PLISKA
**STUDIA MATHEMATICA BULGARICA**

ПЛИСКА
**БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ**

# О РЕАЛИЗАЦИИ ОДНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ КОНСТРУКЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ОПРЕДЕЛЕННОГО КЛАССА

СПАС МАНОЛОВ

Известно, что для решений автономных систем дифференциальных уравнений возможны только следующие три случая: несамопересекающиеся траектории, равновесие и периодические решения. Из-за интересных применений в механике, технике, биологии и т. д. заслуживает более специальное внимание третий случай. В [1] доказано существование периодических траекторий для одного класса автономных систем с малым параметром при наличий двух особенностей: нелинейные части системы полунечетны, по первой половине своих аргументов и собственные значения матрицы линейной части реализуют внутренние резонансы. Кроме того, также в [1] обоснован теоретически алгоритм для конструкции периодических решений системы и их периодов, причем существенно использованы отмеченные выше две особенности. В настоящей работе осуществляется реализация этого алгоритма, причем на различных этапах получены конкретные результаты: первое приближение периода как инварианта в определенном смысле, полная индукция для итерационного процесса и т. д. Отметим еще, что исследованные автономные системы описывают движение некоторых динамических систем, генераторы и т. д. Такие системы исследованы, например, в [2, 3, 4]. В цитированной диссертации [1] приведена и соответствующая библиография. В этой связи здесь отметим монографии [5, 6], а также работы [7, 8, 9].

1. Исследован класс автономных систем

$$\ddot{\psi}=C\psi+\varepsilon f(\varepsilon,\ \psi,\ \dot{\psi}), \tag{1.1}$$

где $\varepsilon$ — малый положительный параметр, $C=\|c_{ij}\|$ — вещественная матрица типа $n\times n$ со собственными значениями $-k_1^2<-k_2^2<\dots<-k_n^2$ и $\psi=\operatorname{col}(\psi_1\psi_2,\ \dots,\ \psi_n)$. Кроме того, $f(\varepsilon,\ \psi,\ \dot{\psi})$ — вектор с координатами $(j=1,\ 2,\dots,n)$

$$f_j(\varepsilon,\ \psi,\ \dot{\psi})=\sum_{\gamma=0}^{\infty}\varepsilon^{\gamma}g_{j\gamma}(\psi,\ \dot{\psi}), \tag{1.2}$$

где ряды в (1.2) сходятся в некоторой правой окрестности точки $\varepsilon=0$, $g_{j\nu}(\psi,\ \dot{\psi})$ аналитические функции своих аргументов $(\psi_1,\dots,\psi_n,\dot{\psi}_1,\dots,\dot{\psi}_n)$, удовлетворяющие условию $(j=1,\ 2,\dots,n;\ \nu=1,\ 2,\ 3,\dots)$

$$g_{j\nu}(-\psi_1,-\psi_2,\dots,-\psi_n,\dot{\psi}_1,\dot{\psi}_2,\dots,\dot{\psi}_n)=-g_{j\nu}(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_n,\dot{\psi}_1,\dot{\psi}_2,\dots,\dot{\psi}_n). \tag{1.3}$$

Пусть $(-1)k_s^2$ $(s=1,\ 2,\dots,s)$ есть какое-нибудь собственное значение матрицы $C$ и пусть $\lambda^{(s)}=\operatorname{col}(\lambda_{s1},\ \lambda_{s2},\dots,\ \lambda_{sn})$ соответствующий ему ненулевой собственный вектор.

*ПЛИСКА Български математически студии. Том 3, 1981, с. 75—87.*

Предполагаем еще выполнение равенств $k_\mu = k(\mu)\, k_n(k(\mu))$ целые $\geqq 2$, $\mu = 1, 2, \ldots, n-1$).

Решение $\psi_0^{(s)}(t) = \mathrm{col}\,(\psi_{01}^{(s)}(t), \psi_{02}^{(s)}(t), \ldots, \psi_{0n}^{(s)}(t)$ (системы (1.1) для $\varepsilon = 0$ при начальных условиях

$$\psi_0^{(s)}(0) = 0, \quad \dot{\psi}_0^{(s)}(0) = \lambda^{(s)} + \sum_{i=1}^{s-1} p_{si} N_i \lambda^{(i)} + \sum_{i=s+1}^{n} p_{si} N_i \lambda^{(i)}$$

выражается с помощью формулы

$$\psi_0^{(s)}(t) = \frac{\sin k(s) k_n t}{k(s) k_n} \lambda^{(s)} + \sum_{i=1}^{s-1} p_{si} N_i \frac{\sin k(i) k_n t}{k(i) k_n} \lambda^{(i)} + \sum_{i=s+1}^{n} p_{si} N_i \frac{\sin k(i) k_n t}{k(i) k_n} \lambda^{(i)}. \tag{1.4}$$

Здесь $p_{si}$ — вещественные коэффициенты, а $N_i$ ($i = 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n$) — параметры, на которые мы накладываем позже некоторые условия. Решение $\psi_0^{(s)}(t)$ из (1.4) периодично с периодом $2\pi/k_n$.

Теперь введем некоторые вспомогательные вектор-функции, а потом сформулируем теорему 1.

Вектор $a_0^{(1,s)}(t) = \mathrm{col}(a_{01}^{(1,s)}(t), \ldots, a_{0n}^{(1,s)}(t))$ есть решение при начальных условиях $a_0^{(1,s)}(0) = \dot{a}_0^{(1,s)}(0) = 0$ системы $\ddot{a}_0^{(1,s)} = C a_0^{(1,s)} + \mathrm{col}(g_{10}(\psi_0^{(s)}(t), \dot{\psi}_0^{(s)}(t)), \ldots, g_{n0}(\psi_0^{(s)}(t), \dot{\psi}_0^{(s)}(t)))$.

Вектор $a_j^{(2,s)}(t) = \mathrm{col}\,(a_{j1}^{(2,s)}(t), \ldots, a_{jn}^{(2,s)}(t))$, ($j = 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n$) есть решение при начальных условиях $a_j^{(2,s)}(0) = \dot{a}_j^{(2,s)}(0) = 0$ системы $\ddot{a}_j^{(2,s)} = C a_j^{(2,s)} + \mathrm{col}\,(g_{10}^*(t), g_{20}^*(t), \ldots, g_{n0}^*(t))$, где ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$)

$$g_{i0}^*(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_{i0}(\psi_0^{(s)}(t), \dot{\psi}_0^{(s)}(t))}{\partial \psi_k} a_{jk}^{(1,s)}(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_{i0}(\psi_0^{(s)}(t), \dot{\psi}_0^{(s)}(t))}{\partial \dot{\psi}_k} \dot{a}_{jk}^{(1,s)}(t).$$

Здесь через $a_{jk}^{(1,s)}(t)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) обозначены координаты вектора ($j = 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n$)

$$a_j^{(1,s)}(t) = \frac{p_{sj} \sin k(j) k_n t}{k(j) k_n} \lambda^{(j)}.$$

Собственные векторы $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(n)}$ линейно-независимы, так как они получены с помощью различных собственных значений матрицы $C$. Отсюда следует, что выражение

$$\varepsilon_{0s} \lambda_{s\nu} + \sum_{k=1}^{s-1} \varepsilon_{0k} p_{sk} N_k \lambda_{k\nu} + \sum_{k=s+1}^{n} \varepsilon_{0k} p_{sk} N_k \lambda_{k\nu} \tag{1.5}$$

отлично от нуля хотя бы для одного значения $r$ индекса $\nu = 1, 2, \ldots, n$. В (1.5) $\varepsilon_{0s} = +1$ при четном $k(s)$ и $\varepsilon_{0s} = -1$ при нечетном $k(s)$, но всегда $\varepsilon_{0n} = -1$. Аналогичным образом определением и $\varepsilon_{0i}$.

