PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

СУПЕРТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И РАСШИРЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

ДОЙЧИН Б. ДОЙЧИНОВ

Понятие супертопологического пространства, объединяющее понятия топологического, близостного и равномерного пространств, было введено в [2] под наименованием обобщенного топологического пространства. Здесь напоминается его определение, после чего это понятие используется для описания двух классов расширений топологических пространств — класса локально бикомпактных и класса локально бикомпактных паракомпактных расширений данного вполне регулярного пространства.

Разработка вопросов, включенных в п. 2, сделана совместно с Г. Димовым.

1. Супертопологические пространства. 1.1. Понятие супертопологического пространства является некоторым вполне естественным обобщением понятия топологического пространства, рассматриваемого вместе с его классической, исторически первой, аксиоматикой Хаусдорфа.

Пусть X — множество и пусть $\mathscr{P}(X)$ — множество всех его подмножеств, а $\mathscr{I}(X)$ — множество всех одноточечных его подмножеств. Мы говорим, что X — *супертопологическое пространство,* или что на X дана некоторая *супертопология* $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$, если даны множество $\mathscr{M}$, такое, что $\mathscr{I}(X)\subset\mathscr{M}\subset\mathscr{P}(X)$, и оператор $\mathscr{V}:\mathscr{M}\to\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$, ставящий в соответствие каждому $A\in\mathscr{M}$ некоторый фильтр $\mathscr{V}(A)$ в X. (В случае, когда пустое множество $\varnothing$ принадлежит $\mathscr{M}$, разрешается, чтобы $\varnothing\in\mathscr{V}(\varnothing)$, т. е. при сохранении остальных условий фильтра для $\mathscr{V}(\varnothing)$ отпадает требование $\varnothing\notin\mathscr{V}(\varnothing)$. Иначе говоря, возможно иметь $\mathscr{V}(\varnothing)=\mathscr{P}(X)$.) Элементы этого фильтра назовем $\mathscr{V}$-окрестностями множества A. Притом предполагается, что выполняются следующие условия:

1) если $A\in\mathscr{M}$ и $U\in\mathscr{V}(A)$, то $A\subset U$;

2) если $A\in\mathscr{M}$ и $U\in\mathscr{V}(A)$, то существует такое $V\in\mathscr{V}(A)$, что $U\in\mathscr{V}(B)$ для любого $B\in\mathscr{M}$, $B\subset V$.

В случае, когда $\mathscr{M}=\mathscr{I}(X)$ (в этом случае можно просто отождествить $\mathscr{M}$ с X), понятие супертопологического пространства совпадает, очевидно, с обычным понятием топологического пространства, так как тогда вышеуказанные два условия не что иное, как аксиомы Хаусдорфа для топологических пространств в их формулировке, данной Бурбаки.

С другой стороны, ввиду включения $\mathscr{I}(X)\subset\mathscr{M}$, всякая супертопология $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$ на X индуцирует некоторую обычную топологию на X. Когда X — данное топологическое пространство, будем говорить тоже, что некоторая супертопология $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$ на X согласована с его топологией, если она эту топологию индуцирует.

Данная супертопология $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$ на X называется ***симметрической***, если выполнено следующее условие:

s) если $A, B \in \mathscr{M}$ и $A \cap V \neq \varnothing$ для любого $V \in \mathscr{V}(B)$, то $B \cap U \neq \varnothing$ для любого $U \in \mathscr{V}(A)$.

Нетрудно убедиться, что понятие симметрического супертопологического пространства в случае $\mathscr{M} = \mathscr{P}(X)$ совпадает по существу с понятием пространства близости. В самом деле, если $(\mathscr{P}(X), \mathscr{V})$ — симметрическая супертопология на X и если будем считать, что A близко к B тогда и только тогда когда, $U \cap B \neq \varnothing$ для любого $\mathscr{U} \in \mathscr{V}(A)$, то оказывается, что это соотношение близости превращает X в пространство близости. Наоборот, любая близость на X (в смысле пространства близости) можно определить именно таким образом.

Отметим некоторые простейшие свойства супертопологических пространств. Пусть $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$ — некоторая супертопология на множестве X, которое будем рассматривать не только как супертопологическое, но и как топологическое (с индуцированной топологией) пространство. Тогда:

если $A, B \in \mathscr{M}$ и $B \subset A$, то $\mathscr{V}(A) \subset \mathscr{V}(B)$;

если $A_i \in \mathscr{M}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ и $\bigcap_{i=1}^{k} A_i \in \mathscr{M}$ и если $U_i \in \mathscr{V}(A_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, то $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \mathscr{V}(\bigcap_{i=1}^{k} A_i)$;

если супертопология $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$ симметрична и если $X \in \mathscr{M}$ и $\varnothing \in \mathscr{M}$, то $\mathscr{V}(\varnothing) = \mathscr{P}(X)$;

для любого $A \in \mathscr{M}$ фильтр $\mathscr{V}(A)$ его $\mathscr{V}$-окрестностей обладает базой, состоящей из открытых множеств;

если супертопология $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$ симметрична и $A \in \mathscr{M}$, то для замыкания $[A]$ множества A в топологическом пространстве X имеем

$$[A] = \cap \{U \mid U \in \mathscr{V}(A)\}; \tag{1}$$

наконец, для симметрической супертопологии вида $(\mathscr{P}(X), \mathscr{V})$ из $A_i \in \mathscr{M}$ и $U_i \in \mathscr{V}(A_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ следует $\bigcup_{i=1}^{k} U_i \in \mathscr{V}(\bigcup_{i=1}^{k} A_i)$.

Супертопологии на данном множестве X естественно сравнивать следующим образом: $(\mathscr{M}_1, \mathscr{V}_1) \geqq (\mathscr{M}_2, \mathscr{V}_2)$, если $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2$ и $\mathscr{V}_1(A) \supset \mathscr{V}_2(A)$ для любого $A \in \mathscr{M}_1$. Легко убедиться, что это — соотношение частичного упорядочения.

Кроме того, естественно ввести следующее определение. Пусть $(\mathscr{M}_X, \mathscr{V}_X)$ — супертопология на X, а $(\mathscr{M}_Y, \mathscr{V}_Y)$ — супертопология на Y. Отображение $f: X \to Y$ называется *непрерывным относительно этих двух супертопологий*, если выполнены условия:

а) $f(\mathscr{M}_X) \subset \mathscr{M}_Y$; б) $f^{-1}(\mathscr{V}_Y(f(A))) \subset \mathscr{V}_X(A)$ для любого $A \in \mathscr{M}_X$.

Очевидно, это понятие обобщает одновременно обычные понятия непрерывного и близостно непрерывного отображения.

1.2. Понятие супертопологии позволяет охватить также понятие равномерного пространства. Для этой цели, однако, нужен несколько иной подход к самому определению супертопологии. Рассмотрим семейства всех отображений вида $U: \mathscr{M} \to \mathscr{P}(X)$ и введем для удобства обозначения $U \cap V$ и $U \subset V$ — первое для отображения определенного равенством $(U \cap V)(A) = U(A) \cap V(A)$, а второе — для утверждения, что $U(A) \subset V(A)$ для всех $A \in \mathscr{M}$. После этого можно очевидным образом ввести понятие *фильтра отображений* указанного вида, как и понятие *базы* такого фильтра. (Заметим, что прописными латинскими буквами U, V и т. д. мы обозначаем как подмножества X, так и отображения в $\mathscr{P}(X)$. Истинный смысл обозначения, однако, всегда ясен из контекста.)

Если теперь снова $\mathscr{I}(X)\subset\mathscr{M}\subset\mathscr{P}(X)$ и если дан некоторый фильтр $\Phi(\mathscr{M})$ отображений вида $U:\mathscr{M}\to\mathscr{P}(X)$, будем говорить, что $\Phi(\mathscr{M})$ — *супертопологический фильтр*, когда удовлетворены следующие два условия:

1') если $A\in\mathscr{M}$ и $U\in\Phi(\mathscr{M})$, то $A\subset U(A)$;

2') если $A\in\mathscr{M}$ и $U\in\Phi(\mathscr{M})$, то существует такое $V\in\Phi(\mathscr{M})$, что $V(B)\subset U(A)$ для всех $B\in\mathscr{M}$, $B\subset V(A)$.

