\partial^\alpha u}{\partial s^\alpha}$, $\dfrac{\partial^\beta u}{\partial\mu^\beta}$, поскольку в силу формулы Лейбница немедленно выводится следующее тождество:

$$\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta}u}{\partial s^\alpha\,\partial\mu^\beta}\right)''_{ss}-P(s,\mu)\,\frac{\partial^{\alpha+\beta}u}{\partial s^\alpha\,\partial\mu^\beta}=L\left(s,\ \mu,\ \frac{\partial}{\partial s},\ \frac{\partial}{\partial\mu}\right)u. \tag{15}$$

Здесь в правой стороне находится линейный дифференциальный оператор порядка $\alpha+\beta-1$, причем максимальный порядок дифференцирования γ' относительно μ не превосходить β, максимальный порядок дифференцирования γ'' относительно s не превосходит α и, кроме того, $\gamma'+\gamma''\leqq\alpha+\beta-1$. Все требуемые оценки (3) легко доказываются индуктивным образом, так как число $\eta>0$ можно выбрать таким способом, чтобы модуль любой экспоненты вида $\exp((a-b)(1+l\eta)s^{k+1}/(2k+2))$ не превосходил $\exp((a+b)s^{k+1}/(2k+3))$ при $|s|\geqq C(\eta)$. Так найденное число η фиксируем, чем доказательство закончено.

5. Для доказательства следствия 2 теоремы 3 (т. е. случай, когда $ab<0$, $l=k-1$) заметим, что в ядре оператора (7) находится экспонента

$$\exp\left(-\frac{a+b}{2k+2}\,\xi t^{k+1}\right)u(t\xi^{1/(k+1)})\ \text{ и }\ u(t\xi^{1/(k+1)})=\exp\left(\pm\frac{a-b}{2k+2}\,\xi t^{k+1}\right)(1+o(1)).$$

Таким образом, в ядре (7) содержится быстроубывающая на $\pm\infty$ экспонента тогда и только тогда, когда линейное дифференциальное уравнение

$$u''(s)+[-(a-b)^2s^{2k}/4+((a-b)k+2c)s^{k-1}/2]u(s)=0$$

имеет нетривиальное решение из $S(\mathbf{R}^1)$. При помощи теории Бесселевских функций (см. (2)) можно показать, что это возможно только в случае $c/(a-b)\in\mathbf{Z}$, $c/(a-b)\equiv 0$ или $1\ (\operatorname{mod}(k+1))$.

Доказательство следствия 3 элементарно. На самом деле, уравнение (8) переходит в случае $a=b>0$ в

$$z''(t,\ \xi)+ct^l\xi z=0. \tag{8'}$$

После асимптотической замены переменных $s=t(-c\xi)^{1/(l+2)}$, если $c<0$, $\xi>0$, соответственно $s=t(c\xi)^{1/(l+2)}$ для $c>0$, мы получаем, что

$$\begin{aligned} &u''(s)-s^lu(s)=0 &&(c<0),\\ &u''(s)+s^lu(s)=0 &&(c>0), \end{aligned} \tag{9'}$$

где $u(s)=z(s(\pm c\xi)^{1/(l+2)})$. Тогда в ядре рассматриваемого оператора содержится экспонента $\exp[-a\xi t^{k+1}/(k+1)]u$. Оценка решения задачи Коши:

(16) $$u''(s) \pm s^l u(s) = 0,\ u(0) = 1,\ u'(0) = 0,$$

проводится проще, чем в теореме 3, так как функция u не зависит от ξ. Поведение u, u' при $|s| \to \infty$ мы находим при помощи метода ВКБ, а все производные $u^{(r)}(s)$, $r \geq 2$ оцениваются без труда при последовательном дифференцировании (16). Следовательно,

$$\left|\exp\left(-\frac{a}{k+1}\xi t^{k+1}\right)u(t(\pm c\xi)^{1/(l+2)})\right| \leq C\exp\left(-\frac{a}{k+1}\xi t^{k+1}\right)\exp\left(\frac{|t|^{(l+2)/2}}{(l+2)/2}\right)|c\xi^{1/2}|)$$