Теорема 1. *Пусть параметры* $N_1, N_2, \ldots, N_{s-1}, N_{s+1}, \ldots N_n$ *удовлетворяют системе*

$$(\varepsilon_{0s} \lambda_{sr} + \sum_{i=1}^{s-1} \varepsilon_{0i} p_{si} N_i \lambda_{ir} + \sum_{i=s+1}^{n} \varepsilon_{0i} p_{si} N_i \lambda_{ir}) a_{0u}^{(1,s)}(\pi/k_n) \tag{1.6}$$

$$- (\varepsilon_{0s} \lambda_{su} + \sum_{i=1}^{s-1} \varepsilon_{0i} p_{si} \lambda_{iu} + \sum_{i=s+1}^{n} \varepsilon_{0i} p_{si} N_i \lambda_{iu}) a_{0r}^{(1,s)}(\pi/k_n) = 0,$$

*а также и неравенству*

$$\det \| l_{uj} \| \neq 0, \tag{1.7}$$

*где* $(u=1,\ 2,\ldots,r-1,\ r+1,\ldots,n;\ j=1,\ 2,\ldots,s-1,\ s+1,\ldots,n)$

$$l_{uj}=\varepsilon_j p_{sj}\left(\lambda_{jr}a^{(1,s)}_{ou}(\pi/k_n)-\lambda_{ju}a^{(1,s)}_{0r}(\pi/k_n)\right)+\left(\varepsilon_{0s}\lambda_{sr}+\sum_{i=1}^{s-1}\varepsilon_{0i}p_{si}N_i\lambda_{ir}\right. \tag{1.8}$$
$$\left.+\sum_{i=s+1}^{n}\varepsilon_{0i}p_{si}N_i\lambda_{ir}\right)a^{(2,s)}_{ju}(\pi/k_n)-\left(\varepsilon_{0s}\lambda_{s\,u}+\sum_{i=1}^{s-1}\varepsilon_{0i}p_{si}N_i\lambda_{iu}+\sum_{i=s+1}^{n}\varepsilon_{0i}p_{si}N_i\lambda_{iu}\right)a^{(2,s)}_{jr}(\pi/k_i).$$

*Здесь* $\varepsilon_j=+1$ *или* $\varepsilon_j=-1$ *в зависимости от того, четно ли* $k(j)$ *или нечетно.*

*Тогда существуют функции* $\beta_1(\varepsilon),\ \beta_2(\varepsilon),\ldots,\beta_{s-1}(\varepsilon),\ \beta_{s+1}(\varepsilon),\ldots,\beta_n(\varepsilon)$ и $\delta(\varepsilon)$ *в окрестности точки* $\varepsilon=0$, *такие, что решение* $\psi^{(s)}(t)$ *системы* (1.1) *при начальных условиях*

$$\psi^{(s)}(0)=0,\ \dot{\psi}^{(s)}(0)=\lambda^{(s)}+\sum_{i=1}^{s-1}p_{si}(N_i+\beta_i(\varepsilon))\,.\,\lambda^{(i)}+\sum_{i=s+1}^{n}p_{si}(N_i+\beta_i(\varepsilon))\,.\,\lambda^{(i)} \tag{1.9}$$

*периодично с периодом* $2(\pi+\delta(\varepsilon))/k_n$. *Кроме того,* $\beta_1(0)=\beta_2(0=\ldots=\beta_{s-1}(0)=\beta_{s+1}(0)=\ldots=\beta_n(0)=0$.

Сформулированная теорема доказана в [1] для $s=1$, причем для подходяще выбранной системы применена основная теорема из анализа о существовании неявных функций.

2. Обозначим через

$$2(\pi+\delta(\varepsilon))/k_n=2\pi(1+\delta_1\varepsilon+\delta_2\varepsilon^2+\delta_3\varepsilon^3+\ldots)/k_n \tag{2.1}$$

представление периода по степеням малого параметра $\varepsilon$. После замены

$$t=\tau(1+\delta_1\varepsilon+\delta_2\varepsilon^2+\delta_3\varepsilon^3+\ldots) \tag{2.2}$$

из (1.1) получаем систему

$$\ddot{\Psi}=(1+\delta_1\varepsilon+\delta_2\varepsilon^2+\ldots)^2\,[C\Psi+\varepsilon f(\varepsilon,\ \Psi,\ (1+\delta_1\varepsilon+\delta_2\,\varepsilon^2+\ldots)^{-1}\,\dot{\Psi})]. \tag{2.3}$$

Обозначим через

$$\Psi^{(s)}(\tau,\ \varepsilon)=\mathrm{col}\,(\Psi^{(s)}_1(\tau,\ \varepsilon),\ \Psi^{(s)}_2(\tau,\ \varepsilon),\ldots,\ \Psi^{(s)}_n(\tau,\ \varepsilon)) \tag{2.4}$$

решение системы (2.3), которое соответствует решению $\psi^{(s)}(t)$ системы (1.1). Между этими двумя решениями существует связь

$$\Psi^{(s)}(\tau,\ \varepsilon)=\psi^{(s)}(\tau(1+\delta_1\varepsilon+\delta_2\varepsilon^2+\ldots),\ \psi^{(s)}(t)=\Psi^{(s)}\left(\frac{t}{1+\delta_1\varepsilon+\delta_2\varepsilon^2+\ldots},\ \varepsilon\right). \tag{2.5}$$

Решение $\Psi^{(s)}(\tau,\ \varepsilon)$ периодично с периодом $2\pi/k_n$. Действительно, используя (2.5) и (2.1), получаем

$$\Psi^{(s)}(\tau+2\pi/k_n,\ \varepsilon)=\psi^{(s)}\left(\tau(1+\delta_1\varepsilon+\delta_2\varepsilon^2+\ldots)+\frac{2\pi}{k_n}(1+\delta_1\varepsilon+\delta_2\varepsilon^2+\ldots)\right)$$
$$=\psi^{(s)}(\tau(1+\delta_1\varepsilon+\delta_2\varepsilon^2+\ldots))=\Psi^{(s)}(\tau,\ \varepsilon).$$

Пусть

$$\Psi^{(s)}_i(\tau,\ \varepsilon)=\Psi^{(s)}_{i0}(\tau)+\Psi^{(s)}_{i1}(\tau)\,.\,\varepsilon+\Psi^{(s)}_{i2}(\tau)\,.\,\varepsilon^2+\Psi^{(s)}_{i3}(\tau)\,.\,\varepsilon^3+\ldots \tag{2.6}$$

есть разложение по степеням $\varepsilon$ $i$-ой координаты ($i=1, 2, \ldots, n$) решения $\Psi^{(s)}(\tau, \varepsilon)$.