Легко убедиться, что если определим оператор $\mathscr{V}:\mathscr{M}\to\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ равенством

$$\mathscr{V}(A)=\{U(A)\mid U\in\Phi(\mathscr{M})\},$$

то условия 1) и 2) из п. 1 выполнены. Итак, всякий супертопологический фильтр $\Phi(\mathscr{M})$ порождает некоторую супертопологию $(\mathscr{M},\mathscr{V})$ на X — назовем ее *порожденной* фильтром $\Phi(\mathscr{M})$. С другой стороны, любая супертопология $(\mathscr{M},\mathscr{V})$ на X порождается некоторым супертопологическим фильтром (например, фильтром, состоящим из всех возможных отображений вида $U:\mathscr{M}\to\mathscr{P}(X)$, для которых $U(A)$ — всегда $\mathscr{V}$-окрестность A) — но возможно, чтобы разные супертопологические фильтры порождали одну и ту же супертопологию.

Отметим еще, что если супертопология $(\mathscr{M},\mathscr{V})$ порождается супертопологическим фильтром $\Phi(\mathscr{M})$, то она симметрична, т. е. удовлетворяет условию s), тогда, когда сам фильтр $\Phi(\mathscr{M})$ удовлетворяет следующему условию:

s') если $A, B\in\mathscr{M}$ и $U\in\Phi(\mathscr{M})$, то существует такое $V\in\Phi(\mathscr{M})$, что из $U(A)\cap B=\emptyset$ следует $V(B)\cap A=\emptyset$.

Супертопологический фильтр $\Phi(\mathscr{M})$ назовем *равномерным*, когда вместо условия 2') выполняется следующий более сильный его „равномерный" вариант:

2*) если $U\in\Phi(\mathscr{M})$, то существует такое $V\in\Phi(\mathscr{M})$, что из $B\subset V(A)$ следует $V(B)\subset U(A)$ для любых $A, B\in\mathscr{M}$.

Супертопологию, порожденную равномерным супертопологическим фильтром, будем называть *униформизуемой*.

Данный *равномерный* супертопологический фильтр $\Phi(\mathscr{M})$ назовем *симметрическим*, если он удовлетворяет следующему условию (являющемуся „равномерным" вариантом условия s')):

s*) если $U\in\Phi(\mathscr{M})$, то существует $V\in\Phi(\mathscr{M})$, такое, что из $U(A)\cap B=\emptyset$ следует $V(B)\cap A=\emptyset$ для любых $A, B\in\mathscr{M}$.

В случае $\mathscr{M}=\mathscr{I}(X)$ (или — что одно и то же — $\mathscr{M}=X$) понятие симметрического равномерного супертопологического фильтра приводит по существу к классическому понятию равномерного пространства. Действительно, если $\Phi(X)$ — такой фильтр и если для любого $U\in\Phi(X)$ введем обозначение $\tilde{U}=\{(x,y)\in X\times X\mid y\in U(x)\}$, то семейство $\{\tilde{U}\mid U\in\Phi(X)\}$ — равномерная структура на X. Притом всякая равномерная структура на X можно получить именно таким способом.

Заметим еще, что, как не трудно убедиться, всякий симметрический равномерный супертопологический фильтр $\Phi(\mathscr{M})$ обладает базой, состоящей из отображений U, удовлетворяющих следующему условию: если $x\in U(y)$, то $y\in U(x)$ для $x, y\in X$.

Наконец, данное отображение $U:\mathscr{M}\to\mathscr{P}(X)$ назовем *простым*, если $U(A)=\bigcup\{U(x)\mid x\in A\}$ для любого $A\in\mathscr{M}$. Когда же фильтр $\Phi(\mathscr{M})$ обладает базой, состоящей из простых отображений, его тоже будем называть *простым*.

2. Локально бикомпактные расширения. 2.1. Под *расширением* топологического пространства X понимается пара (Y, φ), состоящая из топологического пространства Y и гомеоморфизма φ, отображающего X на всюду плотное в Y множество $\varphi(X)$. Два расширения (Y_1, φ_1) и (Y_2, φ_2) считаются эквивалентными, если существует такой гомеоморфизм $\lambda : Y_1 \to Y_2$, что $\lambda \circ \varphi_1 = \varphi_2$.

Некоторое описание семейства всех локально бикомпактных расширений данного вполне регулярного пространства было дано впервые Лидером [5] на основе введенного им же понятия локальной близости. Данное же в этом параграфе описание того же семейства, основанное на понятии супертопологии, кажется несколько более простым и, во всяком случае, представляющим самостоятельный интерес — тем более, что оно естественным образом приводит к описанию семейства всех локально бикомпактных паракомпактных расширений, содержащемуся в п. 3.

Сам метод построения расширения данного пространства, который здесь применяется, был по существу предложен в Александров [1] и использован позже в Смирнов [3]. Он состоит, в общих чертах, в следующем. Пусть X — T_1-топологическое пространство. Для любого $x \in X$ обозначим через ξ_x фильтр открытых окрестностей точки x и рассмотрим некоторое семейство X^* открытых фильтров в X, содержащее все фильтры вида ξ_x где $x \in X$. Тогда X^* превращается в топологическое пространство, если за базу его топологии принять семейство всех его подмножеств вида

$$O_U = \{\xi \in X^* \mid U \in \xi\}, \tag{2}$$

где U — произвольное открытое подмножество пространства X. (Это семейство действительно является базой топологии ввиду равенства $O_{U_1} \cup O_{U_2} = O_{U_1 \cap U_2}$, которое легко проверить.) Если равенством $\chi(X) = \xi_x$ определим отображение $\chi : X \to X^*$, то (X, χ) — расширение пространства X.

Всюду дальше через X обозначено некоторое данное хаусдорфово вполне регулярное (т. е. тихоновское) топологическое пространство.

Симметрическую супертопологию $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$ на X назовем *lc-супертопологией*, если выполнены следующие условия:

(i) если $A \in \mathscr{M}$ и $B \subset C$, то $B \in \mathscr{M}$;

(ii) если $A, B \in \mathscr{M}$, то $A \cup B \in \mathscr{M}$;

(iii) если $A \in \mathscr{M}$, то существует такое $U \in \mathscr{V}(A)$, что $U \in M$.

Заметим, что в случае, когда $X \in \mathscr{M}$, lc-супертопология не что иное, как симметрическая супертопология вида $(\mathscr{P}(X), \mathscr{V})$, т. е. некоторая близость на X.

В специальном случае, когда пространство X локально бикомпактно, всегда можно на X ввести некоторую lc-супертопологию $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$ следующим стандартным образом: $\mathscr{M}$ состоит из всех подмножеств A пространства X, чье замыкание $[A]$ бикомпактно; для каждого $A \in \mathscr{M}$ фильтр $\mathscr{V}(A)$ состоит из всех тех подмножеств U, чья внутренность $\langle U \rangle$ содержит замыкание $[A]$ множества A. Эту супертопологию будем называть *стандартной* lc-супертопологией на X.

Введем некоторые определения. Пусть $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$ — данная lc-супертопология на X. Семейство $\mathscr{S}$ множеств в X назовем *$(\mathscr{M}, \mathscr{V})$-плотным*, если для любого $A \in \mathscr{S}$ существует такое $B \in \mathscr{S}$, что $B \in \mathscr{M}$ и $A \in \mathscr{V}(B)$. Данный $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$-плотный открытый (т. е. состоящий из открытых множеств) фильтр в X назовем *максимальным*, если он совпадает со всяким таким же фильтром, содержащим его. (Существование $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$-плотных открытых фильтров очевидно, так как фильтр открытых множеств семейства $\mathscr{V}(A)$ — такой для любого $A \in \mathscr{M}$.) Легко устанавливается, что всякий $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$-плотный открытый фильтр содержится в максимальном.

Пусть теперь дана некоторая lc-супертопология $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$ на X, согласованная с топологией пространства X. Обозначим через X^* множество всех максимальных $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$-плотных открытых фильтров в X, рассматриваемое как топологическое пространство, чья топология определяется указанным выше способом, т. е. посредством базы, состоящей из всех множеств вида (2). Элементы пространства X^* будем обозначать через ξ, η и т. д.

Лемма 1. *Если $x \in X$, а ξ_x — фильтр открытых окрестностей точки x в X, то $\xi_x \in X^*$.*

Доказательство. Ввиду того, что супертопология $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$ согласована с топологией пространства X, ясно, из-за условий (i) и (iii), что ξ_x есть $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$-плотный открытый фильтр в X. Пусть $\xi_x \subset \xi \in X^*$ и пусть $U \in \xi$. Существует такое $V \in \xi$, что $V \in \mathscr{M}$ и $U \in \mathscr{V}(V)$. Для любого $W \in \xi_x$ имеем $W \cap V \neq \varnothing$, следовательно, $x \in [V]_X \subset U$ (включение $[V]_X \subset U$ следует из (1)). Значит, $U \in \xi_x$, откуда заключаем, что $\xi \subset \xi_x$, или окончательно, что $\xi_x = \xi$.