$$\leq C_\varepsilon \exp\left(-\frac{a}{k+1}\xi t^{k+1}\right)\exp(\varepsilon\xi|t|^{l+2}) = C_\varepsilon \exp\left[-\xi t^{k+1}\left(\frac{a}{k+1} - \varepsilon|t|^{l+1-k}\right)\right]$$

$$\leq C'_\varepsilon \exp\left(-\xi t^{k+1}\frac{a}{2k+2}\right),$$

когда $\varepsilon > 0$ достаточно мало, поскольку $l \geq k-1$. Остальная часть доказательства заканчивается в точности как в теореме 3.

6. Теперь докажем теорему 1. Пусть функция $u(t)$ не равняется тождественно нулю и $u(t) \in S(\mathbf{R}^{n-1})$ и, кроме того, $P(t, \xi, D_t)u = 0$, если $\xi = 1$. В силу условия (A) оператор $P(t, D_{x_1}, D_t)$ эллиптический для $t \neq 0$, т. е. $u(t)$ даже аналитическая функция. Отсюда делаем вывод, что существует мультииндекс α_0 и такой, что $D_t^{\alpha_0}u(0) \neq 0$. Легко проверяется, что

$$w_\lambda(x_1, t) = \int \psi(\lambda\varrho)\exp[ix_1\lambda^2\varrho]u((\varrho\lambda^2)^{1/(1+\delta)}t)d\varrho$$

удовлетворяет уравнение $P(t, D_{x_1}, D_t)w_\lambda = 0$ (т. к. P — квазиоднородный оператор).

При доказательстве невыполнения неравенства (5) мы определим функцию $f_\lambda(x_1, t) = D_t^{\alpha_0}(F(\lambda^2 x_1, \lambda^2 t))$, $\lambda \geq 1$, где $F(x_1, t)$ дается равенством (6). Тогда оценка правой стороны (5) проводится легче, чем в теореме 3, поскольку, если $a \in S(\mathbf{R}_t^{n-1})$, то любая производная $D^\alpha a(t) \in S(\mathbf{R}^{n-1})$ и, следовательно,

$$|(\varrho\lambda^2)^{\alpha+\beta}(D^\beta u)((\varrho\lambda^2)^{1/(1+\delta)}t)| \leq C_{N,M}(\varrho\lambda^2)^{\alpha+\beta}(1+|\varrho\lambda^2 t|)^{-M} \leq \tilde{\eta}^{-N}C_{N,M}(\varrho\lambda^2)^{N-M}$$

для любого $M \in \mathbf{Z}_+$, когда $|t| \geq \tilde{\eta}$, $|\alpha+\beta| \leq N$. В случае, когда $|x_1| \geq \tilde{\eta}$, в оценке для Pv_λ используется только тот факт, что функции из $S(\mathbf{R}^{n-1})$ ограничены. Таким образом, нам осталось только изучить поведение $\iint f_\lambda v_\lambda dxdt$ при $\lambda \to +\infty$, т. е. поведение $\iint F(\lambda^2 x_1, \lambda^2 t)D_t^{\alpha_0}(\varphi w_\lambda)dx_1 dt$, когда $\lambda \to +\infty$. Итак,

$$\iiint F(\lambda^2 x_1, \lambda^2 t)\psi(\lambda\varrho)\exp(ix_1\lambda^2\varrho)D_t^{\alpha_0}[\varphi u((\varrho\lambda^2)^{1/(1+\delta)}t)]dx_1 dt d\varrho$$

$$= \iiint F(\lambda^2 x_1, \lambda^2 t)\psi(\lambda\varrho)\exp(ix_1\lambda^2\varrho)(\varrho\lambda^2)^{|\alpha_0|/(1+\delta)}(D_t^{\alpha_0}u)((\varrho\lambda^2)^{1/1+\delta}t)\varphi(x_1, t)dx_1 dt d\varrho$$

