PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

RÄUMLICH HOMOGENE KRITISCHE VERZWEIGUNGSPROZESSE MIT BELIEBIGEM MARKENRAUM

GEORGI S. TSCHOBANOW

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zur Theorie der räumlich homogenen Verzweigungsprozesse, wie sie in der grundlegenden Arbeit von Liemant begründet wurde. Sie überträgt die Ergebnisse von Kerstan, Matthes, Prehn auf den Fall beliebiger beschränkter vollständiger separabler Markenräume.

0. Einleitung. In [6] wurden lokalendliche Teilchensysteme Φ in Euklidischen Räumen R^s, $t \geqq 1$ untersucht, die sich in diskreter Zeit zeitlich homogen gemäß der Grundannahme der Verzweigungstheorie stochastisch entwickeln: Jedes Teilchen aus Φ löst unabhängig von den anderen einen zufälligen Schauer von Tochterteilchen aus, dessen Verteilungsgesetz vom Ort des Mutterteilchens bestimmt wird. Die Überlagerung der so ausgelösten zufälligen Schauer ergibt dann eine zufällige Tochtergeneration Φ'. Die räumliche Homogenität des Verzweigungsmodells besagt, daß die stochastischen Beziehungen zwischen dem Ort des Mutterteilchens und dessen zufälliger Nachkommenschaft bei Verschiebungen im Raum unverändert bleiben. Somit wird die stochastische Evolution im räumlich homogenen Verzweigungsmodell durch das Verteilungsgesetz D der Nachkommenschaft eines im Nullpunkt liegenden Teilchens eindeutig bestimmt. Das Verzweigungsmodell ist in diesem Falle genau dann kritisch, wenn der gemäß D gebildete Erwartungswert der Gesamtanzahl der Nachkommen eines Mutterteilchens gleich Eins ist.

In der Arbeit [1] von Debes, Kerstan, Liemant, Matthes wurde für stabile nichtgitterförmige kritische Schauerverteilungen D die Struktur der Menge aller stationären schauerinvarianten Verteilungsgesetze bestimmt. Weiterhin wurde nachgewiesen, daß für alle L aus einer Menge $\mathbf{S}$ näherungsweise stationärer Anfangsverteilungen die iterierte Ausschauerung mit Hilfe des homogenenen Schauerfeldes $[D]$ zur schwachen Konvergenz gegen stationäre schauerinvariante Verteilungsgesetze führt. Unter den obigen Annahmen lassen sich somit die auf Doob und Dobruschin zurückgehenden Ergebnisse für den Spezialfall der räumlich homogenen zufälligen unabhängigen Verschiebungen, d. h. für den Fall $D(\chi(R^s)=1)=1$ verallgemeinern.

In der Arbeit [5] von Kerstan, Matthes und Prehn wurde das obige räumlich homogene kritische Verzweigungsmodell dahingehend verallgemeinert, daß markierte Teilchen, d. h. Teilchen verschiedener Typs, betrachtet wurden, und zwar wurde ein höchstens abzählbarer Markenraum K zugelassen. Die stochastische Dynamik des Verzweigungsmodells wird nun durch eine Familie $\{D_{(k)}, k \in K\}$ von Verteilungsgesetzen zufälliger Systeme markierter Teilchen bestimmt, und zwar beschreibt $D_{(k)}$ das Verteilungsgesetz der Tochtergeneration eines im Nullpunkt liegenden Mutterteilchens des Typs k. Es zeigt sich,

PLISKA Studia mathematica bulgarica. Vol. 7, 1984, p. 34—54.

daß die Ergebnisse aus [1] vollständig übertragen werden können, wenn alle $D_{(k)}$, $k \in K$ kritisch sind, d. h. wenn die mittlere Anzahl der Nachkommen eines Teilchens für alle Typen k konstant gleich Eins ist. Diese Kritizitätsannahme ist natürlich noch recht speziell. Sie wurde nach dem Muster der kritischen Galton-Watson-Prozesse mit Typen in der Arbeit [10] von Prehn und Röder im Falle endlicher Markenraum K und schließlich in der Arbeit [12] von Warmuth für höchstens abzählbaren Markenraum verallgemeinert, wobei gegenüber der Arbeit [5] eine ganze Reihe neuer begrifflicher und beweistechnischer Schwierigkeiten auftreten. Man kann die Arbeiten [5], [10] und [12] auch als einen ersten Vorstoß zu räumlich inhomogenen kritischen Verzweigungsmodellen mit unendlichen Populationen auffassen, deren Studium im allgemeinen Fall in den Arbeiten [7], [8] von Liemant begonnen wurde. Die vorliegende Arbeit überträgt die Ergebnisse aus (5) auf den Fall beliebigen beschränkter vollständiger separabler Markenräume $[K, \rho_K]$. Hierbei benutzen wir eine recht scharfe Version der schwachen asymptotischen Gleichverteilung von Folgen räumlich homogener zufälliger Verschiebungen, die nur räumliche Glättungen berücksichtigt. Ebenso wie in [5], [10], und [12] gehen wir auch hier nicht auf die Frage nach Kriterien für die Stabilität des Verzweiguugsmodells ein. Diese Frage (vgl. hierzu [3] und [8]) erfordert ganz andere Hilfsmittel und Überlegungen. Kernpunkt dieser Ausführungen ist der Approximationssatz 3.3., aus dem mit Hilfe der asymptotischen Schaueranalyse 4.4 der Approximationssatz 5.1. hergeleitet wird. Die vorliegende Arbeit stellt Hilfsmittel für die Arbeit [11] des Verfassers in der, das in [1] behandelte Verzweigungsmodell dahingehend verallgemeinert wird, daß der bekannte Begriff des Bellmann-Harris-Prozesses als Ausgangspunkt dient.