Основная проблема заключается в следующих вопросах:

1. Найти последовательные приближения

$$\Psi_{i0}^{(s)}(\tau),\ \Psi_{i1}^{(s)}(\tau),\ \Psi_{i2}^{(s)}(\tau), \ldots, \Psi_{im}^{(s)}(\tau), \ldots \tag{2.7}$$

$i$-ой координаты ($i=1, 2, \ldots, n$) решения $\Psi^{(s)}(\tau, \varepsilon)$.

2. Найти коэффициенты

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3, \ldots, \delta_m, \ldots \tag{2.8}$$

в развитии (2.1) периода.

Прежде чем перейти к реализации алгоритма из [1], чтобы решить проблему, сформулированную выше, остановимся на начальные условия для $\Psi^{(s)}(\tau, \varepsilon)$. Через первое равенство из (2.5) и первое равенство из (1.9) получаем

$$\Psi^{(s)}(0, \varepsilon)=0. \tag{2.9}$$

Отсюда следует, что все координаты $\Psi^{(s)}(\tau, \varepsilon)$ при $\tau=0$ равны нулю и согласно (2.6)

$$\Psi_{i0}^{(s)}(0)+\Psi_{i1}^{(s)}(0)\,.\,\varepsilon+\Psi_{i2}^{(s)}(0)\,.\,\varepsilon^2+\Psi_{i3}^{(s)}(0)\,.\,\varepsilon^3+\ \ldots\ =0. \tag{2.10}$$

Дифференцируя первое равенство из (2.5) и принимая во внимание второе равенство из (1.9), получаем

$$\dot\Psi^{(s)}(0, \varepsilon)=[\lambda^{(s)}+\sum_{k=1}^{s-1} p_{sk}(N_k+\beta_k(\varepsilon))\,.\,\lambda^{(k)}+\sum_{k=s+1}^{k} p_{sk}(N_k+\beta_k(\varepsilon))\,.\,\lambda^{(k)})] \tag{2.11}$$

$$\times(1+\delta_1\varepsilon+\delta_2\varepsilon^2+\delta_3\varepsilon^3+\ \ldots\ ),$$

где $\beta_k(\varepsilon)$, $k=1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n$, имеет развитие ($\beta_k(0)=0$)

$$\beta_k(\varepsilon)=\beta_{k1}\,.\,\varepsilon+\beta_{k2}\,.\,\varepsilon^2+\beta_{k3}\,.\,\varepsilon^3+\ \ldots \tag{2.12}$$

Следовательно, из (2.11), (2.4), (2.6) и (2.12) получаем ($i=1, 2, \ldots, n$)

$$\dot\Psi_{i0}^{(s)}(0)+\dot\Psi_{i1}^{(s)}(0)\,.\,\varepsilon+\dot\Psi_{i2}^{(s)}(0)\,.\,\varepsilon^2+\dot\Psi_{i3}^{(s)}(0)\,.\,\varepsilon^3+\ \ldots$$

$$=[\lambda_{si}+\sum_{k=1}^{s-1} p_{sk}(N_k+\beta_{k1}\varepsilon+\beta_{k2}\varepsilon^2+\beta_{k3}\varepsilon^3+\ \ldots\ )\,\lambda_{ki}+\sum_{k=s+1}^{n} p_{sk}(N_k \tag{2.13}$$

$$+\beta_{k1}\varepsilon+\beta_{k2}\varepsilon^2+\beta_{k3}\varepsilon^3+\ \ldots\ )](1+\delta_1\varepsilon+\delta_2\varepsilon^2+\delta_3\varepsilon^3+\ \ldots).$$

3. Определим нулевую аппроксимацию $\Psi_{i0}^{(s)}(\tau, \varepsilon)$ из (2.7) и первый коэффициент $\delta_1$ из (2.8).

Подставляя $\Psi^{(s)}(\tau, \varepsilon)$ в систему (2.3) и сравнивая свободные члены в полученном равенстве, т. е. коэффициенты перед $\varepsilon^0$, видно, что $\Psi_{i0}^{(s)}(\tau)$, ($i=1, 2, \ldots, n$) есть решение системы $\ddot\Psi=C\Psi$. С другой стороны, сравнивая коэффициенты перед $\varepsilon^0$ в обоих сторонах равенства (2.10) и равенства (2.13), получим

$$\Psi_{i0}^{(s)}(0)=0,\quad \dot\Psi_{i0}^{(s)}(0)=\psi_{0i}^{(s)}(0).$$

Следовательно, ($i=1,\ 2,\dots,\ n$)

$$\Psi_{i0}^{(s)}(\tau)=\psi_{0i}^{(s)}(\tau), \tag{3.1}$$

где $\psi_{0i}^{(s)}(\tau)$ — координаты вектора $\psi_0^{(s)}(\tau)$ из (1.4).

Теорема 2. *Коэффициент $\delta_1$ перед $\varepsilon^1$ в развитии периода выражается формулой* ($\nu=1,2,\dots,n$)

$$\delta_1=[-k_n a_{0\nu}^{(1,s)}(\pi/k_n)]/[\pi(\varepsilon_{0s}\lambda_{s\nu}+\sum_{k=1}^{s-1}\varepsilon_{0k}p_{sk}N_k\lambda_{k\nu}+\sum_{k=s+1}^{n}\varepsilon_{0k}p_{sk}N_k\lambda_{k\nu})] \tag{3.2}$$

*и этот коэффициент инвариантен относительно значений индекса $\nu$.*

Как было уже отмечено, хотя бы для одного значение $\nu$ (это значение было обозначено через $r$) знаменатель в (3.2) не равен нулю, и тогда правая сторона (3.2) имеет смысл. Допустим, что и для некоторого другого значения $u$ для $\nu$ ($u$ некоторое из чисел $1,\ 2,\dots,r-1,\ r+1,\dots,n$) знаменатель в (3.2) не равен нулю. Тогда, используя (1.6), установим, что дробь в правой стороне (3.2) имеет одинаковые значения при $\nu=r$ и $\nu=u$. Этим установленно, что если формула (3.2) справедлива, то $\delta_1$ инвариантно относительно $\nu$. Остается доказать формулу (3.2).