Доказанная лемма позволяет, определяя отображение $\chi : X \to X^*$ посредством равенства $\chi(x) = \xi_x$ заключить, в силу сказанного выше, что имеет место

Лемма 2. *(X^*, χ) — расширение пространства X.*

Докажем еще несколько лемм.

Лемма 3. *Пространство X^* хаусдорфово.*

Доказательство. Пусть $\xi_1, \xi_2 \in X^*$. Если каждый элемент фильтра ξ_1 пересекается с любым элементом фильтра ξ_2, то объединение ξ этих двух фильтров будет тоже $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$-плотным открытым фильтром в X, причем таким, который содержит как ξ_1, так и ξ_2. Но тогда, ввиду максимальности ξ_1, и ξ_2, будем иметь $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$, т. е. $\xi_1 = \xi_2$. Итак, если $\xi_1 \neq \xi_2$, то существуют такие $U_1 \in \xi_1$ и $U_2 \in \xi_2$, для которых $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, а, значит, и $O_{U_1} \cap O_{U_2} = \varnothing$. Так как $\xi_1 \in O_{U_1}$ и $\xi_2 \in O_{U_2}$, этим установлено хаусдорфовость топологии пространства X^*.

Лемма 4. *Если U и V — открытые множества в X и $U \in \mathscr{V}(V)$, то*

$$[O_V]_{X^*} \subset O_U. \tag{3}$$

Доказательство. Если ξ принадлежит замыканию $[O_V]_{X^*}$ множества O_V в X^*, то для любого $W \in \xi$ имеем $\xi \in O_W$ и $O_W \cap O_V \neq \varnothing$, следовательно, $W \cap V \neq \varnothing$. Но тогда тоже и $W \cap V' \neq \varnothing$ для любого $V' \in \mathscr{V}(V)$. Отсюда видно, что объединение $\xi \cup \mathscr{V}'$, где $\mathscr{V}'$ — семейство открытых элементов фильтра $\mathscr{V}(V)$, является $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$-плотным открытым фильтром, откуда, ввиду максимальности ξ, следует, что $\mathscr{V}' \subset \xi$. Значит, $U \in \xi$ или $\xi \in O_U$. Этим включение (3) доказано.

Остается доказать, что пространство X^* локально бикомпактно. Для этого заметим, что для любого $A \in \mathscr{M}$ супертопология $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$ индуцирует на A симметрическую супертопологию вида $(\mathscr{P}(A), \mathscr{V}_A)$. Это означает, что на A определена близость δ_A. Эта близость, как известно [3], порождает некоторое бикомпактное расширение cA топологического пространства X. Элементы пространства cA — это максимальные центрированные δ_A-плотные системы открытых подмножеств множества A. (В построении расширения cA, данном в [3], рассматриваются максимальные центрированные δ_A-плотные системы произвольных (необязательно открытых) множеств, но легко видеть, что эти два подхода не существенно различны.) Имея ввиду, что близость δ_A порождена данной супертопологией, можно следующим образом определить понятие δ_A-плотной системы. Это такая система $\mathscr{S}$ подмножеств множества A, которая обладает свойством: для любого $B\in\mathscr{S}$ существует такое $C\in\mathscr{S}$, что $B\in\mathscr{V}_A(C)$ (а это означает, что существует такое $\tilde{B}\subset X$, что $\tilde{B}\in\mathscr{V}(C)$ $\tilde{B}\cap A=B$). Топология в cA имеет своей базой семейство множеств вида $O_V^{cA}=\{\eta\in cA\mid V\in\eta\}$, где V — произвольное открытое в A множество.

Лемма 5. *Если U и V — открытые множества в X, и если $U\in\mathscr{M}$ и $U\in\mathscr{V}(V)$, то пространства $[O_V]_{X^*}$ и $[O_V^{cU}]_{cU}$ гомеоморфны.*

Доказательство. Пусть $\xi\in[O_V]_{X^*}$. Система множеств $\eta=\{W\cap U\mid W\in\xi\}$ является центрированной δ_U-плотной системой. Пусть $\eta\subset\zeta$, где $\zeta\in cU$. Так как всякий элемент системы ζ пересекается с любым элементом системы ξ, то объединение $\xi\cup\zeta$ порождает некоторый открытый фильтр σ в X. Покажем, что фильтр σ $(\mathscr{M},\mathscr{V})$-плотен. Как нетрудно убедиться, для этой цели достаточно рассмотреть какой-нибудь элемент W систем ζ и показать, что существует такое $W'\in\xi\cup\zeta$, для которого $W\in\mathscr{V}(W')$. Из δ_U-плотности ζ следует, что $W\in\mathscr{V}_U(W'')$ для некоторого $W''\in\zeta$. Это означает, что существует такое $\tilde{W}\subset X$, что $\tilde{W}\cap U=W$ и $\tilde{W}\in\mathscr{V}(W'')$. С другой стороны, как знаем из леммы 4, $U\in\xi$. Поэтому существует такое $U'\in\xi$, что $U\in\mathscr{V}(U')$. Тогда $W=\tilde{W}\cap U\in\mathscr{V}(U'\cap W'')$. Но $U'\cap W''\in\sigma$, и этим показано, что σ — открытый $(\mathscr{M},\mathscr{V})$-плотный фильтр в X. Из максимальности ξ отсюда следует, что $\sigma\subset\xi$, значит $\zeta\subset\xi$, и, следовательно (так как все элементы системы ζ содержатся в U), $\zeta\subset\{W\cap U\mid W\in\xi\}=\eta$. Таким образом показано, что $\eta=\zeta$, т. е. что $\eta\in cU$.

Это позволяет нам определить отображение $\psi:[O_V]_{X^*}\to cU$ равенством

$$\psi(\xi)=\{W\cap U\mid W\in\xi\}. \tag{4}$$

Это отображение взаимно-однозначно. (Так как пространство X^* хаусдорфово, из $\xi_1\neq\xi_2$ следует, что существуют такие $W_1\in\xi_1$ и $W_2\in\xi_2$, что $W_1\cap W_2=\emptyset$, а тогда $\psi(\xi_1)\neq\psi(\xi_2)$.) При этом, ввиду того, что для $\xi\in[O_V]_{X^*}$ и для любого $W\in\xi$ имеем $W\cap V\neq\emptyset$, ясно, что $\psi(\xi)\in[O_V^{cU}]_{cU}$. Покажем, что ψ отображает $[O_V]_{X^*}$ на всё $[O_V^{cU}]_{cU}$.

Сначала возьмем такое U', для которого $U\in\mathscr{V}(U')$ и $U'\in\mathscr{V}(V)$. Пусть теперь $\eta\in[O_V^{cU}]_{cU}$. Рассуждениями, подобными тем, которые были сделаны в доказательстве леммы 4, легко проверяется, что $[O_V^{cU}]_{cU}\subset O_{U'}^{cU}$. Поэтому $\eta\in O_{U'}^{cU}$, откуда $U'\in\eta$. Теперь легко видеть, что η — $(\mathscr{M},\mathscr{V})$-плотная система. Действительно, если $W\in\eta$, то существует (ввиду δ_U-плотности η) такое $W'\in\eta$, что $W\in\mathscr{V}_U(W')$. А это означает, что существует такое $\tilde{W}$, что $W=\tilde{W}\cap U$ и $\tilde{W}\in\mathscr{V}(W')$. Но тогда

$$W=\tilde{W}\cap U\in\mathscr{V}(W'\cap U')$$

и $W'\cap U'\in\eta$. Итак, η — центрированная $(\mathscr{M},\mathscr{V})$-плотная система. Следовательно, существует такое $\xi\in X^*$, для которого $\eta\subset\xi$. Тогда семейство $\{\tilde{W}\cap U\mid\tilde{W}\in\xi\}$ будет центрированной δ_U-плотной системой, которая содержит η. Ввиду максимальности η будем иметь

$$\eta=\{\tilde{W}\cap U\mid\tilde{W}\in\xi\}. \tag{5}$$

Отсюда видно, что для любого $\tilde{W}\in\xi$ имеем $\tilde{W}\cap V=\tilde{W}\cap U\cap V\neq\varnothing$. Действительно, $W=\tilde{W}\cap U\in\eta$, а $\eta\in[O_V^{cU}]_{cU}$, и поэтому $W\cap V\neq\varnothing$. Отсюда заключаем, что $\xi\in[O_V]_{X^*}$. Тогда из равенств (4) и (5) следует, что $\psi(\xi)=\eta$. Этим доказано, что

$$\psi([O_V]_{X^*})=[O_V^{cU}]_{cU}.$$

Остается проверить, что ψ — гомеоморфизм. Это, однако, видно непосредственно из очевидного равенства

$$\psi(O_W\cap[O_V]_{X^*})=O_W^{cU}\cap[O_V^{cU}]_{cU},$$

имеющего место для любого открытого $W\subset U$, и из обстоятельства, что множества вида $O_W\cap[O_V]_{X^*}$, где W — произвольное содержащееся в U открытое множество, образуют базу топологии в $[O_V]_{X^*}$, а множества вида $O_W^{cU}\cap[O_V^{cU}]_{cU}$ — базу топологии в $[O_V^{cU}]_{cU}$.