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit können (vgl. [1, 5, 4]) ohne grundsätzlich neue Schwierigkeiten auf den Fall verallgemeinert werden, daß an die Stelle eines Euklidischen Raumes eine dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügende lokalkompakte, aber nicht kompakte, abelsche topologische Gruppe tritt.

In den Beweisen werden z. T. ohne Zitate Grundbegriffe und Ergebnisse aus der Theorie der stochastischen Punktprozesse benutzt, wobei in der Regel auf die zusammenfassenden Darstellungen [9, 4] und die dort benutzten Bezeichnungen zurückgegriffen wird.

1. Grundbegriffe. Im folgenden bezeichne $[A, \rho_A]$ das direkte Produkt eines Ortraumes der Gestalt R^s, $s \geqq 1$, mit einem beschränkten vollständigen separablen Markenraum $[K, \rho_K]$. Die grundlegenden Objekte wie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, M, N, $\mathfrak{M}$, $\mathbf{P}$ und $\mathfrak{P}$ beziehen sich stets auf diesen Phasenraum $[A, \rho_A]$. Wie üblich kennzeichnen wir das bezüglich des Ortsraumes R^s gebildete Objekt durch den oberen Idex$^\times$. Somit fällt $\mathfrak{A}$ mit der σ-Algebra $\mathfrak{R}^s$ der Borellschen Teilmengen von R^s zusammen. Das Lebesguesche Maß auf $\mathfrak{R}^s$ wird im folgenden stets mit μ bezeichnet.

Wir setzen $\Phi^\times = \Phi((.) \times K)$, $\Phi \in M$, und bezeichnen das Bild eines H auf $\mathfrak{M}$ bezüglich der meßbaren Abbildung $\Phi \rightarrow \Phi^\times$ von M auf $M^\times$ mit $H^\times$. Abweichend von der Schreibweise in [9] bezeichnen wir das Intensitätsmaß von H mit $\Lambda(H, (.))$. Wir sagen, H sei von k-ter Ordnung ($k = 1, 2, \ldots$), falls $\int (\Phi(X))^k H(d\Phi) < +\infty$ $(X \in \mathfrak{B})$ erfüllt ist. Offensichlich ist H genau dann von k-ter Ordnung, wenn dies für $H^\times$ zutrifft.

Jedes Zählmaß Φ in M besitzt eine Darstellung $\Phi(.) = \Sigma_{i \in I}\, \delta([x_i, k_i], (.))$ als Summe einer höchstens abzählbarer Familie Diracscher Maße. Für alle x in R^s setzen wir nun $(T_x\Phi)(.) = \Sigma_{i \in I}\, \delta([x_i - x, k_i], (.))$ und definieren auf diesem

Wege den Verschiebungsoperator T_x in M. Ein Maß H auf $\mathfrak{M}$ heißt stationär, wenn $H(.)=H(T_x\Phi\in(.))$ $(x\in R^s)$ erfüllt ist. Ein solches Maß H ist genau dann von erster Ordnung, wenn ein endliches Maß γ_H auf der σ-Algebra der Borellmengen des Markenraumes existiert, so daß $\Lambda(H,(.))=(\mu\otimes\gamma_H)(.)$ gilt. Zur Abkürzung schreiben wir $\gamma_H(K)=i_H$ und setzen $i_H=+\infty$, falls H nicht von erster Ordnung ist. Für alle stationären Maße H auf $\mathfrak{M}$ gilt somit $i_H=\int\Phi^\times([0,1)^s)H(d\Phi)$. Die u. U. unendliche Zahl i_H heißt Intensität von H.

Jede meßbare Abbildung $D_{(.)}$ von $[K,\mathfrak{K}]$ in $[\mathbf{P},\mathfrak{P}]$ erzeugt vermöge $[D]_{([x,k])}=D_{(k)}(T_{-x}\chi\in(.))$ $([x,k]\in A)$ eine meßbare Abbildung von $[A,\mathfrak{A}]$ in $[\mathbf{P},\mathfrak{P}]$ d. h. ein homogenes Schauerfeld $[D]$ auf $[A,\rho_A]$ mit dem Phasenraum $[A,\rho_A]$. Bekanntlich (vgl. Satz 11. 1. 1. in [9]) ist das Schauerfeld $[D]$ genau dann stetig, wenn das Schauerfeld $k\to D_{(k)}$ auf $[K,\rho_K]$ mit dem Phasenraum $[A,\rho_A]$ diese Eigenschaft besitzt.