$$+ \sum_{|\alpha_0| \geq |\gamma| \geq 1} C_\gamma \iiint F(\lambda^2 x_1, \lambda^2 t)\psi(\lambda\varrho)\exp(ix_1\lambda^2\varrho)(\varrho\lambda^2)^{|\alpha_0-\gamma|/(1+\delta)}\varphi_\gamma(x_1, t)(D_t^{\alpha_0-\gamma}u)$$

$$((\varrho\lambda^2)^{1/(1+\delta)}t)dx_1 d\varrho dt = I_{1\lambda} + I_{2\lambda},$$

где $\varphi_\gamma = D_t^\gamma\varphi$ и $\varphi_\gamma \equiv 0$ — в некоторой окрестности нуля.

Читатель сразу проверит, что

$$I_{1\lambda} = \lambda^{-2n-1+|\alpha_0|/(1+\delta)}[D_t^{\alpha_0}u(0) + o(1)], \quad \lambda \to +\infty,$$

$$I_{2\lambda} = O(\lambda^{-2n-1+(|\alpha_0|-1)/(1+\delta)}), \quad \lambda \to +\infty.$$

Замечание, что $D_t^{\alpha_0}u(0) \neq 0$, заканчивает доказательство нашего утверждения.

В связи с изучением локальной разрешимости квазиоднородных операторов возникает следующая интересная задача. Найти эффективные условия, при выполнении которых в ядре $Lu = d^2/dt^2 - Pu$, P — полином, содержится нетривиальная функция из $S(\mathbf{R}^1)$. Метод ВКБ дает асимптотика только на $+\infty$ или на $-\infty$, а теория специальных функций разработана в некоторых случаях.

7. Метод, который применяется в этой статье, позволяет доказать локальную неразрешимость и других операторов с кратными характеристиками. Поэтому мы приводим в конце нашей работы несколько примеров, которых можно рассматривать как дополнение к основной части этой статьи.

Предложение 1. *Пусть оператор $P(t, \xi, d/dt)$, $\xi > 0$ имеет решение $w(t, \xi) : P(t, \xi, d/dt)w = 0$ следующего вида:*

$$w(t, \xi) = \exp(-at^{2k+2}\xi)v(t\xi^{\alpha}), \quad a \geqq 0,\ k \geqq 0,\ 0 < \alpha < 1,$$

где $v(0) \neq 0$ и для любого натурального числа $m \geqq 0$ справедлива оценка: $|v^{(m)}(t)| \leqq C_m \exp(A_m |t|^p)$, $p = \mathrm{const}$, $p \geqq 0$, A_m, $C_m = \mathrm{const} \geqq 0$.

Тогда формально сопряженный оператор $P^*(t, D_x, \partial/\partial t)$ к оператору P локально неразрешим в окрестности нуля, если $\alpha p < 1$ и $p \geqq 2k+2$.

Следствие. *Оператор*

$$P = \left(\frac{\partial}{\partial t} - at^{2k+1}D_x\right)^l + bt^m D_x^r$$

неразрешим локально в нуле, если $a \neq 0$, a, b — вещественные константы, $l \geqq 2$, $1 \leqq r \leqq l-1$ и $m \geqq (2k+1)l$. В специальном случае, когда $r = 1$, ограничение на m принимает следующий вид: $m + l \geqq 2k+2$.