Подставляя решение $\Psi^{(s)}(\tau,\ \varepsilon)$ в систему (2.3) и сравнивая коэффициенты перед $\varepsilon^1$ в полученном равенстве, устанавливаем, что ($i=1,\ 2,\dots,n$) $\Psi_{i1}^{(s)}(\tau)$ есть решение системы

$$\ddot{\Psi}_i=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}\Psi_i+2\delta_1\sum_{k=1}^{n}c_{ik}\Psi_{k0}^{(s)}(\tau)+g_{i0}(\Psi_{10}^{(s)}(\tau),\dots,\ \Psi_{n0}^{(s)}(\tau),\ \dot{\Psi}_{10}^{(s)}(\tau),\dots,\ \dot{\Psi}_{n0}^{(s)}(\tau)). \tag{3.3}$$

Через (2.10) и (2.13) находим начальные условия

$$\Psi_{i1}^{(s)}(0)=0,\ \dot{\Psi}_{i1}^{(s)}(0)=\delta_1[\lambda_{si}+\sum_{k=1}^{s-1}p_{sk}N_k\lambda_{ki}+\sum_{k=s+1}^{n}p_{sk}N_k\lambda_{ki} \tag{3.4}$$
$$+\sum_{k=1}^{s-1}p_{sk}\beta_{k1}\lambda_{ki}+\sum_{k=s+1}^{n}p_{sk}\beta_{k1}\lambda_{ki}].$$

Лемма 1. *Если $\Psi_i(\tau)$ есть решение системы* (3.3), *то и* $(-1)\Psi_i(2\pi/k_n-\tau)$ *также есть решение этой же системы.*

Лемма вытекает непосредственно из (3.3), из формул для $\Psi_{i0}^{(s)}(\tau)$ и из условия (1.3), примененного для $\nu=0$.

Теорема 3. *Если некоторое решение системы* (3.3) *аннулируется при $\tau=0$ и $\tau=\pi/k_n$, то это решение периодично с периодом $2\pi/k_n$.*

Для доказательства теоремы используем лемму 1, следуя идее доказательства теоремы 1 из [1].

Применим теорему 3 к решению $\xi_1^{(s)}(\tau)=\mathrm{col}\,(\xi_{11}^{(s)}(\tau),\dots,\xi_{1n}^{(s)}(\tau))$ системы (3.3), при начальных условиях $\xi_{1i}^{(s)}(0)=\xi_{1i}^{(s)}(0)=0$, ($i=1,\ 2,\ 3,\dots,\ n$). Следовательно, если ($i=1,\ 2,\dots,\ n$)

$$\xi_{1i}^{(s)}(\pi/k_n)=0, \tag{3.5}$$

то решение $\xi_1^{(s)}(\tau)$ периодично с периодом $2\pi/k_n$. Тогда и решение $\Psi_{i1}^{(s)}(\tau)$, которое выражается через $\xi_1^{(s)}(\tau)$, будет периодическим с периодом $2\pi/k_n$. Из вида системы (3.3) ясно, что $\xi_1^{(s)}(\tau)$ есть сумма $a_0^{(1,s)}(\tau)$ и решения $\bar{\xi}_1^{(s)}(\tau)$ при нулевых начальных условиях системы

$$(3.6) \qquad \ddot{\Psi}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\Psi_j + 2\delta_1 \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\Psi_{j0}^{(s)}(\tau).$$

Следовательно, условие (3.5) принимает вид

$$(3.7) \qquad a_{0i}^{(1,s)}(\pi/k_n) + \bar{\xi}_{1i}^{(s)}(\pi/k_n) = 0, \quad (i=1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Обозначим $(i=1,\ 2, \ldots, n)$

$$(3.8) \qquad g_{i0}(u) = g_{i0}(\Psi_{10}^{(s)}(u), \ldots, \Psi_{n0}^{(s)}(u),\ \dot{\Psi}_{10}^{(s)}(u), \ldots,\ \dot{\Psi}_{n0}^{(s)}(u)).$$

Пусть $G_q(u)$ есть определить, который получаем из определителя

$$(3.9) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \ldots \lambda_{n1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \ldots \lambda_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \lambda_{3n} \ldots \lambda_{nn} \end{vmatrix},$$

заменой $q$-го столбца $(q=1,\ 2, \ldots, n)$ в (3.9) на вектор $\mathrm{col}\,(g_{10}(u), g_{20}(u), \ldots, g_{n0}(u)$. Тогда координаты $a_{0i}^{(1,s)}(\tau)$ вектора $a_0^{(1,s)}(\tau)$ выражаются формулами $(i=1,\ 2, \ldots, n;\ k(n)=1)$

$$(-1)a_{0i}^{(1,s)}(\tau) = \sum_{q=1}^{n} [\frac{\lambda_{qi}}{k(q)k_n \cdot \Delta} \int_0^{\tau} G_q(u) \sin k(q)k_n(u-\tau)du].$$

Аналогичным образом получаем и координаты $\bar{\xi}_{1i}^{(s)}\tau,\ (i,=1,\ 2, \ldots, n)$ решения $\bar{\xi}_1^{(s)}(\tau)$. Точнее обозначим теперь через $H_q(\tau)$ определитель, полученный заменой $q$-го столбца $(q=1,\ 2, \ldots, n)$ в $\Delta$ из (3.9) на столбец

$$\mathrm{col}\,(\sum_{j=1}^{n} c_{1j}\ \Psi_{j0}^{(s)}(\tau),\ \sum_{j=1}^{n} c_{2j}\ \Psi_{j0}^{(s)}(\tau), \ldots,\ \sum_{j=1}^{n} c_{nj}\ \Psi_{j0}^{(s)}(\tau)).$$

Тогда $(i=1,\ 2, \ldots, n;\ k(n)=1)$

$$(-1)\bar{\xi}_{1i}^{(s)}(\tau) = 2\delta_1 \sum_{q=1}^{n} [\frac{\lambda_{qi}}{k(q)k_n \cdot \Delta} \int_0^{\tau} H_q(u) \sin k(q)k_n u\, du].$$

Из последнего равенства вытекает формула $(i=1,\ 2, \ldots, n)$

$$(-1)\bar{\xi}_{1i}^{(s)}(\frac{\pi}{k_n}) = 2\delta_1 \sum_{q=1}^{n} [\frac{\varepsilon_{0q}\lambda_{qi}}{k(q)k_n\Delta} \cdot \int_0^{\pi/k_n} H_q(u) \sin k(q)k_n u du],$$

где $\varepsilon_{0q} = (-1)^{k(q)}$, но всегда $\varepsilon_{0n} = -1$.