Wie üblich bezeichnen wir das Resultat der „Ausschauerung" mit $H[D]=H_{[D]}$ falls $H([D]_{(\Phi)}$ existiert nicht$)=0$ erfüllt ist. In diesem Falle gilt (vgl. Formel 4.2.2. in [9])

1.1. $\Lambda(H[D],X)=\int\Lambda([D]_{([x,k])},X)\,\Lambda(H,(d[x,k]))$, $(X\in\mathfrak{A})$. Umgekehrt gilt (vgl. Satz 4.2.3 in [9].

1.2. Ist $\int\Lambda([D]_{(x,k)},X)\Lambda(H,(d[x,k]))$ für alle X in $\mathfrak{B}$ endlich, so existiert das Maß $H[D]$ und ist von 1. Ordnung.

Ist die Bedingung $D_{(k)}(\chi$ endlich$)=1$, $k\in K$, erfüllt, so können wir vermöge

$$D^{[0]}_{(k)}(.)=\delta(\delta([[0,\ldots,0],k]),(.)),\quad k\in K,$$

$$D^{[n+1]}_{(k)}=(D^{[n]})[D],\quad k\in K,\ n=0,1,2,\ldots,$$

induktiv die Schauerpotenzen $D^{[n]}_{(.)}$, $n=0,1,2,\ldots$, einführen und erhalten $D^{[n]}_{(k)}(\chi$ endlich$)=1$

$$(D^{[n]}_{k})[D^{[m]}]=D^{[n+m]}_{(k)},\quad k\in K,\ n,m=0,1,2,\ldots$$

Es bezeichne D die Menge derjenigen Schauerfelder auf $[K,\rho_K]$ mit dem Phasenraum $[A,\rho_A]$, die der Bedingung $\Lambda(D_{(k)},A)=1$, $(k\in A)$ genügen. Vermöge 1.1.1. wird $\mathbf{D}$ durch die Operation $[D_1,D_2]\to(D_2)[D_1]=((D_2)_{(.)})_{[D_1]}$ eine Halbgruppe mit dem neutralen Element

$$k\to\delta(\delta[[0,\ldots,0],k]),\quad k\in K.$$

Insbesondere liegen die Schauerpotenzen von Elementen aus $\mathbf{D}$ immer wieder in $\mathbf{D}$.

Es bezeichne $\mathbf{S}$ die Menge derjenigen Verteilungsgesetze L auf $\mathfrak{M}$, die den folgenden beiden Bedingungen genügen:

S1) Es existiert eine meßbare nichtnegative reelle Funktion s_L auf $M^\times$ mit der Eigenschaft

$$\sup_{x\in R^s}\int\left|\frac{\Phi^\times([-m,m)^s+x)}{(2m)^s}-s_L(\Phi^\times)\right|L^\times(d\Phi^\times)\to 0,\quad m\to\infty.$$

S2) Es existiert ein endliches Maß τ auf $\mathfrak{K}$ mit der Eigenschaft $\Lambda(L)\leq\mu\otimes\tau$ Offenbar ist die verallgemeinerte individuelle Intensität $s_L(\Phi)$ bis auf Werte auf $L^\times$ — Nullmengen eindeutig bestimmt und es gilt $\int s_L(\Phi^\times)L^\times(d\Phi^\times)<+\infty$.

Wir bezeichnen die bezüglich $L^\times$ gebildete Verteilung von $s_L(\Phi^\times)$ mit σ_L.

Ebenso wie der Satz 11.7.8. und 11.7.5 in [9] zeigt man

1.3. Für alle L in **S** und alle $D_{(.)}$ in **D** existiert das Verteilungsgesetz $L[D]$ und es gilt $L[D] \in \mathbf{S}$, $\sigma_{L[D]} = \sigma_L$

1.4. Ein stationäres Verteilungsgesetz L auf $\mathfrak{M}$ liegt genau dann in **S**, wenn es von erster Ordnung ist, d. h. wenn seine Intensität i_H endlich ist.

2. Schwach asymptotisch gleichverteilte Folgen räumlich homogener zufälliger Verschiebungen. Bekanntlich versteht man unter einem stochastischen Kern von einem meßbaren Raum $[X_1, \varkappa_1]$ in einem meßbaren Raum $[X_2, \varkappa_2]$ eine Abbildung $x \to \omega(x, (\,.\,))$ von X_1 in die Menge aller Verteilungsgesetze auf $\varkappa_2$, für die sämtliche reellen Funktionen $x \to \omega(x, Y)$ $(Y \in \varkappa_2)$ $\varkappa_1$-meßbar sind. Für alle Maße ν auf $\varkappa_1$ erhalten wir dann gemäß $(\omega * \nu)(Y) = \int \omega(a, Y)\nu(da)$ $(Y \in \varkappa_2)$ ein Maß $\omega * \nu$ auf $\varkappa_2$. Ist schließlich γ ein stochastischer Kern von $[X_2, \varkappa_2]$ in einen meßbaren Raum $[X_3, \varkappa_3]$, so erhalten wir vermöge $(\gamma * \omega)(x, (.))$ $= \gamma * (\omega(x, (\,.\,)))$, $(x \in X_1)$ einen stochastischen Kern $\gamma * \omega$ von $[X_1, \varkappa_1]$ in $[X_3, \varkappa_3]$. Dieser Kern $\gamma * \omega$ heißt die Faltung von γ mit ω. Ist nun $[X_1, \varkappa_1] = [X_2, \varkappa_2]$, so beschreibt ω eine zufällige Veschiebung in $[X_1, \varkappa_1]$. Vermöge