Доказательство предложения 1 следует доказательством следствия 3 теоремы 3. Разница состоит в том, что метод ВКБ неприменим в этой ситуации. Мы пользуемся асимптотической формулой Рапопорта из [16] при изучении поведения на $\pm\infty$ нетривиальных решений обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^l v}{ds^l} + bs^m v = 0.$$

В дальнейшем мы рассмотрим следующие уравнения:

$$1. \quad P(t, D_x, \partial/\partial t)u = \partial^2 u/\partial t^2 + at^m D_x^2 u + (\alpha + i\beta t^n)D_x u,$$

когда a, α, β — вещественные константы, $a\alpha\beta \neq 0$, n — нечетное, $m > 2n+2$.

$$2. \quad P(t, D_x, \partial/\partial t)u = \partial^2 u/\partial t^2 + \psi(t)D_x, \text{ где } \psi \in C^\infty,\ \psi(0) \neq 0,$$

$\psi(0)$ — вещественное, $\operatorname{Im}\psi(t)$ меняет знак в нуле и $\operatorname{Im}\psi(t)$ не обращается тождественно в нуль в любой односторонней окрестности нуля.

Пусть $\xi > 0$ двойственная переменная к D_x. Тогда после преобразования Фурье относительно x и асимптотической замены $t = s\xi^{-2/(m+2)}$ оператор 1 переходит в

$$\widehat{P}\left(s, \xi, \frac{d}{ds}\right) = \frac{d^2}{ds^2} + \xi^{(m-2)/m+2}\left(\alpha + i\beta s^n \xi^{-2n/(m+2)} + as^m \xi^{-(m-2)/(m+2)}\right).$$

Обозначая $\mu = \xi^{1/2(m+2)}$, мы находим

$$\frac{d^2\widehat{u}}{ds^2} + \mu^{2(m-2)}\left(\alpha + i\beta s^n \mu^{-4n} + as^m \mu^{-2(m-2)}\right)\widehat{u} = 0. \tag{17}$$

Следовательно, изучение локального поведения оператора 1. сводится к исследованию асимптотических свойств нетривиальных решений уравнения (17) при $\mu \to +\infty$. Как хорошо известно [15], это уравнение имеет формальное асимптотическое решение следующего вида:

$$y(s, \mu) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(s)\mu^{-n}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{m-2} \mu^k g_k(s)\right).$$

Из-за недостатка места мы рассмотрим подробно только случай, когда $m=6$, $n=1$ и $\lambda=\xi^{1/4}$. Тогда возникает уравнение

$$(17') \qquad \widehat{P}\left(s, \lambda, \frac{\partial}{\partial s}\right) \widehat{u} = \frac{d^2\widehat{u}}{ds^2} + \lambda^2(\alpha + i\beta s\lambda^{-1} + a\lambda^{-2}s^6)\widehat{u} = 0,$$

допускающее следующее формальное решение:

$$y(s, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} p_n(s) \exp(\lambda g_0(s)).$$

Для фазовой функции $g_0(s)$ и для амплитудных функций находим

$$(18') \qquad g_0'^2 + \alpha = 0$$

$$(18'') \qquad 2g_0' p_0' + (i\beta s + g_0'')\, p_0 = 0,$$

$$(18''') \qquad 2g_0'\, p_m' + (i\beta s + g_0'')\, p_m + as^6 p_{m-1} + p_{m-1}'' = 0, \quad m \geq 1.$$

Читатель без труда сообразит, что, не ограничивая общности, мы можем предполагать при доказательстве неразрешимости, что $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Пусть $g_0(s) = i\sqrt{\alpha}s$. Очевидно, $p_0(s) = \exp(-\beta s^2/4\sqrt{\alpha}) \in S(\mathbf{R}^1)$ удовлетворяет уравнению (18''). Мы индуктивно докажем, что любое уравнение (18''') имеет решение вида $p_m(s) = r_m(s)\exp(-\beta s^2/4\sqrt{\alpha})$, где $r_m(s)$ — полином переменной s. Действительно, если $p_{m-1}(s) = r_{m-1}(s)\exp(-\beta s^2/4\sqrt{\alpha})$, то

$$p_m' + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} s - \frac{i}{2\sqrt{\alpha}}\left[as^6 r_{m-1} \exp\left(-\frac{\beta s^2}{4\sqrt{\alpha}}\right) + \left(r_{m-1}\exp\left(-\frac{\beta s^2}{4\sqrt{\alpha}}\right)\right)''\right] = 0.$$