Пусть $A_{q1}, A_{q2}, \ldots, A_{qn}$ алгебраические дополнения элементов $q$-ого столбца определителя $\Delta$. Тогда $(q=1,\ 2, \ldots,\ n)$

$$H_q(u) = \sum_{k=1}^{n} (c_{1k}A_{q1} + c_{2k}A_{q2} + \ldots + c_{nk}A_{qk})\Psi_{k0}^{(s)}(u)$$

и, следовательно,

$$H_q(u)\sin k(q)k_n(u)=\sum_{k=1}^{n}\{(c_{1k}A_{q1}+c_{2k}A_{q2}+\ldots+c_{nk}A_{qk})\sin k(q)k_n u$$

$$\times[\frac{\sin k(s)k_n u}{k(s)k_n}\lambda_{sk}+\sum_{m=1}^{s-1}\frac{p_{sm}N_m\sin k(m)k_n u}{k(m)k_n}+\sum_{m=s+1}^{n}\frac{p_{sm}N_m\sin k(m)k_n u}{k(m)k_n}\lambda_{mk}]\}.$$

Используя последнее равенство и равенство ($\mu,\ \nu=1,\ 2,\ldots,n$)

$$\int_0^{\pi/k_n}\sin k(\mu)k_n u\,.\sin k(\nu)k_n u\,.du=\begin{cases}0, & \mu\neq\nu;\\ \pi/2k_n, & \mu=\nu,\end{cases}$$

получаем ($s$-некоторое из чисел $1,\ 2,\ldots,n$)

$$\int_0^{\pi/k_n}H_q(u)\sin k(q)k_n u\,.du$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2k(q)k_n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(c_{1k}A_{q1}+c_{2k}A_{q2}+\ldots+c_{nk}A_{qn})\lambda_{qk}, & (q=s);\\ \dfrac{\pi}{2k(q)k_n^2}[\sum\limits_{k=1}^{n}(c_{1k}A_{q1}+c_{2k}A_{q2}+\ldots+c_{nk}A_{qn})\lambda_{qk}]p_{sq}N_q & (q=1,2,\ldots,s-1,s+1,\ldots,n).\end{cases}$$

Используя последний результат, подсчитываем $(-1)\bar{\xi}_{1i}^{(s)}(\pi/k_n)$, ($i=1,\ 2,\ldots,n$). Получаем

$$(3.10)\quad(-1)\bar{\xi}_{1i}^{(s)}(\frac{\pi}{k_n})=\frac{\pi\delta_1}{k_n^3.\varDelta}\{\sum_{q=1}^{s-1}[\frac{\varepsilon_{cq}\lambda_{ri}}{k^2(q)}p_{sq}N_q\sum_{k=1}^{n}(c_{1k}A_{q1}+c_{2k}A_{q2}+\ldots+c_{nk}A_{qn})\lambda_{qk}]$$

$$+\frac{\varepsilon_{0s}\lambda_{si}}{k^2(s)}.\sum_{k=1}^{n}(c_{1k}A_{s1}+c_{2k}A_{s2}+\ldots+c_{nk}A_{sn})\lambda_{sk}$$

$$+\sum_{q=s+1}^{n}[\frac{\varepsilon_{0\sim}\lambda_{qi}}{k^2(q)}p_{sq}N_q\sum_{k=1}^{n}(c_{1k}A_{q1}+c_{2k}A_{q2}+\ldots+c_{nk}A_{qn})\lambda_{qk}]\}.$$

Докажем равенства ($q=1,\ 2,\ldots,n$)

$$(3.11)\qquad\sum_{k=1}^{n}(c_{1k}A_{q1}+c_{2k}A_{q2}+\ldots+c_{nk}A_{qn})\lambda_{qk}=-k_n^2\varDelta k^2(q).$$

Поскольку $(-1)k_q^2=-k^2(q)k_n^2$ ($q=1,\ 2,\ldots,n$; $k(n)=1$) есть собственное значение матрицы $C=\|c_{ij}\|$ и $\lambda^{(q)}=\mathrm{col}\,(\lambda_{q1},\ \lambda_{q2},\ldots,\lambda_{qn})$ есть соответствующий ненулевой собственный вектор, то

$$(3.12)\qquad\begin{aligned}&(c_{11}+k^2(q)k_n^2)\lambda_{q1}+c_{12}\lambda_{q2}+\ldots+c_{1n}\lambda_{qn}=0,\\&c_{21}\lambda_{q1}+(c_{22}+k^2(q)k^2{}_n)\lambda_{q2}+\ldots+c_{2n}\lambda_{qn}=0\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&c_{n1}\lambda_{q1}+c_{n2}\lambda_{q2}+\ldots+(c_{nn}+k^2(q)k_n^2)\lambda_{qn}=0.\end{aligned}$$

Принимая во внимание последние равенства (3.12), для левой стороны равенства (3.11) получаем

$$\sum_{k=1}^{n}(c_{1k}A_{q1}+c_{2k}A_{q2}+\ldots+c_{nk}A_{qn})\lambda_{qk}=\sum_{p=1}^{n}(c_{p1}\lambda_{q1}+c_{p2}\lambda_{q2}+\ldots+c_{pn}\lambda_{qn})A_{qp}$$

$$=-k^2(q)k_n^2(\lambda_{q1}A_{q1}+\lambda_{q2}A_{q2}+\cdots+\lambda_{qn}A_{qn})=-k^2(q)k_n^2.\Delta.$$

Этим доказано равенство (3.11). Используя этот результат, из (3.10) получим ($i=1, 2, \ldots, n$)

$$\xi_{1i}^{(s)}\left(\frac{\pi}{k_n}\right)=\frac{\pi\delta_1}{k_n}\left(\varepsilon_{0s}\lambda_{si}+\sum_{q=1}^{s-1}\varepsilon_{0q}p_{sq}N_q\lambda_{qi}+\sum_{q=s+1}^{n}\varepsilon_{0q}p_{sq}N_q\lambda_{qi}\right).$$

Подставляя $\xi_{1i}^{(s)}(\pi/k_n)$ из последнего равенства в равенство (3.7), получим формулу (3.2) для $\delta_1$. Этим доказана теорма 2.

В качестве дополнения мы получим определенные результаты и для аппроксимации $\Psi_{i1}^{(s)}(\tau)$ Так как она есть решение системы (3.3) и в начальный момент, согласно первому из равенств (3.4), имеет нулевое значение, то ($i=1, 2, \ldots, n$)

$$\Psi_{i1}^{(s)}(\tau)=\sum_{p=1}^{n}[D_{1p}^{(s)}\sin k(p)k_n\tau\,.\,\lambda_{pi}]+\xi_{1i}^{(s)}(\tau). \tag{3.13}$$

Используя следующие из равенств (3.4), а также и последнее равенство (3.13), получим линейную относительно $D_{11}^{(s)}, D_{12}^{(s)}, \ldots, D_{1n}^{(s)}$ систему ($i=1, 2, \ldots, n$)

$$\sum_{p=1}^{n}k(p)k_n\lambda_{pi}D_{1p}^{(s)}=\delta_1\left[\lambda_{si}+\sum_{k=1}^{s-1}p_{sk}(N_k+\beta_{k1})\lambda_{ki}+\sum_{k=s+1}^{n}p_{sk}(N_k+\beta_{k1})\lambda_{ki}\right].$$

Из последней системы для коэффициента $D_{1s}^{(s)}$ получаем

$$D_{1s}^{(s)}=\delta_1/k(s)k_n.$$

Для полного определения $\Psi_{i1}^{(s)}(\tau)$ из (3.13) необходимо найти коэффициенты $D_{11}^{(s)}, D_{12}^{(s)}, \ldots, D_{1,s-1}^{(s)}, D_{1,s+1}^{(s)}, \ldots, D_{1n}^{(s)}$. Это определение, вместе с нахождением $\delta_2$, составляет следующий шаг алгоритма из [1].