Из леммы 5 получаем такое

Следствие. *Множество* $[\chi(A)]_{X^*}$ *бикомпактно для любого* $A\in\mathscr{M}$.

В самом деле существует такое $U\in\mathscr{V}(A)$, что $U\in\mathscr{M}$. Можно считать, что U — открытое множество. Пусть V — такое открытое множество, что $V\in\mathscr{V}(A)$ и $U\in\mathscr{V}(V)$. Тогда $[\chi(A)]_{X^*}\subset[\chi(V)]_{X^*}=[O_V]_{X^*}$. Но $[O_V]_{X^*}$ гомеоморфно пространству $[O_V^{cU}]_{cU}$, которое, как замкнутое подмножество бикомпактного пространства cU, тоже бикомпактно. Отсюда следует и бикомпактность замкнутого множества $[\chi(A)]_{X^*}$.

Сейчас ясно, что пространство X^* локально бикомпактно — достаточно для любого $\xi\in X^*$ рассмотреть его окрестность вида O_V, где $V\in\xi$ и $V\in\mathscr{M}$. Таким образом доказано:

Предложение 1. *Всякая lc-супертопология* $(\mathscr{M},\mathscr{V})$ *на данном пространстве* X, *согласованная с топологией на* X, *определяет некоторое локально бикомпактное расширение* (X^*,χ) *пространства* X.

Это расширение будем в дельнейшем называть *порожденным* lc-супертопологией $(\mathscr{M},\mathscr{V})$.

2.2. Убедимся сейчас, что описанный в п. 2.1 метод построения локально бикомпактных расширений является универсальным, т. е. что любое локально бикомпактное расширение пространства X может быть получено (с точностью до эквивалентности) с помощью этого метода. Более того, если не будем различать эквивалентные между собою расширения, существует взаимно-однозначное соответствие между семейством всех локально бикомпактных расширений пространства X и семейством всех согласованных с его топологией lc-супертопологий на X.

Начнем со следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 6. *Пусть* Y — *локально бикомпактное пространство. Семейство* $\mathscr{T}$ *открытых его подмножеств назовем* t-*плотной системой, если для любого* $U\in\mathscr{T}$ *существует такое* $V\in\mathscr{T}$, *что* $[V]\subset U$. *Тогда семейство* $\mathscr{V}_y$ *открытых окрестностей произвольной точки* $y\in Y$ *является максимальной центрированной* t-*плотной системой.*

Доказательство. Очевидно $\mathscr{V}_y$ — центрированная t-плотная система. Легко видеть, что $\mathscr{V}_y$ содержится в некоторой максимальной центрированной t-плотной системе $\mathscr{T}$, состоящей из открытых подмножеств пространства Y. Пусть $U\in\mathscr{T}$. Существует такое $V\in\mathscr{T}$, что $[V]\subset U$. Так как для любого

$W \in \mathscr{V}_y$ имеем $W \cap V \neq \varnothing$, то $y \in [V]$, а отсюда видно, что $U \in \mathscr{V}_y$. Значит, $\mathscr{T} \subset \mathscr{V}_y$. Этим лемма доказана.

Предложение 2. *Пусть X — вполне регулярное пространство, а (Y, φ) — его локально бикомпактное расширение. Рассмотрим множество*

$$\mathscr{M} = \{A \subset X \mid [\varphi(A)]_Y \text{ бикомпактно}\}$$

и для любого $A \in \mathscr{M}$ — множество

$$\mathscr{V}(A) = \{U \subset X \mid U = \varphi^{-1}(\tilde{U}),\ \tilde{U} \subset Y,\ \langle \tilde{U} \rangle_Y \subset [\varphi(A)]_Y\}.$$

Эти множества определяют некоторую lc-супертопологию $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$ на пространстве X, согласованную с его топологией. Порожденное этой супертопологией локально бикомпактное расширение (X^*, χ) пространства X эквивалентно расширению (Y, φ).

Доказательство. Проверка того, что множество $\mathscr{M}$ и оператор $\mathscr{V}$ в самом деле определяют некоторую, согласованную с топологией пространства X, lc-супертопологию на X, делается просто.

Для любой точки $y \in Y$ через $\mathscr{V}_y$ будем обозначать семейство открытых окрестностей y. Ясно, что множество $\xi_y = \{\varphi^{-1}(\tilde{U}) \mid \tilde{U} \in \mathscr{V}_y\}$ является центрированной $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$-плотной системой в X. Тогда $\xi_y \subset \eta$, где η — точка пространства X^*. Для любого открытого в X множества V обозначим через $O(V)$ наибольшее открытое в Y множество W, для которого $\varphi^{-1}(W) = V$ и рассмотрим семейство $\zeta = \mathscr{V}_y \cup \{O(V) \mid V \in \eta\}$. Очевидно ζ — центрированная система открытых в Y множеств. Убедимся, что она t-плотна (в смысле леммы 6). В самом деле, семейство $\mathscr{V}_y$ t-плотно, а если $V \in \eta$, то существует такое $W \in \eta$, что $V \in \mathscr{V}(W)$. Следовательно, $O(V) \supset [\varphi(W)]_Y$. Но $[\varphi(W)]_Y = [O(W)]_Y$, значит, $O(V) \supset [O(W)]_Y$. С другой стороны, как знаем из леммы 6, $\mathscr{V}_y$ является максимальной центрированной t-плотной системой. Отсюда следует, что $\zeta \subset \mathscr{V}_y$, т. е. что $\{O(V) \mid V \in \eta\} \subset \mathscr{V}_y$, откуда заключаем, что $\eta \subset \xi_y$. Значит, $\xi_y = \eta$, т. е. $\xi_y \in X^*$. Таким образом определено отображение $\lambda : Y \to X^*$, где

$$\lambda(y) = \{\varphi^{-1}(\tilde{U}) \mid \tilde{U} \in \mathscr{V}_y\}. \tag{6}$$

Очевидно для $x \in X$ имеем $\lambda(\varphi(x)) = \chi(x)$. Так же очевидно, что отображение λ взаимно-однозначно — это следует из хаусдорфовости пространства Y.

Убедимся, что λ непрерывно. Действительно, пусть $y \in Y$ и $\lambda(y) \in O_U$, где U — открытое множество в X. Тогда $U = \varphi^{-1}(\tilde{U})$, где $\tilde{U}$ — открытое в Y. Так как $U \in \lambda(y)$, то $\tilde{U} \in \mathscr{V}_y$, т. е. $\tilde{U}$ — открытая окрестность точки y. Пусть $z \in \tilde{U}$. Тогда $\tilde{U} \in \mathscr{V}_z$ и, значит, $U \in \lambda(z)$. Отсюда получаем $\lambda(z) \in O_U$, следовательно, $\lambda(\tilde{U}) \subset O_U$. Этим доказана непрерывность отображения λ.

Покажем, что λ отображает Y на всё X^*. Пусть U — такое открытое подмножество X, что замыкание $[\varphi(U)]_Y$ бикомпактно, т. е. $U \in \mathscr{M}$. Тогда

$$\lambda([\varphi(U)]_Y) \subset [\lambda(\varphi(U))]_{X^*} = [\chi(U)]_{X^*} = [O_U]_{X^*}.$$

Из бикомпактности $[\varphi(U)]_Y$ следует, что и множество $\lambda([\varphi(U)]_Y)$ бикомпактно, а, значит, и замкнуто. Поэтому получаем

$$[O_U]_{X^*} = [\lambda(\varphi(U))]_{X^*} \subset [\lambda([\varphi(U)]_Y)]_{X^*} = \lambda([\varphi(U)]_Y).$$

Итак,

$$\lambda([\varphi(U)]_Y)=[O_U]_{X^*},$$

и поскольку множества O_U, где U — открыто в X и $U\in\mathscr{M}$, образуют базу топологии в X^*, заключаем, что $\lambda(Y)=X^*$.