Таким образом, в качестве $p_m(s)$ мы можем выбрать функцию

$$p_m(s) = \frac{i}{2\sqrt{\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta s^2}{4\sqrt{\alpha}}\right) \int \left[as^6 r_{m-1}\exp\left(-\frac{\beta s^2}{4\sqrt{\alpha}}\right) + \left(r_{m-1}\exp\left(-\frac{\beta s^2}{4\sqrt{\alpha}}\right)\right)''\right] \exp\left(\frac{\beta s^2}{4\sqrt{\alpha}}\right) ds.$$

Найденная нами функция $p_m(s)$ допускает представление требуемого вида.

Рассмотрим теперь конечную сумму

$$w_M(s, \lambda) = \sum_{n=0}^{M} \lambda^{-n} p_n(s) \exp(i\sqrt{\alpha}\lambda s).$$

Сразу видно, что

$$\widehat{P}\left(s, \lambda, \frac{d}{ds}\right) w_M = \lambda^{-M} \exp\left(-\frac{\beta s^2}{4\sqrt{\alpha}} + i\sqrt{\alpha}\lambda s\right) r_{M+1}(s),$$

где $r_{M+1}(s)$ — многочлен переменной s.

Возвращаясь в старые координаты, мы заключаем, что

$$w_M = \sum_{n=0}^{M} \xi^{-n/4} p_n(t\xi^{1/4}) \exp(i\sqrt{a}\,\xi^{1/2}t),$$

$p_n \in S(\mathbf{R}^1)$, $p_0(0)=1$ является приближенным решением уравнения $P(t, \xi, d/dt)u=0$ в следующем смысле:

$$P(t, \xi, \frac{d}{dt})\, w_M = \xi^{-M/4} \exp(i\xi^{1/4}\sqrt{a}\,t) Q_M(t\xi^{1/4}), \quad Q_M \in S(\mathbf{R}^1).$$

Мы уже готовы сформулировать второе наше предложение.

Предложение 2. *Предположим, что для любого натурального $M>0$ оператор $P(t, \xi, d/dt)$ имеет приближенное асимптотическое решение $w_M(t, \xi)$: $P(t, \xi, d/dt) w_M = \xi^{-M} \exp(i\xi^{\alpha}t) Q_M(t\xi^{\beta})$ вида*

$$w_M(t, \xi) = \exp(i\xi^{\alpha}t) \sum_{n=0}^{R} \xi^{-n\beta} p_n(t\xi^{\beta}),$$

где α, β — константы, $0 \leq \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, функции Q_M, $p_n \in S(\mathbf{R}^1)$ и $p_0(0) \neq 0$.

Тогда формально сопряженный оператор P^* к оператору $P(t, D_x, \partial/\partial t)$ локально неразрешим в окрестности нуля в классе обобщенных функций D'.

Следствие. *Оператор*

$$P(t, D_x, \frac{\partial}{\partial t})\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a t^6 D_x^2 u + (\alpha + i\beta t) D_x u$$

локально неразрешим в нуле, если a, α, β — вещественные константы и $a\alpha\beta \neq 0$.

Замечание. Операторы вида 1 локально неразрешимы и в случае, когда $m > 2n+2$, $m \geq 7$. Доказательство этого факта, основанном на другом принципе, можно найти в [17]. Случаи $m=5$, $m=6$ были рассмотрены Ивреем (подробное доказательство не опубликовано). Набросок его доказательства тоже следует другой схемой. Преимущество нашего доказательства состоит в том, что нам не приходится решать нелинейные частные дифференциальные уравнения с большим параметром.