**4.** Пусть $m$ есть какое-то целое число $\geqq 1$. Допустим, что аппроксимации $\Psi_{i0}^{(s)}(\tau), \Psi_{i1}^{(s)}(\tau), \ldots, \Psi_{i,m-1}^{(s)}(\tau)$ определены, как и коэффициенты $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$.

После подстановки решения $\Psi^{(s)}(\tau, \varepsilon)$ в систему (2.3) и сравнение коэффициентов перед $\varepsilon^m$ в обоих сторонах полученного равенства, получим систему дифференциальных уравнений для $\Psi_{i,m}^{(s)}(\tau)$. Предположим, что эта система линейна и неоднородна, причем однородная часть есть $\ddot{\Psi}=C\Psi$. Учитывая начальные данные $\Psi_{i,m}^{(s)}(0)=0$, полученные с помощью (2.10), из сказанного выше вытекает формула

$$\Psi_{i,m}^{(s)}(\tau)=\sum_{p=1}^{n}[D_{mp}^{(s)}\sin k(p)k_n\tau\,.\,\lambda_{pi}]+\xi_{m,i}^{(s)}(\tau), \tag{4.1}$$

где $\xi_{m,i}^{(s)}(\tau)$ ($i=1, 2, \ldots, n$) — $i$-ая координата того частного решения системы для $\Psi_{i,m}^{(s)}(\tau)$, которое получаем при начальных условиях $\xi_{m,i}^{(s)}(0)=\dot{\xi}_{m,i}^{(s)}(0)=0$. Предполагая, что система для $\Psi_{i,m}^{(s)}$ известна, то можно считать, что решение $\xi_{m,i}^{(s)}(\tau)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ известно. Для нахождения (4.1) остается определить коэффициенты $D_{mp}^{(s)}$ $(p=1, 2, \ldots, n)$.

После сравнения коэффициентов перед $\varepsilon^m$ в обеих сторонах равенства (2.13) получим равенства $(i=1, 2, \ldots, n)$

$$
\dot{\Psi}_{i,m}^{(s)}(0)=[\lambda_{si}+\sum_{k=1}^{s-1} p_{sk}N_k\lambda_{ki}+\sum_{k=s+1}^{n} p_{sk}N_k\lambda_{ki}]\delta_m
+\sum_{k=1}^{s-1} p_{sk}\lambda_{ki}(\beta_{ki}\delta_{m-1}+\beta_{k2}\delta_{m-2}+\cdots+\beta_{k,m-1}\delta_1+\beta_{km})
+\sum_{k=s+1}^{n} p_{sk}\lambda_{ki}(\beta_{k1}\delta_{m-1}+\beta_{k2}\delta_{m-2}+\cdots+\beta_{k,m-1}\delta_1+\beta_{km}). \tag{4.2}
$$

Используя (4.2) и (4.1), находим формулу

$$
D_{m,s}^{(s)}=\delta_m/k(s)k_n.
$$

Остается определить коэффициенты $D_{m1}^{(s)}, D_{m2}^{(s)}, \ldots, D_{m,s-1}^{(s)}, D_{m,s+1}^{(s)}, \ldots, D_{mn}^{(s)}$, а также и $\delta_{m+1}$.

При $m=1$ предположения и формулы с начала до настоящего момента выполнены, согласно предыдущему третьему параграфу.

Подставляем решение $\Psi^{(s)}(\tau, \varepsilon)$ в систему (2.3) и сравняем коэффициенты перед $\varepsilon^{m+1}$ в обоих сторонах полученного равенства. Так для $\Psi_{i,m+1}^{(s)}(\tau)$ получаем систему $(i=1, 2, \ldots, n)$

$$
\ddot{\Psi}_i=\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\Psi_k+2\delta_{m+1}\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\Psi_{k0}^{(s)}(\tau)
+(\delta_m\delta_1+\delta_{m-1}\delta_2+\cdots+\delta_2\delta_{m-1}+\delta_1\delta_m)\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\Psi_{k0}^{(s)}(\tau)+2\delta_1\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\Psi_{km}^{(s)}(\tau)
+c_m\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\Psi_{k1}^{(s)}(\tau)+c_{m-1}\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\Psi_{k2}^{(s)}(\tau)+\cdots+c_2\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\Psi_{k,m-1}^{(s)}(\tau),
+c_m p_{i0}^{(0)}(\tau)+c_{m-1}p_{i1}^{(0)}(\tau)+c_{m-2}p_{i2}^{(0)}(\tau)+\cdots+c_1 p_{i,m-1}^{(0)}(\tau)+c_0 p_{i,m}^{(0)}(\tau)
+c_{m-1}p_{i0}^{(1)}(\tau)+c_{m-2}p_{i1}^{(1)}(\tau)+c_{m-3}p_{i2}^{(1)}(\tau)+\cdots+c_0 p_{i,m-1}^{(1)}(\tau)
+\cdots+c_1 p_{i0}^{(m-1)}(\tau)+c_0 p_{i1}^{(m-1)}(\tau)+c_0 p_{i0}^{(m)}(\tau). \tag{4.3}
$$

Здесь введены обозначения:

а) $c_u (u=0, 1, 2, \ldots, m)$ — коэффициент перед $\varepsilon^u$ в разложении по степеням малого параметра $\varepsilon$ для $(1+\delta_1\varepsilon+\delta_2\varepsilon^2+\cdots)^2$;

б) $p_{iu}^{(\nu)}(\tau)$ $(u=0, 1, 2, \ldots, m)$; $\nu=0, 1, 2, \ldots, m)$ — есть коэффициент перед $\varepsilon^u$ в разложении по степеням малого параметра $\varepsilon$ для функции

$$
g_{i\nu}(\tau, \varepsilon)=g_{i\nu}(A_1(\tau, \varepsilon), \ldots, A_n(\tau, \varepsilon), B_1(\tau, \varepsilon), \ldots, B_n(\tau, \varepsilon)),
$$

где $(k=1, 2, \ldots, n)$

$$
A_k(\tau, \varepsilon)=\Psi_{k0}^{(k)}(\tau)+\Psi_{k1}^{(s)}(\tau)\,\varepsilon+\Psi_{k2}^{(s)}(\tau)\varepsilon^2+\cdots,
$$

$$B_k(\tau,\ \varepsilon)=[\dot\Psi^{(s)}_{k0}(\tau)+\dot\Psi^{(s)}_{k1}(\tau)\varepsilon+\dot\Psi^{(s)}_{k2}(\tau)\varepsilon^2+\cdots]/[1+\delta_1\varepsilon+\delta_2\varepsilon^2+\delta_3\varepsilon^3+\cdots].$$