Чтобы убедиться в том, что отображение λ — гомеоморфизм, остается показать, что его обратное отображение λ^{-1} непрерывно. Пусть $y\in Y$ и $\tilde{U}\in\mathscr{V}_y$. Можно считать (ввиду того, что Y — регулярное пространство), что множество $\tilde{U}$ канонично открыто, т. е. что $\tilde{U}=\langle[\tilde{U}]_Y\rangle_Y$. Если $\varphi^{-1}(\tilde{U})=U$, то из-за (6) имеем $U\in\lambda(y)$ и, следовательно, $\lambda(y)\in O_U$. Пусть $\eta\in O_U$ и $\eta=\lambda(y_1)$, где $y_1\in Y$. Тогда $U\in\lambda(y_1)$, значит, $U=\varphi^{-1}(\tilde{V})$, где $\tilde{V}\in\mathscr{V}_{y_1}$. Но $[\tilde{V}]_y=[\varphi(U)]_Y=[\tilde{U}]_Y$. Поэтому

$$\tilde{V}\subset\langle[\tilde{V}]_Y\rangle_Y=\langle[\tilde{U}]_Y\rangle_Y=\tilde{U}.$$

Следовательно, $y_1\in\tilde{U}$, откуда $\lambda(y_1)\in\lambda(\tilde{U})$ или $\eta\in\lambda(\tilde{U})$. Итак, $O_U\subset\lambda(\tilde{U})$. Этим показано, что отображение λ открыто, т. е. что λ^{-1} непрерывно. Так заканчивается доказательство эквивалентности расширений (Y,φ) и (X^*,χ) пространства X.

З а м е ч а н и е. Множества $\mathscr{M}$ и $\mathscr{V}(A)$, где $A\in\mathscr{M}$, определенные в формулировке предложения 2, очевидно будут те же самые, если заменить расширение (Y,φ) другим, эквивалентным ему, локально бикомпактным расширением (Y',φ') пространства X.

Прежде чем перейти к следующему предложению, рассматривающему, так сказать, обратную ситуацию, докажем вспомогательное утверждение.

Л е м м а 7. *Пусть (X^*,χ) — локально бикомпактное расширение, порожденное lc-супертопологией $(\mathscr{M},\mathscr{V})$ на пространстве X. Если $A\in\mathscr{M}$ и $\xi\in[\chi(A)]_{X^*}$, то $\mathscr{V}(A)\subset\xi$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $U\in\xi$ имеем $O_U\cap\chi(A)\neq\varnothing$. Но

$$O_U\cap\chi(A)=(O_U\cap\chi(X))\cap\chi(A)=\chi(U)\cap\chi A),$$

откуда получаем $U\cap A\neq\varnothing$. Тогда для любых $U\in\xi$ и $V\in\mathscr{V}(A)$ имеем $U\cap V\neq\varnothing$. Это показывает, что семейство $\xi\subset\mathscr{V}(A)$ центрировано; в то же время оно является и $(\mathscr{M},\mathscr{V})$-плотной системой. Следовательно, ввиду максимальности ξ, $\mathscr{V}(A)\subset\xi$.

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть X — вполне регулярное пространство, а $(\mathscr{M},\mathscr{V})$ — некоторая lc-супертопология, согласованная с данной топологией на X, и пусть (X^*,χ) — порожденное этой супертопологией локально бикомпактное расширение пространства X. Если*

$$\mathscr{M}^*=\{A\subset X\mid[\chi(A)]_{X^*}\ \text{бикомпактно}\}$$

и если, для любого $A\in\mathscr{M}^*$,

$$\mathscr{V}^*(A)=\{U\subset X\mid U=\chi^{-1}(\tilde{U}),\ \tilde{U}\subset X^*,\ \langle\tilde{U}\rangle_{X^*}\supset[\chi(A)]_{X^*}\},$$

то $\mathscr{M}=\mathscr{M}^*$ и $\mathscr{V}(A)=\mathscr{V}^*(A)$ для $A\in\mathscr{M}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из следствий леммы 5 видно, что $\mathscr{M}\subset\mathscr{M}^*$. Пусть $A\in\mathscr{M}^*$, т. е. множество $[\chi(A)]_{X^*}$ бикомпактно. Каждая точка этого множества обладает окрестностью вида O_U, где U — открытое подмножество пространства X, для которой $U\in\mathscr{M}$. Среди этих окрестностей найдем конечное число $O_{U_1}, O_{U_2}, \ldots, O_{U_k}$, такие, что

$$[\chi(A)]_{X^*}\subset\bigcup_{i=1}^{k}O_{U_i}.$$

Тогда

$$A=\chi^{-1}(\chi(A))\subset\bigcup_{i=1}^{k}\chi^{-1}(O_{U_i})=\bigcup_{i=1}^{k}U_i.$$

Так как $U_i\in\mathscr{M}\,(i=1, 2, \ldots, k)$, то $\bigcup_{i=1}^{k}U_i\in\mathscr{M}$, а значит и $A\in\mathscr{M}$. Этим показано, что $\mathscr{M}^*\subset\mathscr{M}$. Итак, $\mathscr{M}=\mathscr{M}^*$.

Пусть теперь $A\in\mathscr{M}$ и $U\in\mathscr{V}(A)$. Можно считать, что U открыто и что $U\in\mathscr{M}$. Существует такое открытое $V\in\mathscr{V}(A)$, что $U\in\mathscr{V}(V)$. Тогда

$$[\chi(A)]_{X^*}\subset[\chi(V)]_{X^*}=[O_V]_{X^*}\subset O_U,\quad \chi^{-1}(O_U)=U,$$

следовательно, $U\in\mathscr{V}^*(A)$. Значит, $\mathscr{V}(A)\subset\mathscr{V}^*(A)$.

Допустим, наоборот, что $A\in\mathscr{M}$ и $U\in\mathscr{V}^*(A)$. Это означает, что $U=\chi^{-1}(\tilde{U})$, где $\tilde{U}\subset X^*$, и $\langle\tilde{U}\rangle_{X^*}\supset[\chi(A)]_{X^*}$. Каждая точка бикомпактного множества $[\chi(A)]_{X^*}$ обладает парой окрестностей вида $O_{W'}$ и $O_{W''}$, где W' и W'' открыты в X, $W'\in\mathscr{V}(W'')$ и $O_{W'}\subset\langle\tilde{U}\rangle_{Y^*}$. Существует конечное число таких $O_{W_1''}, O_{W_k''}, \ldots$, что $[\chi(A)]_{X^*}\subset\bigcup_{i=1}^{k}O_{W_i''}$. Тогда

$$A=\chi^{-1}(\chi(A))\subset\bigcup_{i=1}^{k}\chi^{-1}(O_{W_1''})=\bigcup_{i=1}^{k}W_i''.$$

Можно считать, что окрестности $O_{W_i'}\,(i=1, 2, \ldots, k)$ выбраны так, что $W_i'\subset W_0$, где W_0 — такое фиксированное открытое подмножество пространства X, для которого имеем $W_0\in\mathscr{M}$ и $W_0\in\mathscr{V}(\bigcup_{i=1}^{k}W_i'')$ (в противном случае заменим W_i' множеством $W_i'\cap W_0$, которое тоже является $\mathscr{V}$-окрестностью множества W_i''). Тогда, ввиду того, что на W_0 супертопология $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$ порождает симметрическую супертопологию вида $(\mathscr{P}(W_0), \mathscr{V}_{W_0})$, будем иметь

$$\bigcup_{i=1}^{k}W_i'\in\mathscr{V}(\bigcup_{i=1}^{k}W_i'').$$

Но $A\subset\bigcup_{i=1}^{k}W_i''$, а $\bigcup_{i=1}^{k}W_i'=\bigcup_{i=1}^{k}\chi^{-1}(O_{W_i'})\subset\chi^{-1}(\tilde{U})=U$. Отсюда видно, что $U\in\mathscr{V}(A)$. Следовательно, $\mathscr{V}^*(A)\subset\mathscr{V}(A)$ или окончательно $\mathscr{V}^*(A)=\mathscr{V}(A)$. Предложение доказано.

Предложения 2 и 3 вместе с замечанием, следующим за предложением 2, приводят к следующему, основному для настоящего параграфа, результату, обобщающему известный результат Смирнова [3] относительно бикомпактных расширений.