Доказательство предложения 2 стандартное. Снова нужно изучить поведение интеграла

$$u_\lambda(x, t) = \int_0^\infty \psi(\lambda\varrho) \exp(ix\varrho\lambda^2 + it(\varrho\lambda^2)^\alpha) P(t(\varrho\lambda^2)^\beta) d\varrho$$

в области $0 < 2\delta \leq |t| + |x| \leq 3\delta$. Всюду предположено, что α, β постоянные, $0 \leq \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $P \in S(\mathbf{R}^1)$, λ — большой параметр. Как при доказательстве теоремы 2, мы показываем, что для любых натуральных $M, R > 0$ имеет место оценка $|D_x^{\tilde{\alpha}} D_t^{\tilde{\beta}} u_\lambda| = O(\lambda^{-M})$, $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \leq R$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in Z_+$.

Если w_M приближенное решение из предложения 2, то обозначим

$$u_{\lambda,M} = \int_0^\infty \psi(\lambda\varrho) \exp(ix\varrho\lambda^2) w_M(t, \varrho\lambda^2) d\varrho.$$

Тогда

$$P(t, D_x, \frac{\partial}{\partial t})\, u_{\lambda,M} = \int_0^\infty \psi(\lambda\varrho) \exp(ix\varrho\lambda^2) P(t, \varrho\lambda^2, \frac{d}{dt}) w_M(t, \varrho\lambda^2)\, d\varrho$$

$$=\int_0^\infty \psi(\lambda\varrho)\exp(ix\varrho\lambda^2)Q_M(t(\varrho\lambda^2)^\beta)(\varrho\lambda^2)^{-M}\exp(i(\varrho\lambda^2)^\alpha t)d\varrho.$$

Следовательно, для любых мультииндексов p_1, p_2, $p_1+p_2\leq N$ выражение $\left|D_x^{p_1}D_t^{p_2}\left(P(t,\ D_x,\ \frac{\partial}{\partial t})u_{\lambda,M}\right)\right|$ не превосходит интеграл

$$\int_0^\infty \psi(\lambda\varrho)(\varrho\lambda^2)^{-M+2N}d\varrho = O(\lambda^{-M-1+2N}).$$

Таким образом, присутствие остаточного члена $\xi^{-M}Q_M\exp(i\xi^\alpha t)$ не играет роли при доказательстве предложения 2. Остальные детали доказательства мы опускаем.

Наконец, обратимся к примеру 2. После преобразования Фурье относительно x оператор $\partial^2/\partial t^2+\psi(t)D_x$ переходит в $d^2/dt^2+\psi(t)\xi$. При доказательстве локальной неразрешимости мы можем предполагать без потери общности, что $\operatorname{Re}\psi(0)>0$. После замены $\lambda=\xi^{1/2}$, $\xi>0$ находим

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\lambda^2\psi(t)y=0.$$

Это уравнение имеет формальное асимптотическое решение $y(t,\lambda)$ вида

$$y(t,\lambda)=\sum_{n=0}^\infty \lambda^{-n}a_n(t)\exp(\lambda g_0(t)).$$

Соответствующие уравнения для фазовой функции g_0 и для амплитуд a_n будут

$$g_0'^2+\psi(t)=0,\ 2g_0'a_0'+g_0''a_0=0,\ 2g_0'a_m'+g_0''a_m+a_{m-1}''=0,\quad m\geq 1.$$

Ввиду того, что $\psi(t)=f(t)+ig(t)$ — комплекснозначная функция, $\psi\in C^\infty$ определить $g(t)$ можно только локально, т. е.

$$g_0(t)=\pm i\int_0^t\sqrt{\psi(s)}\,ds=\pm i\int_0^t\sqrt{f(s)}\sqrt{1+ig(s)/f(s)}\,ds.$$

Пользуясь фактом, что $g_0(0)=0$, находим, что в некоторой окрестности нуля

$$g_0(t)\sim\pm i\int_0^t\sqrt{f(s)}\left(1+\frac{i}{2}\ \frac{g(s)}{f(s)}\right)ds,\ \text{ т. е. }\operatorname{Re}\int_0^t\sqrt{\psi(s)}\,ds\sim\mp 1/2\int_0^t\frac{g(s)}{\sqrt{f(s)}}\,ds.$$

Ветвь квадратного корня выбираем таким образом, чтобы $\operatorname{Re}\mp\int_0^t\frac{g(s)ds}{\sqrt{f(s)}}\geq 0$ (равенство достигается только при $t=0$). Условие $g_0'(0)\neq 0$ позволяет нам найти все амплитуды в подходящей окрестности нуля. В частности, $a_0(t)=(g_0')^{-1/2}$ и $a_0(0)\neq 0$.