$$\omega^{[0]}(x, (\,.\,)) = \delta(x), \quad x \in X_1,$$

$$\omega^{[n+1]} = \omega * \omega^{[n]}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

können wir dann die Faltungspotenzen $\omega^{[n]}$, $n = 0, 1, \ldots,$ von ω einführen.

Eine zufällige Verschiebung ω in $[A, \mathfrak{A}]$ heißt räumlich homogen, falls sie der Bedingung

$$\omega([x+y, k], (\,.\,)) = \omega([x, k], (\,.\,)+y), \quad [x, k] \in A, y \in R^s,$$

genügt, wobei wir zur Abkürzung

$$[z, l]+y = [z+y, l], \ ([z, l] \in A, y \in R^s) \text{ schreiben.}$$

Offenbar bildet die Menge Ω aller räumlich homogenen Verschiebungen in $[A, \mathfrak{A}]$ bezüglich der Faltung eine Halbgruppe mit dem neutralen Element

$$[x, k] \to \delta([x, k], (\,.\,)), \quad [x, k] \in A.$$

Man erkennt mühelos:

2.1. Die Zuordnung $\omega \to \omega^+$ mit $\omega^+(k, (\,.\,)) = \omega([0, \ldots, 0], k], (\,.\,))$, $(k \in K)$ vermittelt eine umkehrbar eindeutige Abbildung von Ω auf die Menge aller stochastischen Kerne von $[K, \mathfrak{K}]$ in $[A, \mathfrak{A}]$.

2.2. Vermöge $k \to (p(\omega))(k, L) = \omega^+(k.\ R^s \times L)$, $(k \in K, L \in \mathfrak{K})$ erhalten wir eine bezüglich der Faltungsoperation homomorphe Abbildung $\omega \to p(\omega)$ von Ω in die Menge aller zufälligen Verschiebungen in $[K, \mathfrak{K}]$.

2.3. Vermöge $[x, k] \to \sigma^1([x, k], (\,.\,)) = ((\delta(x)) * \sigma) \otimes \delta(k)$, $([x, k] \in A)$ erhalten wir eine isomorphe Einbettung $\sigma \to \sigma^1$ der Halbgruppe aller Verteilungsgesetze σ auf $\mathfrak{R}^s$ (mit Faltung als Multiplikation) in die Halbgruppe Ω.

2.4. Vermöge $\omega_D^+(k, (\,.\,)) = \Lambda(D_{(k)}, (\,.\,))$ $(k \in K)$ erhalten wir eine homomorphe Abbildung $D \to \omega_D^+$ der Halbgruppe **D** in die Halbgruppe Ω.

2.5. Vermöge $(Q_\tau)_{(k)} = Q_{\tau^+(\gamma, (.))} = \int \delta(\delta(a), (\,.\,))\tau^+(k, da)$, $(\tau \in \Omega, k \in K)$ erhalten wir eine isomorphe Einbettung der Halbgruppe Ω in die Halbgruppe **D** und es gilt $\omega_{Q_\tau} = \tau$, $(\tau \in \Omega)$.

2.6. Liegt D in **D** und ist L ein stationäres Maß auf von 1. Ordnung, so gilt $\gamma_{L[D]} = p(\omega_D) * \gamma_L$.

Eine Folge (ω_n) von Elementen aus Ω heißt asymptotisch gleichverteilt, falls $\| \omega_n(a, (\,.\,)) - \omega_n(b, (\,.\,)) \| \to 0$, $n \to \infty$, $(a, b \in A)$ erfüllt ist. Hierbei (und auch im folgenden) bezeichnet $\| \;\|$ die totale Variation. Offerbar gilt

2.7. Ist (ω_n) eine asymptotisch gleichverteilte Folge von Elementen aus Ω und gilt $p(\omega_n) * \rho = \rho$, $(n = 1, 2, \ldots)$ für ein Verteilungsgesetz ρ auf $\mathfrak{K}$, so ist $\| (p(\omega_n))(k, (\,.\,)) - \rho \| \to 0$, $n \to \infty$, $(k \in K)$.

Auf dem üblichen Wege (vgl. etwa Satz 11.8.3 in [9] erhält man.