Исследуя и трансформируя систему (4.3), получаем систему

$$\ddot\Psi_i=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}\Psi_k+2\delta_{m+1}\sum_{k=1}^{n}c_{ik}\Psi^{(s)}_{k0}(\tau) \tag{4.4}$$

$$-2\delta_1\sum_{p=1}^{s-1}k^2(p)k_n^2\lambda_{pi}\sin k(p)k_n\tau\,.\,D^{(s)}_{mp}-2\delta_1\sum_{v=s+1}^{n}k^2(p)\,k_n^2\lambda_{pi}\sin k(p)k_n\tau\,.\,D^{(s)}_{mp}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}[\frac{\partial g_{i0}(\psi_0^{(s)}(\tau),\ \dot\psi_0^{(s)}(\tau))}{\partial\psi_k}\Big(\sum_{p=1}^{s-1}D^{(s)}_{mp}\frac{k(p)k_n}{p_{sp}}\,a^{(1,s)}_{pk}(\tau)+\sum_{p=s+1}^{n}D^{(s)}_{mp}\frac{k(p)k_n}{p_{sp}}a^{(1,s)}_{pk}(\tau))]$$

$$+\sum_{k=1}^{n}[\frac{\partial g_{i0}(\psi_0^{(s)}(\tau),\ \dot\psi_0^{(s)}(\tau))}{\partial\dot\psi_k}(\sum_{p=1}^{s-1}D^{(s)}_{mp}\frac{k(p)k_n}{p_{sp}}\dot a^{(1,s)}_{pk}(\tau)+\sum_{p=s+1}^{n}D^{(s)}_{mp}\frac{k(p)k_n}{p_{sp}}\dot a^{(1,s)}_{pk}(\tau))]+\Phi^{(s)}_{i,m+1}(\tau),$$

где

$$\Phi^{(s)}_{i,m+1}(\tau)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_{i0}(\psi_0^{(s)}(\tau),\ \dot\psi_0^{(s)}(\tau))}{\partial\psi_k}\ (\frac{\delta_m}{k(s)k_n}\sin k(s)k_n\tau\,.\,\lambda_{sk}+\xi^{(s)}_{mk}(\tau))$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_{i0}(\psi_0^{(s)}(\tau),\ \dot\psi_0^{(s)}(\tau)}{\partial\dot\psi_k}(\delta_m\cos k(s)k_n\tau\,.\,\lambda_{sk}+\dot\xi^{(s)}_{mk}(\tau))+\bar\Phi^{(s)}_{i,m+1}(\tau).$$

Здесь последнее слагаемое $\bar\Phi^{(s)}_{i,m+1}(\tau)$ — вполне определенная функция от $\tau$, которая выражается через известные величины

$$\delta_1,\ \delta_2,\ldots,\delta_m,\ \Psi^{(s)}_{k0}(\tau),\ \Psi^{(s)}_{k1}(\tau),\ldots,\ \Psi^{(s)}_{k,m-1}(\tau),\ \xi^{(s)}_{m,k}(\tau).$$

Лемма 2. *Если $\Psi_i(\tau)$ есть решение системы* (4.4), *то* $(-1)\Psi_i(\frac{2\pi}{k_n}-\tau)$ *также есть решение этой системы.*

Доказательство леммы 2 проводим путем анализа правой стороны системы (4.4) и точнее после нахождения некоторых свойств функции $\bar\Phi^{(s)}_{i,m+1}(\tau)$.

Теорема 4. *Если некоторое решение системы* (4.4) *аннулируется при $\tau=0$ и $\tau=\pi/k_n$, то это решение периодично с периодом $2\pi/k_n$.*

Последнюю теорему доказываем с помощью леммы 2, следуя идее доказательства первой теоремы из [1].

Так как, согласно (2.10), $\Psi^{(s)}_{i,m+1}(0)=0$ $(i=1,\ 2,\ldots,n)$, то

$$\Psi^{(s)}_{i,m+1}(\tau)=\sum_{p=1}^{n}D^{(s)}_{m+1,p}\,.\sin k(p)k_n\tau\,.\,\lambda_{pi}+\xi^{(s)}_{m+1,i}(\tau),$$

где $\xi^{(s)}_{m+1,i}(\tau)$ $(i=1,\ 2,\ldots,n)$ есть $i$-ая координата этого решения системы (4.4), которая соответствует начальным условиям

$$\xi^{(s)}_{m+1,i}(0)=\dot\xi^{(s)}_{m+1,i}(0)=0.$$

Применяя теорему 4 к решению $\xi^{(s)}_{m+1,i}(\tau)$, получим условия

$$\xi^{(s)}_{m+1,i}(\pi/k_n)=0,\ (i=1,\ 2,\ldots,n). \tag{4.5}$$

Принимая во внимание отдельные слагаемые в правой части системы (4.4), с помощью соответствующих интегральных представлений, из (4.5) получим систему

$$(4.6)\qquad \frac{\pi}{k_n}\,(\varepsilon_{0s}\lambda_{si}+\sum_{q=1}^{s-1}\varepsilon_{0q}p_{sq}N_q\lambda_{qi}+\sum_{q=s+1}^{n}\varepsilon_{0q}p_{sq}N_q\lambda_{qi})\delta_{m+1}$$

$$+\sum_{q=1}^{s-1}k(q)[\varepsilon_q\pi\lambda_{qi}\delta_1+\frac{k_n}{p_{sq}}a_{qi}^{(2,s)}(\frac{\pi}{k_n})]\,D_{mq}^{(s)}$$

$$+\sum_{q=s+1}^{n}k(q)[\varepsilon_q\pi\lambda_{qi}\delta_1+\frac{k_n}{p_{sq}}a_{qi}^{(2,s)}(\frac{\pi}{k_n})]\,D_{mp}^{(s)}=-\mu_{m+1,i}^{(s)}(\frac{\pi}{k_n}),$$

где $\mu_{m+1,i}^{(s)}(\tau)(i=1,2,\ldots,n)$есть решение при нулевых начальных условиях системы

$$\ddot{\Psi}_i=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}\Psi_k+\Phi_{i,m+1}^{(s)}(\tau),$$

В системе (4.6) неизвестными остаются $\delta_{m+1}$ и $D_{mq}^{(s)}\,(q=1,\ 2,\ldots,s-1$ $s+1,\ldots,n)$.

Теорема 5. *Линейная система* (4.6) *имеет ненулевой определитель и, следовательно, коэффициенты* $\delta_{m+1}$, $D_{m1}^{(s)}$, $D_{m2}^{(s)},\ldots,D_{m,s-1}^{(s)}$, $D_{m,s+1}^{(s)},\ldots,D_{mn}^{(s)}$ *определяются из этой системы однозначно.*

Обозначим через $E_\nu^{(s)}(\nu=1,2,\ldots,n)$ выражение из (1.5). Как уже известно, существует значение $r$ индекса $\nu$, для которого $E_r^{(s)}\neq 0$. Кроме того, согласно (3.2),

$$\delta_1=-k_na_{0\nu}^{(1,s)}(\frac{\pi}{k_n})/\pi\,.\,E_\nu^{(s)}$$

всегда, когда $E_\nu^{(s)}$ не равно нулю.