Предложение 3. *Пусть для любого натурального $M>0$ оператор $P(t,\xi,d/dt)$, $\xi>0$, имеет приближенное асимптотическое решение $w_M(t,\xi)$: $P(t,\ \xi,\ d/dt)\,w_M=\xi^{-M}\exp(i\xi^\alpha\varphi(t))Q_M(t)$, $|t|<\varepsilon(M)$, $\varepsilon(M)>0$, следующего вида:*

$$w_M(t, \xi) = \exp(i\xi^\alpha \varphi(t)) \sum_{n=0}^{R} \xi^{n\alpha} \quad p_n(t),$$

где α — постоянная, $0<\alpha<1$, Q_M, p_n, $\varphi(t) \in C^\infty(|t|<\varepsilon)$, $p_0(0) \neq 0$ и, кроме того, $\varphi(0)=0$, но $\operatorname{Im}\varphi(t)>0$ при $t \neq 0$.

Тогда формально сопряженный оператор P^* к оператору $P(t, D_x, \partial/\partial t)$ локально неразрешим в окрестности нуля в классе обобщенных функций.

Следствие. *Оператор P, рассмотренный в примере 2, локально неразрешим в нуле.*

Замечание. Неразрешимость оператора P из примера 2 была доказана другими средствами в [18].

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Хермандер. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Москва, 1965.
2. G. N. Watson. A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge, 1966.
3. В. Вазов. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, 1968.
4. В. В. Грушин. Об одном классе гипоэллиптических уравнений. *Мат. сб.*, **83**, 1970, 456—473.
5. В. В. Грушин. Об одном классе эллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на подмногообразии. *Мат. сб.*, **84**, 1971, 163—195.
6. G. Sjöstrand. Paramentrices for pseudodiff. operators with multiple characteristics. *Ark. Math.*, **12**, 1974, 85—130.
7. F. Cardoso, F. Trèves. Locally nonsolvable pseudodifferential operators with double characteristics. *Seminar on P. D. E. Rutgers University*, 1973, 23—38.
8. F. Trèves. Concatenations of second order evolution equations applied to local solvability and hypoellipticity. *Comm. Pure Appl. Math.*, **26**, 1973, 201—250.
9. L. B. de Monvel, F. Trèves. On a class of P. d. o. with double characteristics. *Invent. Math.*, **24**, 1974, 1—34.
10. L. B. de Monvel. Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-diff. operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, **27**, 1974, 585—639.
11. Ю. В. Егоров, П. Р. Попиванов. Об уравнениях главного типа, не имеющих решений. *Успехи мат. наук*, **24**, 1974, № 2, 172—189.
12. Gilioli, F. Treves. An example in the solvability theory of linear partial differential equations. *Amer. J. Math.* **96**, 1974, 367—385.
13. L. Hörmander. A class of hypoelliptic pseudodifferential operators with double characteristics. *Math. Ann.*, **217**, 1975, 165—188.
14. A. Menikoff. Some examples of hypoelliptic P. D. O. *Math., Ann.*, **221**, 1976, 167—181.
15. A. Nayfeh. Perturbation methods. New York, 1973.
16. M. Наймарк. Линейные дифференциальные операторы. Москва, 1965.
17. R. Rubinstein. Some examples of locally nonsolvable P. D. E. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **199**, 1974, 123—130.
18. П. Попиванов. Локальная разрешимость псевдодифференциальных операторов с характеристиками второй кратности. *Мат. сб.*, **100**, 1975, 217—242.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 8. 11. 1976