2.8. Eine Folge (ω_n) von Elementen aus Ω ist genau dann asymptotisch gleichverteilt, wenn für alle Verteilungsgesetze σ_1, σ_2 auf $\mathfrak{A}$, die Bedingung $\| \omega_n * \sigma_1 - \omega_n * \sigma_2 \| \to 0$, $n \to \infty$ erfüllt ist. Hieraus ergibt sich unmittelbar

2.9. Ist (ω_n) eine asymptotisch gleichverteilte Folge von Elementen aus Ω, so ist für alle ω aus Ω auch $(\omega_n * \omega)$ asymptotisch gleichverteilt.

Ebenso wie die Aussage 11.8.4 in [9] zeigt man

2.10. Für alle asymptotisch gleichverteilten Folgen (ω_n) von Elementen aus Ω, alle kompakten Teilmengen X von R^s und alle k, l aus K gilt

$$\sup_{x \in X} \| \omega_n^+(k, (\,.\,)) - \omega_n^+(l, (\,.\,) - x) \| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Eine Folge (ω_n) von Elementen aus Ω heißt schwach asymptotisch gleichverteilt, falls für alle bezüglich μ absolut stetigen Verteilungsgesetze σ auf $\mathfrak{R}^s$ die räumlich geglättete Folge $(\omega_n * \sigma^!)$ asymptotisch gleichverteilt ist.

Auf den üblichen Weg (vgl. etwa Satz. 11.9.1 in [9] erhält man

2.11. Eine Folge (ω_n) von Elementen aus Ω ist genau dann schwach asymptotisch gleichverteilt, wenn für alle k, l aus K und alle bezüglch μ absolut stetigen Verteilungsgesetze σ_1, σ_2 auf $\mathfrak{R}$ die Bedingung

$$\| \omega_n * (\sigma_1 \otimes \delta(k)) - \omega_n * (\sigma_2 \otimes \delta(l)) \| \to 0, \quad n \to \infty$$

erfüllt ist.

Für alle ω aus Ω und alle Verteilungsgesetze σ auf $\mathfrak{R}^s$ gilt $p(\omega * \sigma^! = p(\omega) * p(\sigma^!) = p(\omega)$. Somit gilt die Aussage von 2.7 auch für schwach asymptotisch gleichverteilte Folgen (ω_n).

3. Eine Verschärfung des Dobruschinschen Konvergenzsatzes. Wie üblich setzen wir zur Abkürzung für alle X aus $\mathfrak{A}$ alle endlichen Folgen $X_1, \ldots, X_n$ von Mengen aus $\mathfrak{B}$ und alle endlichen Maße H_1, H_2 auf $\mathfrak{M}$

$$_X\| H_1 - H_2 \| = \| H_1(_X\Phi \in (\,.\,)) - H_2(_X\Phi \in (\,.\,)) \|, \quad \| H_1 - H_2 \|_{X_1, \ldots, X_m}$$
$$= \| H_1([\Phi(X_1), \ldots, \Phi(X_m)] \in (\,.\,)) - H_2([\Phi(X_1), \ldots, \Phi(X_m)] \in (\,.\,)) \|$$

3.1. Theorem. *Genügen zwei Verteilungsgesetze P, L aus S der Bedingung $\sigma_P = \sigma_L$, so gilt für alle asymptotisch gleichverteilten Folgen (ω_n) von Elementen aus Ω und alle X aus $\mathfrak{B}$*

$$\sup_{x \in R^s,\, D \in \mathbf{D}} {}_{(X+x)}\| (P[Q_{\omega_n}]) [D] - (L([Q_{\omega_n}]) [D] \| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Beweis. 1. Wir greifen uns eine kompakte Teilmenge Y von R^s so heraus, daß $X \subseteq Y \times K$ erfüllt ist. Da nun für alle endlichen signierten Maße H auf $\mathfrak{M}$ und alle x in R^s ${}_{(X+x)}\| H \| \leqq {}_{((Y+x)\times K)}\| H \|$ erfüllt ist, können wir von jetzt ab annehmen, es gelte sogar $X = Y \times K$, Y kompakt.

2. Es sei k_0 ein fest gewähltes Element aus K. In Gestalt von $\Phi \to \Phi^0 = \Phi^\times \otimes \delta(k_0)$ erhalten wir dann eine meßbare Abbildung von $[M, \mathfrak{M}]$ in sich.

Alle in markierten Punkten aus Φ auftretenden Marken k werden durch k_0 ersetzt. Wir bezeichnen das Bild eines Maßes H auf $\mathfrak{M}$ bezüglich der Abbildung $\Phi \to \Phi^0$ mit H^0.