Обозначим через $A$ определитель системы (4.6). Тогда

$$(4.7)\qquad A=\frac{\pi}{k_n}k(1)k(2)\ldots k(s-1)k(s+1)\ldots k(n)B,$$

где через $B$ обозначен определитель

$$B=\begin{vmatrix} E_1^{(s)} & b_{11}\ldots b_{1,s-1} & b_{1,s+1}\ldots b_{1n}\\ E_2^{(s)} & b_{21}\ldots b_{2,s-1} & b_{2,s+1}\ldots b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ E_r^{(s)} & b_{r1}\ldots b_{r,s-1} & b_{r,s+1}\ldots b_{rn}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ E_n^{(s)} & b_{n1}\ldots b_{n,s-1} & b_{n,s+1}\ldots b_{nn}\end{vmatrix}.$$

Здесь введены обозначения $(q=1,\ 3,\ldots,r,\ldots,\ n)$; $(j=1,\ 2,\ldots,s-1,\ s+1,\ \ldots,n)$:

$$b_{qj}=\varepsilon_j\pi\lambda_{jq}\delta_1+\frac{k_n}{p_{sj}}\;a_{jq}^{(2,s)}(\frac{\pi}{k_n}).$$

В любой строке $B$, за исключением $r$-ой, заменяем $\delta_1$ в $b_{qj}$ выражениями из (4.7), но при $\nu=r$. Следовательно,

$$B=D/[(E_r^{(s)})^{n-1}k_n^{n-1}p_{s1}p_{s2}\dots p_{s,s-1}p_{s,s+1}\dots p_{sn}],$$

где

$$D=\begin{vmatrix} E_1^{(s)}E_r^{(s)} & d_{11} & \dots d_{1,s-1} & d_{1,s+1} & \dots d_{1n} \\ E_2^{(s)}E_r^{(s)} & d_{21} & \dots d_{2,s-1} & d_{2,s+1} & \dots d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{r-1}^{(s)}E_r^{(s)} & d_{r-1,1} & \dots d_{r-1,s-1} & d_{r-1,s+1} & \dots d_{r-1,n} \\ E_r^{(s)} & d_{r1}^* & \dots d_{r,s-1}^* & d_{r,s+1}^* & \dots d_{rn}^* \\ E_{r+1}^{(s)}E_r^{(s)} & d_{r+1,1} & \dots d_{r+1,s-1} & d_{r+1,s+1} & \dots d_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_n^{(s)}E_r^{(s)} & d_{n1} & \dots d_{n,s-1} & d_{n,s+1} & \dots d_{nn} \end{vmatrix}$$

Здесь введены обозначения

$$d_{uj}=E_r^{(s)}a_{ju}^{(2,s)}(\pi/k_n)-\varepsilon_j p_{sj}\lambda_{ju}a_{0r}^{(1,s)}(\pi/k_n),$$

$$d_{rj}^*=\frac{\pi\varepsilon_j\lambda_{jr}}{k_n}\delta_1 p_{sj}+a_{jr}^{(2,s)}\left(\frac{\pi}{k_n}\right)(u=1,\ 2,\dots,r-1,\ r+1,\dots,n;\ j=1,\ 2,\dots,s-1,$$
$$s+1,\dots,n)$$

В $r$-ой строке $D$ заменяем $\delta_1$ выражениями из (4.7), выбирая $\nu=u$, и полученную строку добавляем к $u$-ой строке $D$. Здесь $u$ меняется и принимает последовательные значения $1, 2,\dots,r-1,\ r+1,\dots,n$. Следовательно, $D$ принимает вид

$$D=\begin{vmatrix} 0 & e_{11} & \dots e_{1,s-1} & e_{1,s+1} & \dots e_{1n} \\ 0 & e_{21} & \dots e_{2,s-1} & e_{2,s+1} & \dots e_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & e_{r-1,1} & \dots e_{r-1,s-1} & e_{r-1,s+1} & \dots e_{r-1,n} \\ E_r^{(s)} & d_{r1}^* & \dots d_{r,s-1}^* & d_{r,s+1}^* & \dots d_{rn}^* \\ 0 & e_{r+1,1} & \dots e_{r+1,s-1} & e_{r+1,s+1} & \dots e_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & e_{n1} & \dots e_{n,s-1} & e_{n,s+1} & \dots e_{nn} \end{vmatrix},$$

где $(u=1,\ 2,\dots,r-1,\ r+1,\dots,n;\ j=1,\ 2,\dots,s-1,\ s+1,\dots,n)$

(4.8) $$e_{uj}=\varepsilon_j v_{sj}(\lambda_{jr}a_{0u}^{(1,s)}(\pi/k_n)-\lambda_{ju}a_{0r}^{(1,s)}(\pi/k_n))+E_r^{(s)}a_{ju}^{(2,s)}(\pi/k_n)-E_u^{(s)}a_{jr}^{(2,s)}(\pi/k_n).$$

Из (4.8) и (1.8) видно, что $e_{uj}=l_{uj}$. Следовательно,

(4.9) $$D=(-1)^{r-1}E_r^{(s)}.\det\|l_{uj}\|.$$

Так как $E_\nu^{(s)}$ не аннулируется при $\nu=r$ и поскольку, согласно (1.7), $\det\|l_{uj}\| \neq 0$, из (4.9) следует, что $D\neq 0$. Этим доказана теорема 5.

## ЛИТЕРАТУРА


1. С. Манолов. Существование и итерация множеств автономных систем дифференциальных уравнений с малым параметром для совокупностей начальных условий с резонансом при полунечетных нелинейностях определенного класса. Докторская диссертация, София, 1974.
2. G. Bradistilov. Über periodische und asymptotische Lösungen beim *n*-fachen Pendel in der Ebene. *Math. Ann.*, **116**, 1938, 181—203.
3. S. Manolov. A special case of the existence of small periodic motions of two penduli, subjected to uniform rotation, *J. Appl. Math. Mech.*, **22**, 1958, 192—197.
4. Маунг Таунг Мийнт. Съществуване и конструкция на резонансни периодични решения на класи от автономни системи от диференциални уравнения с малък параметър при полунечетни полиномни нелинейности. Дисертация, София. 1972.
5. J. K. Hale. Oscilations in nonlinear systems. New York, 1963.
6. Е. А. Барбашин, В. А. Табуева. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством, Москва, 1969.
7. Г. Брадистилов. Върху периодични движения на двойно махало, лежащо във вертикална равнина при кратни корени на характеристичното уравнение. *Годишник МЕИ*, **2**, кн. 1, 1956, 1—13.
8. S. Manolov. Sur une classe de systèmes autonomes des équations différentielles, liés avec un ensemble de polynômes d'une forme donnée. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **24**, 1971, 423—425.
9. L. Cesari, J. K. Hale. A new sufficient condition for periodic solutions of weakly nonlinear differential systems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8, 1957, 757—764.


*Высший машинно-электротехнический институт*
*1000 София*

*Поступила 11. 2. 1977*