Теорема 1. *Существует взаимно-однозначное соответствие между семейством всех локально бикомпактных расширений данного вполне регулярного пространства X (определенных с точностью до эквивалентности) и семейством всех, согласованных с данной топологией, lc-супертопологий на X. Это соответствие осуществляется в одну сторону* *при помощи описанного в доказательстве предложения 1 метода построения локально бикомпактных расширений, а в другую — способом, указанным в формулировке предложения 2.*

2.3. На множестве локально бикомпактных расширений данного пространства X естественно ввести частичное упорядочение следующим образом. Будем говорить, что расширение (Y_1, φ_1) мажорирует (Y_2, φ_2) и будем писать $(Y_1, \varphi_1) \geqq (Y_2, \varphi_2)$, если существует такое непрерывное отображение $\lambda : Y_1 \to Y_2$, что $\lambda \circ \varphi_1 = \varphi_2$. Непосредственно проверяется, что это действительно соотношение частичного упорядочения, а также, что из двух неравенств $(Y_1, \varphi_1) \geqq (Y_2, \varphi_2)$ и $(Y_2, \varphi_2) \geqq (Y_1, \varphi_1)$ следует эквивалентность расширений $(Y_1\ \varphi_1)$ и (Y_2, φ_2).

Покажем, что соответствие, установленное в теореме 1 между локально бикомпактными расширениями пространства X и lc-супертопологиями на нем, является изоморфизмом относительно введенных нами частичных упорядочений.

Теорема 2. *Если (Y_1, φ_1) и (Y_2, φ_2) — локально бикомпактные расширения пространства X, то соотношение $(Y_1, \varphi_1) \geqq (Y_2, \varphi_2)$ выполнено тогда и только тогда, когда для порождающих их lc-супертопологий $(\mathcal{M}_1, \mathcal{V}_1)$ и $(\mathcal{M}_2, \mathcal{V}_2)$ выполнено $(\mathcal{M}_1, \mathcal{V}_1) \geqq (\mathcal{M}_2, \mathcal{V}_2)$.*

Доказательство. а) Пусть $(Y_1, \varphi_1) \geqq (Y_2, \varphi_2)$. Для простоты будем считать, что $X \subset Y_1$ и $X \subset Y_2$, а $\varphi_1 : X \to Y_1$ и $\varphi_2 : X \to Y_2$ являются отображениями вложения. Существует непрерывное отображение $\lambda : Y_1 \to Y_2$, такое, что $\lambda(x) = x$ для $x \in X$. Пусть $A \in \mathcal{M}_1$. Это значит, что множество $[A]_{Y_1}$ бикомпактно. Тогда бикомпактно, а, следовательно, и замкнуто и множество $\lambda([A]_{Y_1})$ Поэтому

$$\lambda([A]_{Y_1}) = [\lambda([A]_{Y_1})]_{Y_2} \supset [\lambda(A)]_{Y_2} = [A]_{Y_2}.$$

С другой стороны, $\lambda([A]_{Y_1}) \subset [\lambda(A)]_{Y_2} = [A]_{Y_2}$. Итак, $[A]_{Y_2} = \lambda([A]_{Y_1})$, значит множество $[A]_{Y_2}$ бикомпактно, т. е. $A \in \mathcal{M}_2$. Таким образом показано, что $\mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}_2$.

Пусть теперь $A \in \mathcal{M}_1$ и $U \in \mathcal{V}_2(A)$. Можно, конечно, считать, что множество U открыто. Тогда $U = \tilde{U}_2 \cap X$, где $\tilde{U}_2$ — открытое подмножество Y_2, и $\tilde{U}_2 \supset [A]_{Y_2}$. Пусть $\tilde{U}_1 = \lambda^{-1}(\tilde{U}_2)$. Имеем $\tilde{U}_1 \cap X = \lambda^{-1}(\tilde{U}_2) \cap X = \tilde{U}_2 \cap X = U$ и

$$\tilde{U}_1 = \lambda^{-1}(\tilde{U}_2) \supset \lambda^{-1}([A]_{Y_2}) \supset [\lambda^{-1}(A)]_{Y_1} = [A]_{Y_1}.$$

Это означает, что $U \in \mathcal{V}_1(A)$. Итак, $\mathcal{V}_2(A) \subset \mathcal{V}_1(A)$. Этим доказано, что $(\mathcal{M}_1, \mathcal{V}_1) \geqq (\mathcal{M}_2, \mathcal{V}_2)$.

б) Теперь, наоборот, предположим, что $(\mathcal{M}_1, \mathcal{V}_1) \geqq (\mathcal{M}_2, \mathcal{V}_2)$. Отождествим расширения (Y_1, φ_2) и (Y_2, φ) пространства X, соответственно, с локально бикомпактными расширениями (X_1^*, χ_1) и (X_2^*, χ_2), порожденными стандартным методом lc-супертопологиями $(\mathcal{M}_1, \mathcal{V}_1)$ и $(\mathcal{M}_2, \mathcal{V}_2)$. Нужно построить такое непрерывное отображение $\lambda : X_1^* \to X_2^*$, для которого $\lambda(\chi_1(x)) = \chi_2(x)$ для $x \in X$.

Пусть $\xi_1 \in X_1^*$. Существует такое $U_0 \in \xi_1$, что $U_0 \in \mathcal{M}_1$. Тогда $U_0 \in \mathcal{M}_2$, т. е. множество $[\chi_2(U_0)]_{X_2^*}$ бикомпактно. Поэтому пересечение

$$\cap \{[\chi_2(U)]_{X_2^*} \mid U \in \xi_1\} \tag{7}$$

непусто. Покажем, однако, что оно не может содержать более одной точки пространства X_2^*. В самом деле, допустим, что ξ_2' и ξ_2'' принадлежат множеству (7) и что $\xi_2' \neq \xi_2''$. Тогда существуют такие $V' \in \xi_2'$ и $V'' \in \xi_2''$, что $O_{V'}^2 \cap O_{V''}^2 = \varnothing$, а значит и $V' \cap V'' = \varnothing$. (Здесь вместо O_U пишем O_U^1, когда рассматривается пространство X_1^*, и O_U^2 — когда рассматривается X_2^*.) Рассмотрим семейство

$$\xi_1 \cup \{V \cap U \mid V \in \xi_2',\ U \in \xi_1,\ U \subset U_0\} \tag{8}$$

и покажем, что оно — центрированная $(\mathscr{M}_1, \mathscr{V}_1)$-плотная система. Центрированность следует из того, что для любого $U \in \xi_1$ имеем $\xi_2' \in [O_U^2]_{X_2^*}$ и, следовательно, для любого $V \in \xi_2'$ имеем $V \cap U \neq \varnothing$. Чтобы проверить $(\mathscr{M}_1, \mathscr{V}_1)$-плотность, возьмем такое $U_1 \in \xi_1$, что $U_1 \subset U_0$, а также некоторое $U_2 \in \xi_2'$. Существуют такие $W_1 \in \xi_1'$ и $W_2 \in \xi_2'$, что $U_1 \in \mathscr{V}_1(W_1)$ и $U_2 \in \mathscr{V}_2(W_2)$. Но $W_1 \cap W_2 \in \mathscr{M}_1$ и $U_1 \in \mathscr{V}_1(W_1 \cap W_2)$, $U_2 \in \mathscr{V}_2(W_1 \cap W_2) \subset \mathscr{V}_1(W_1 \cap W_2)$. Следовательно, $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{V}_1(W_1 \cap W_2)$. Итак, семейство (8) — центрированная $(\mathscr{M}_1, \mathscr{V}_1)$-плотная система, откуда, ввиду максимальности системы ξ_1, следует, что

$$\{U \cap V \mid U \in \xi_1,\ V \in \xi_2',\ U \subset U_0\} \subset \xi_1.$$

Аналогично доказывается, что

$$\{U \cap V \mid U \in \xi_1,\ V \in \xi_2'',\ U \subset U_0\} \subset \xi_1.$$

Итак, множества $U_0 \cap V'$ и $U_0 \cap V''$ принадлежат центрированной системе ξ_1. Но это невозможно, так как $V' \cap V'' = \varnothing$. Полученное противоречие показывает, что пересечение (7) состоит из одной только точки ξ_2. Это позволяет определить отображение $\lambda; X_1^* \to X_2^*$ посредством равенства

$$\lambda(\xi_1) = \cap \{[O_U^2]_{X_2^*} [U \in \xi_1\}.$$

Легко убедиться при этом, что $\lambda(\chi_1(x)) = \chi_2(x)$ для $x \in X$. Достаточно вспомнить, что $\chi_1(x) = \chi_2(x) = \xi_x$, где ξ_x — семейство открытых окрестностей точки x в пространстве X и что поэтому

$$\lambda(\chi_1(x)) = \cap \{[O_U^2]_{X_2^*} \mid U \in \chi_2(x)\} \ni \chi_2(x).$$

Чтобы показать теперь, что λ непрерывно в данной точке $\xi_1 \in X_1^*$, возьмем произвольную окрестность вида O_V^2 точки $\lambda(\xi_1)$ пространства X_2^* и такое $W \in \lambda(\xi_1)$, для которого $V \in \mathscr{V}_2(W)$. Рассуждая как и выше, заключаем, что $W \cap U_0 \in \xi_1$, где через U_0 обозначено такое открытое множество в X, для которого $U_0 \in \xi_1$, $U_0 \in \mathscr{M}_1$. Пусть $U = W \cap U_0$. Ясно, что $\xi_1 \in O_U^1$. Если $\eta_1 \in O_U^1$, то $U \in \eta_1$ и $\lambda(\eta_1) \in [O_U^2]_{X_2^*} \subset [O_W^2]_{X_2^*} \subset O_V^2$. Значит, $\lambda(O_U^1) \subset O_V^2$. Этим установлена непрерывность отображения λ и теорема доказана.