Ist nun H ein Verteilungsgesetz auf $\mathfrak{M}$ zu dem ein endliches Maß τ auf $\mathfrak{K}$ existiert, so daß $\Lambda[H] \leqq \mu \otimes \tau$ erfüllt ist, so gilt

$$\sup_{x \in R^s,\, D \in \mathbf{D}} {}_{((Y+x)\times K)} \| (H[Q_{\omega_n}])[D] - ((H^0)[Q_{\omega_n}])[D] \| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Setzen wir $\omega'([x, k], (\,.\,)) = \omega([x, k_0], (\,.\,))$, $(x \in R^s, k \in K, \omega \in \Omega)$ so gilt offenkundig $(H^0)[Q_{\omega_n}] = H[Q_{\omega_n}]$. Es sei $v_n(a, (\,.\,)) = \omega_n(a, (\,.\,)) \Lambda \omega'_n(a, (\,.\,)$, $a \in A$, $n = 1, 2, \ldots$, wobei sich die Operation Λ der Bildung der unteren Grenze auf die natürliche Halbordnung in der Menge aller endlichen Maße auf $\mathfrak{A}$ bezieht. Es sei weiterhin $\alpha_n(a, (\,.\,)) = \omega_n(a, (\,.\,)) - v_n(a, (\,.\,)) \beta_n(a, (\,.\,)) = \omega'_n(a(\,.\,)) - v_n(a, (\,.\,))$. Die Maße $\alpha_n[a, (\,.\,))$, $\beta_n(a, (\,.\,))$ sing in bezug aufeinander rein singulär. Somit gilt für alle a in A und $n = 1, 2, \ldots$

$$(*) \qquad \alpha_n(a, A) + \beta_n(a, A) = \| \alpha_n(a, (\,.\,)) - \beta_n(a, (\,.\,)) \| = \| \omega_n(a, (\,.\,)) - \omega'_n(a, (\,.\,)) \|.$$

Ferner ist

$$([Q_{\omega_n}] \circ [D])_{(a)} = (Q_{\omega_n(a, (.))})[D] = (Q_{v_n(a, (.))})[D] + (Q_{\alpha_n(a, (.))})[D],$$

$$([Q_{\omega'_n}] \circ [D])_{(a)} = (Q_{\omega'_n(a, (.))})[D] = (Q_{\sigma_n(a, (.))})[D] + (Q_{\beta_n(a, (.))})[D].$$

Gestützt auf 1.2 erkennt man die Existenz der ausgeschauerten Verteilungsgesetze $(H[Q_{\omega_n}])[D]$, $(H[Q_{\omega'_n}])[D]$. Mit Hilfe von 4.2.8 in [9] ergibt sich nun

$$_{((Y+x)\times K)} \| (H[Q_{\omega_n}])[D] - ((H^0)[Q_{\omega_n}])[D] \|$$

$$\leqq 2\mu(Y) \int (\alpha_n([[0, \ldots, 0|, k], A) = \beta_n([[0, \ldots, 0], k], A))\, \tau(dk).$$

Die behauptete Konvergenz ergibt sich nun mit Hilfe des Satzes von Lebesgue aus $(*)$.

3. Für alle Verteilungsgesetze V aus $\mathbf{S}$ liegt auch V^0 in $\mathbf{S}$ und es gilt $\sigma_V = \sigma_{V^0}$. Vermöge 2. können wir also im folgenden o. B. d. A. annehmen, es sei

$$P = P^0, \quad L = L^0.$$

4. Es sei H ein Verteilungsgesetz auf $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft $H = H_0$. Wir wollen weiterhin annehmen. $H^\times$ sei von beschränkter Intensität, d. h. für alle kompakten Teilmengen C des R^s gilt

$$\sup_{x \in R^s} \Lambda(H, (C+x)\times K) < +\infty.$$

Für alle D aus $\mathbf{D}$ ist dann

$$\int \Lambda([D]_{(a)}, C \times K) \Lambda(H, (da)) \leqq \sup_{y \in R^s} \Lambda(H, (C+y)\times K) < +\infty,$$

so daß gemäß 1.2 das ausgeschauerte Verteilungsgesetz $H[D]$ existiert. Wir zeigen nun: Für alle ω in Ω gilt

$$\sup_{x \in R^s,\, D \in \mathbf{D}} {}_{((Y+x)\times K)} \| (H[Q_{\omega_n}])[D] - (H[Q_{\omega_n * \omega}])[D] \| \; n \to \infty,$$

Anknüpfend an die in 2. eingeführten Bezeichnungen setzen wir

$$\omega_n(a, (\,.\,)) \wedge (\omega_n * \omega)(a, (\,.\,)) = v_n(a, (\,.\,)),$$

$$\omega_n(a, (\,.\,)) - v_n(a, (\,.\,)) = \alpha_n(a, (\,.\,)),$$

$$(\omega_n * \omega)(a, (\,.\,)) - v_n(a, (\,.\,)) = \beta_n(a, (\,.\,))$$

und erhalten ebenso wie dort

$$_{((Y+x)\times K)}\| (H[Q_{\omega_n}])[D] - (H[Q_{\omega_n * \omega}])[D] \|$$

$$\leqq 2 \sup_{x \in R^s} \Lambda(H, (Y+x)\times K)\,(\alpha_n([[0, \ldots, 0], k_0], A) + \beta_n([[0, \ldots, 0], k_0], A).$$

Ebenso wie in 2. schließt man nun mit Hilfe der asymptotischen Gleichverteilung von (ω_n) auf

$$\alpha_n([[0, \ldots, 0], k_0], A) + \beta_n([[0, \ldots, 0], k_0], A) \to 0, \quad n \to \infty$$

und erhält die angegebene Konvergenzaussage.

5. Für jede natürliche Zahl m setzen wir $Z_m = [-m, m)^s$, $I_m = \{[2ml_1, \ldots, 2ml_s], l_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ für $1 \leqq i \leqq s\}$.

Offenbar bildet dann $\{Z_m + x, x \in I_m\}$ stets eine abzählbare Überdeckung von R^s durch paarweise disjunkten Mengen.

Wir denken uns nun m fest gewählt und setzen $h(y) = x$ falls $x \in I_m$ und $y \in (x + Z_m)$. Auf diesem Wege erhalten wir eine meßbare Abbildung h von R^s in sich: In allen Kuben $Z_m + x$, $x \in I_m$ werden die Punkte in den jeweiligen Mittelpunkt verschoben. Vermöge $[x, k] \to \theta_{([x,k])} = \delta(\delta([h(x), k_0]))$, $([x, k] \in A)$ erhalten wir ein deterministisches Schauerfeld θ auf $[A, \rho_A]$ mit dem Phasenraum $[A, \rho_A]$: Jeder Punkt $[x, k]$ aus A wird in den Punkt $[h(x), k_0]$ verschoben.

Für jedes Φ aus M und alle natürlichen Zahlen m setzen wir

$$^m\Phi(\,.\,) = \sum_{x \in I_m} \Phi^\times(Z_m + x)\delta([x, k_0], (\,.\,)).$$

Für jedes Maß H auf $\mathfrak{W}$ bezeichnen wir sein Bild bezüglich der meßbaren Abbildung $\Phi \to {}^m\Phi$ von $[M, \mathfrak{M}]$ in sich mit ^mH. Offenbar ist stets

$$^m(H^0) = {}^mH = ({}^mH)^0, \quad {}^mH = H_\theta.$$

Ist $H^\times$ von beschränkter Intensität, so gilt dies auch für $(^mH)^\times$. Ist nämlich C irgendeine kompakte Teilmenge von R^s, so existiert eine endliche Überdeckung von C durch Mengen $Z_m + x_1, \ldots, Z_m + x_l$ mit $x_1, \ldots, x_l \in I_m$ und wir erhalten

$$\sup_{y \in R^s} \Lambda((^mH)^\times, (C+y)) \leqq l \sup_{x \in R^s} \Lambda(H^\times, (Z_m + y)) < +\infty.$$

6. Es sei nun H ein Verteilungsgesetz auf $\mathfrak{W}$ mit den beiden Eigenschaften:

$H^0 = H$, $H^\times$ ist von beschränkter Intensität. Wir zeigen, daß die Ausschauerung von H mit Hilfe von θ im folgenden Sinne gleichmäßig asymptotisch vernachlässigt werden kann. Es ist

$$\sup_{x \in R^s,\, D \in \mathfrak{D}} {}_{((Y+x)\times K)}\| (H[Q_{\omega_n}])[D] - ((H_\theta)[Q_{\omega_n}])[D] \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Es sei ε irgendeine positive reelle Zahl. Wir greifen uns nun eine natürliche Zahl k so heraus, daß $k>2m$, $(2k)^{-s}\mu(Z_{k+2m}\setminus Z_{k-2m})<\varepsilon$ erfüllt ist. Wir setzen $\sigma=(2k)^{-s}\mu((\,.\,)\cap Z_k$, $\sigma'=(2k)^{-s}\mu((\,.\,)\cap Z_{k-2m})$, $\sigma''=(2k)^{-s}\mu((\,.\,)\cap Z_{k+2m})$. Es ergibt sich

$$([D]\circ[Q_{\omega_n}*\sigma'])_{([x,k_0])}=(Q_{\omega_n}*((\delta(x)*\sigma')\otimes\delta(k_0)))[D]+(Q_{\omega_n}*((\delta(x)*(\sigma-\sigma'))\otimes\delta(k_0)))[D]$$

sowie

$$([D]\circ[Q_{\omega_n}*\sigma']\circ\theta)_{([x,k_0])}=(Q_{\omega_n}*((\delta(x)*\sigma')\otimes\delta(k_0)))[D]$$
$$+(Q_{\omega_n}*((\delta(h(x))*\sigma-\delta(x)*\sigma'\otimes\delta(k_0)))[D].$$

Erneute Anwendung von 4.2.8 in [9] ergibt jetzt für $n=1,2,\ldots$

$$\sup_{x\in R^s,\,D\in\mathbf{D}}{}_{((Y+x)\times K)}\|(H[Q_{\omega_n}*\sigma'])[D]-((^mH)[Q_{\omega_n}*\sigma'])[D]\|<4\varepsilon\sup_{x\in R^s}\Lambda(H^\times,(Y+x)).$$

Gestützt auf 4. und 5. ergibt sich somit

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R^s}\sup_{D\in\mathbf{D}}{}_{((Y+x)\times K)}\|(H[Q_{\omega_n}])[D]-((^mH)[Q_{\omega_n}])[D]\|\leq 4\varepsilon\sup_{x\in R^s}\Lambda(H^\times,(Y+x)),$$

woraus die behauptete Konvergenz folgt.