2.4. Приведем без доказательства еще одну теорему, естественным образом дополняющую содержание этого пункта.

Теорема 3. *Пусть X_1, и X_2 — вполне регулярные пространства, а (Y_1, φ_1) и (Y_2, φ_2) — их локально бикомпактные расширения, порожденные, соответственно, lc-супертопологиями $(\mathscr{M}_1, \mathscr{V}_1)$ и $(\mathscr{M}_2, \mathscr{V}_2)$. Отображение $f: X_1 \to X_2$ обладает (очевидно единственное) непрерывным продолжением $\tilde{f}: Y_1 \to Y_2$ (в смысле равенства $\tilde{f} \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ f$) тогда и только тогда, когда*

f непрерывно относительно супертопологий $(\mathscr{M}_1, \mathscr{V}_1)$ и $(\mathscr{M}_2, \mathscr{V}_2)$ *(и в этом случае отображение $\tilde{f}$ непрерывно даже относительно стандартных на Y_1 и Y_2 lc-супертопологий).*

3. Локально бикомпактные паракомпактные расширения. Пусть снова X — данное вполне регулярное пространство и $\mathscr{I}(X)\subset\mathscr{M}\subset\mathscr{P}(X)$. Супертопологию $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$ на X назовем *lcp-супертопологией*, если она униформизуема симметрическим и простым равномерным супертопологическим фильтром $\Phi(\mathscr{M})$, причем выполнены следующие условия:

(i) если $A\in\mathscr{M}$ и $B\subset A$, то $B\in\mathscr{M}$;

(ii) если $A, B\in\mathscr{M}$, то $A\cup B\in\mathscr{M}$;

(iii) существует такое отображение $U_0\in\Phi(\mathscr{M})$, что

а) $U_0(A)\in\mathscr{M}$ для любого $A\in\mathscr{M}$;

б) если $A\in\mathscr{M}$, то A пересекается (если оно непусто) только с конечным числом отличающихся друг от друга множеств вида $U_0(x)$, где $x\in X$.

Цель настоящего пункта — показать, что имеет место следующая

Теорема 4. *Существует взаимно-однозначное соответствие между семейством всех локально бикомпактных паракомпактных расширений данного вполне регулярного пространства X (определенных с точностью до эквивалентности) и семейством всех, согласованных с его топологией, lcp-супертопологий на X.*

Доказательство. Пусть $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$ — lcp-супертопология на X, согласованная с данной топологией. Очевидно $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$ является lc-супертопологией и поэтому она порождает некоторое локально бикомпактное расширение (X^*, χ) пространства X. Покажем, что это расширение паракомпактно. Главный момент доказательства состоит в определении некоторой равномерности (в обычном смысле) на X, которая продолжается на X^* (если рассматривать X как вложенное в X^*).

Данное открытое покрытие u пространства X назовем $\Phi(\mathscr{M})$-*покрытием*, если существует такое $U\in\Phi(\mathscr{M})$, что покрытие $\{U(x)\mid x\in X\}$ вписано в u. В таком случае будем писать $U>u$.

Рассмотрим семейство Σ_0 всех открытых $\Phi(\mathscr{M})$-покрытий пространства X, удовлетворяющих следующим двум условиям: а) $U_s\in\mathscr{M}$ для всех элементов U_s покрытия u; б) любое непустое множество $A\in\mathscr{M}$ пересекается только с конечным числом элементов U_s покрытия u.

Семейство Σ_0 непусто — оно содержит, например, покрытие u_0, состоящее из всех отличающихся друг от друга множеств вида $U_0(x)$, где U_0 — такое отображение, принадлежащее фильтру $\Phi(\mathscr{M})$, которое удовлетворяет условию (iii) (можно считать все множества $U_0(x)$ открытыми).

Непосредственно проверяется, что

I) если $u=\{U_s\mid s\in\mathscr{S}\}\in\Sigma_0$ и $v=\{V_t\mid t\in\mathscr{T}\}\in\Sigma_0$, то покрытие $\{U_s\cap V_t\mid s\in\mathscr{S}$ $t\in\mathscr{T}\}$ пространства X тоже принадлежит семейству Σ_0.

Более сложно устанавливается следущее утверждение:

II) во всякое покрытие $u\in\Sigma_0$ можно звездно вписать некоторое покрытие $w\in\Sigma_0$.

Чтобы доказать это, рассмотрим такое $U\in\Phi(\mathscr{M})$, что $U>u$, и такое $V\in\Phi(\mathscr{M})$, которое удовлетяоряет условию: из $B\subset V(A)$ следует $V(B)\subset U(A)$ для любых $A, B\in\mathscr{M}$. Можно притом считать, что $V(x)$ открыто для любого $x\in X$ и что (ввиду симметричности равномерного фильтра $(\Phi\mathscr{M})$) отображение V обладает свойством: если $x\in V(y)$, то $y\in V(x)$ для всех $x, y\in X$. Легко видеть, что покрытие $v=\{V(x)\mid x\in X\}$ звездно вписано в покрытие u, т. е. что для любой точки $x \in X$ имеем $\mathrm{St}_v x \subset U_s$, где U_s — некоторый (зависящий от x) элемент покрытия u.

Здесь пользуемся обозначением

$$\mathrm{St}_w A = \cup\{W \mid W \in w,\ W \cap A \neq \varnothing\},$$

где $A \subset X$, а w — покрытие пространства X.

Пусть $u = \{U_s \mid s \in \mathscr{S}\}$, где $\mathscr{S}$ — некоторое множество индексов. Введем обозначение

$$V^s = \{x \in X \mid \mathrm{St}_v x \subset U_s\}.$$

Ясно, что $\mathrm{St}_v V^s \subset U_s$ для всех $s \in \mathscr{S}$, а также, что $\cup\{V^s \mid s \in \mathscr{S}\} = X$.

Для каждого $s \in \mathscr{S}$ существует конечное число индексов $t_1^s, t_2^s, \ldots, t_{k_s}^s$, такие, что $U_s \cap U_{t_i^s} \neq \varnothing$ для $i = 1, 2, \ldots, k_s$, но $U_s \cap U_t = \varnothing$ для $t \neq t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k_s)$. Пусть $\mathscr{A}_1^s, \mathscr{A}_2^s, \ldots, \mathscr{A}_{p_s}^s$, где $p_s = 2^{k_s} - 1$ — все непустые подсистемы системы $\{1, 2, \ldots, k_s\}$ и $\mathscr{B}_m^s = \{1, 2, \ldots, k_s\} \setminus \mathscr{A}_m^s$ $(m = 1, 2, \ldots, p_s)$. Введем множества

$$W_m^s = U_s \cap (\cap\{\mathrm{St}_v V^{t_i^s} \mid i \in \mathscr{A}_m^s\} \setminus \{[V^{t_j^s}]_X \mid j \in \mathscr{B}_m^s\}$$

и рассмотрим семейство $w = \{W_m^s \mid s \in \mathscr{S},\ m = 1, 2, \ldots, p_s\}$.

Покажем, во-первых, что покрытие v вписано в w. Действительно, пусть $V(x) \in v$ и пусть $V(x) \cap V^s \neq \varnothing$ для некоторого фиксированного $s \in \mathscr{S}$. Если m выбрано так, что $V(x) \cap V^{t_i^s} \neq \varnothing$ для $i \in \mathscr{A}_m^s$ и $V(x) \cap V^{t_i^s} = \varnothing$ для $i \in \mathscr{B}_m^s$, то $V(x) \subset W_m^s$. Этим и установлено, что v вписано в w и, следовательно, w является $\Phi(\mathscr{M})$-покрытием.

После этого заметим, что $W_m^s \subset U_s$, и значит $W_m^s \in \mathscr{M}$ для всех элементов W_m^s покрытия w.

С другой стороны, если $A \in \mathscr{M}$, то A пересекается только с конечным числом элементов U_s покрытия u. В то же время, если $W_m^t \cap U_s \neq \varnothing$, то $U_t \cap U_s \neq \varnothing$, что возможно только для конечного числа индексов t. Отсюда видно, что любое множество $\mathscr{A} \in \mathscr{M}$ пересекается только с конечным числом элементов покрытия w.

Все это показывает, что $w \in \Sigma_0$. Покажем, что w звездно вписано в u. Пусть $x \in X$ и $x \in V^r$. Если $W_m^s \ni x$, то $U_s \cap V^r \neq \varnothing$, значит, $r = t_{i_0}^s$ для некоторого i_0, где $1 \leq i_0 \leq k_s$. Ясно, что $i_0 \in \mathscr{A}_m^s$ — если бы $i_0 \in \mathscr{B}_m^s$, то из $x \in W_m^s$ следовало бы $x \notin V^r$. Итак, $W_m^s \subset \mathrm{St}_v V^r \subset U_r$. Отсюда следует, что $\mathrm{St}_w x \subset U_r$. Этим доказана звaздная вписанность покрытия w и u.

Из утверждений I) и II) следует, что Σ_0 является базой некоторой равномерности Σ на X. (Здесь мы рассматриваем равномерность как семейство покрытий пространства X. Известно каким образом можно перейти отсюда, если нужно, к обычному понятию равномерной структуры, рассматриваемой как семейство окружений диагонали квадрата $X \times X$.) Эта равномерность порождает данную супертопологию $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$ в следующем смысле: если $A \in \mathscr{M}$, то множество U является $\mathscr{V}$-окрестностью A тогда и только тогда, когда существует такое покрытие $v \in \Sigma$, что $\mathrm{St}_v A \subset U$. В самом деле, пусть $A \in \mathscr{M}$ и пусть $v \in \Sigma$. Тогда существует такое отображение $V \in \Phi(\mathscr{M})$, что $V > v$.

Можем считать, ввиду сделанных предположений о фильтре $\Phi(\mathscr{M})$, что отображение V — простое. Поэтому для любого $A \in \mathscr{M}$ имеем $V(A) = \cup\{V(x) \mid x \in A\} \subset \mathrm{St}_v A$. Следовательно, $\mathrm{St}_v A \in \mathscr{V}(A)$.

Рассмотрим, с другой стороны, произвольную открытую $\mathscr{V}$-окрестность множества $A \in \mathscr{M}$ — она имеет вид $U(A)$, где $V \in \Phi(\mathscr{M})$. Легко видеть, что двухэлементное открытое покрытие $w = \{V(A), X \setminus [A]\}$ пространства X является $\Phi(\mathscr{M})$-покрытием. Действительно, пусть $W \in \Phi(\mathscr{M})$ — такое отображение, для которого из $B \subset W(A)$ следует $W(B) \subset V(A)$. Отображение W можно еще считать простым, а также удовлетворяющим условию: из $x \in W(y)$ следует $y \in W(x)$ для любых $x, y \in X$; множества же $W(x)$ можно считать открытыми. Тогда, если $x \in W(A)$, то $W(x) \subset V(A)$; если же $x \notin W(A)$, то $A \cap W(x) = \varnothing$, откуда $[A] \cap W(x) = \varnothing$, т. е. $W(x) \subset X \setminus [A]$. Итак, $W > w$. Если теперь $u = \{U_s \mid s \in \mathscr{S}\}$ — какое-нибудь покрытие, принадлежащее Σ, то покрытие $v = \{U_s \cap V(A) \mid s \in \mathscr{S}\} \cup \{U_s \cap (X \setminus [A]) \mid s \in \mathscr{S}\}$ тоже принадлежит Σ и притом $\mathrm{St}_v A \subset \mathrm{St}_w A = V(A)$.

Для любого открытого покрытия $u = \{u_s \mid s \in \mathscr{S}\}$, принадлежащего равномерности Σ, рассмотрим семейство $u^* = \{O_{U_s} \mid s \in \mathscr{S}\}$ и покажем, что u^* — покрытие пространства X^*. Пусть $v = \{V_t \mid t \in \mathscr{T}\}$ — такое покрытие X, принадлежащее Σ_0, которое двухкратно-звездно вписано в u. Тогда для каждого $t \in \mathscr{T}$ имеется такое $s \in \mathscr{S}$, что $\mathrm{St}_v V_t \subset U_s$. Но тогда $U_s \in \mathscr{V}(V_t)$, а отсюда, как знаем из леммы 4, п. 2, следует, что $[O_{V_t}]_{X^*} \subset O_{U_s}$. Заметим, с другой стороны, что семейство $\{O_{V_t} \mid t \in \mathscr{T}\}$ локально конечно. Действительно, для любого $\xi \in X^*$ существует такое $W \in \xi$, что $W \in \mathscr{M}$. Тогда W пересекается только с конечным числом элементов V_t покрытия v. Отсюда ясно, что окрестность O_W точки ξ в X^* пересекается только с конечным числом множеств вида O_{V_t}, и тем более — только с конечным числом множеств вида $\chi(V_t)$ где $t \in \mathscr{T}$. Поэтому

$$\cup\{O_{U_s} \mid s \in \mathscr{S}\} \supset \cup\{[O_{V_t}]_{X^*} \mid t \in \mathscr{T}\} = \cup\{[\chi(V_t)]_{X^*} \mid t \in \mathscr{T}\}$$

$$= [\cup\{\chi(V_t) \mid t \in \mathscr{T}\}]_{X^*} = [\chi(X)]_{X^*} = X^*.$$

Теперь нетрудно убедиться, что семейство $\{u^* \mid u \in \Sigma\}$ покрытий пространства X^* является базой некоторой равномерности Σ^* на X^*. При этом Σ^*, с одной стороны, порождает на пространстве X^* его же топологию, а, с другой, — если отождествить X с $\chi(X)$ — индуцирует равномерность Σ на X.

Заметим, что если покрытие $u = \{U_s \mid s \in \mathscr{S}\}$ пространства X принадлежит базе Σ_0 и, следовательно, $U_s \in \mathscr{M}$ для всех $s \in \mathscr{S}$, то замыкания $[O_{U_s}]_{X^*}$ в X^* всех элементов покрытия u^* бикомпактны. Отсюда, как известно [4], следует, что пространство X^* паракомпактно (и полно, если рассматривать его как равномерное). Итак, (X^*, χ) — локально бикомпактное паракомпактное расширение пространства X.

Пусть теперь (Y, φ) — произвольное локально бикомпактное паракомпактное расширение пространства X. Для простоты (отождествляя X с $\varphi(X)$) будем считать, что $X \subset Y$ и что $\varphi: X \to Y$ есть отображение вложения. Тогда семейство всех открытых покрытий пространства Y является базой равномерности на Y, которая индуцирует некоторую равномерность Σ на X. Если $\mathscr{M} = \{A \subset X \mid [A]_Y$ бикомпактно$\}$ и если для любого $u \in \Sigma$ определим отображение $\tilde{u}: \mathscr{M} \to \mathscr{P}(X)$ равенством $\tilde{u}(A) = \mathrm{St}_u A$, то семейство $\{\tilde{u} \mid u \in \Sigma\}$ является базой некоторого симметрического и простого супертопологического фильтра $\Phi(\mathcal{M})$, который, как легко убедиться, порождает именно ту же супертопологию $(\mathcal{M}, \mathcal{V})$, которая соответствует (в смысле теоремы 1) локально бикомпактному расширению (Y, φ). Для того, чтобы убедиться, что $(\mathcal{M}, \mathcal{V})$ является lcp-супертопологией, достаточно рассмотреть некоторое локально конечное открытое покрытие u_0 пространства X, принадлежащее Σ, все элементы которого имеют бикомпактные замыкания в Y (такое покрытие u_0 существует ввиду паракомпактности и локально бикомпактности пространства Y). Тогда отображение $\tilde{u}_0$ будет обладать свойством, требуемым для отображения U_0 в определении lcp-супертопологии.

Что касается утверждения, что так полученное соотношение между локально бикомпактными паракомпактными расширениями данного пространства X, с одной стороны, и всеми возможными lcp-супертопологиями на X, с другой, является взаимно-однозначным соответствием, то это утверждение следует уже из теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров. О бикомпактных расширениях топологических пространств. *Мат. сб.*, **5**, 1939, 403—423.
2. Д. Б. Дойчинов. Об единой теории топологических пространств, пространств близости и равномерных пространств. *Доклады АН СССР*, **156**, 1964, 21—24.
3. Ю. М. Смирнов. О пространствах близости, *Мат. сб.*, **31**, 1952, 543—574.
4. N. Bourbaki. Topologie générale, ch. I et II. Paris, 1961.
5. S. Leader. Local proximity spaces. *Math. Ann.*, **169**, 1967, 275—281.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 1. 12. 1981