7. Es sei W ein Verteilungsgesetz auf $\mathfrak{M}$ und m eine feste natürliche Zahl. Es gelte $W^0=W$ sowie $\Lambda(W^\times,(Z_m+x))\leq\eta\mu(Z_m)$ für alle x in I_m.

Da jede kompakte Teilmenge C von R^s eine endliche Überdeckung der Gestalt $\{Z_m+x_i, i=1,\ldots,k\}$ mit $x_1,\ldots,x_k\in I_m$ zuläßt, ist das Verteilungsgesetz $W^\times$ von beschränkter Intensität.

Wir zeigen nun die Gültigkeit von

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{x\in R^s,\,D\in\mathbf{D}}((W[Q_{\omega_n}])[D])(\Phi((X+x)\times K)>0)\leq\eta\mu(X)$$

für alle beschränkten Mengen X in $\mathfrak{R}^s$.

Zum Beweis führen wir zunächst einmal vermöge

$$\pi_{[y,k]}=Q_{(2m)^{-s}\mu((*)\cap(Z_m+x))\otimes\delta(k_0)}\quad\text{für } x\in I_m,\ y\in Z_m+x$$

ein Schauerfeld π auf $[A,\rho_A]$ mit dem Phasenraum $[A,\rho_A]$ ein: Jeder markierte Punkt $[y,k]$ aus Z_m+x, $x\in I_m$ wird „auf gut Glück" in den Kubus Z_m+x geworfen, wobei die Marke k durch k_0 ersetzt wird. Offenkundig gilt $W_\pi=(^mW)_\pi$, $^m(W_\pi)={}^mW$. Setzen wir nun $W_\pi=V$, so ergibt sich

$$\Lambda(V,(X\times K))=\int\Lambda(\pi_{[y,k]},(X\times K))\Lambda(W,(d[y,k]))\leq\eta\sum_{x\in I_m}\mu(X\cap(Z_m+x))=\eta\mu(X).$$

Gemäß 6. erhalten wir nun

$$\sup_{x\in R^s,\,D\in\mathbf{D}}{}_{((Y+x)\times K)}\|(W[Q_{\omega_n}])[D]-(V[Q_{\omega_n}])[D]\|$$
$$\leq\sup_{x\in R^s,\,D\in\mathbf{D}}{}_{((Y+x)\times K)}\|(W[Q_{\omega_n}])[D]-((^mW)[Q_{\omega_n}])[D]\|$$
$$+\sup_{x\in R^s\,D\in\mathbf{D}}{}_{((Y+x)\times K)}\|(V[Q_{\omega_n}])[D]-((^mV)[Q_{\omega_n}])[D]\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

da Y eine beliebige kompakte Teilmenge von R^s ist. Hieraus folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s,\, D\in \mathbf{D}} (W[Q_{\omega_n}])[D](\Phi((X+x)\times K)>0)$$

$$\leqq \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s,\, D\in \mathbf{D}} \Lambda((V[D])[D],\ ((X+x)\times K))$$

$$\leqq \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s,\, D\in \mathbf{D}} \int \Lambda(V, (X+x-y)\times K)\,\Lambda((Q_{\omega_n([[0,\ldots,0],\, k_0],\,(.))})[D], (dy)\times K)$$

$$\leqq \eta\mu(X) \limsup_{n\to\infty} \sup_{D\in \mathbf{D}} \Lambda((Q_{\omega_n([[0,\ldots,0],\, k_0],\,(.))})[D],\ A) = \eta\mu(X).$$

8. Es sei nun Q ein Verteilungsgesetz aus $\mathbf{S}$ mit der Eigenschaft $Q^0 = Q$. Für jedes Φ aus M setzen wir

$$\Phi_m = \sum_{x\in I_m} [s_Q(\Phi^\times)\,\mu(Z_m)]\,\delta([x, k_0]),$$

worin $[c]$ wie üblich den ganzen Anteil von c bezeichnet.

Zu jedem Φ in M existieren wohlbestimmte Zählmaße Φ', Φ'' derart, daß

$$\Phi' \wedge \Phi'' = \sigma, \quad {}^m\Phi + \Phi'' = \Phi_m + \Phi'$$

d. h. also

$${}^m\Phi = ({}^m\Phi \wedge \Phi_m) + \Phi', \quad \Phi_m = {}^m\Phi \wedge \Phi_m + \Phi''$$

erfüllt sind. Die Abbildungen $\Phi \to \Phi_m$, $\Phi \to \Phi'$, $\Phi \to \Phi''$ sind ebenso wie $\Phi \to {}^m\Phi$ bezüglich $\mathfrak{M}$ meßbar. Wir bezeichnen die bezüglich Q gebildeten Verteilungen von Φ_m bzw. $\Phi' + \Phi''$ mit Q_m bzw. Q_0.

Offenbar hängt dann Q_m nur von σ und m ab. Wie man leicht sieht ist $\Lambda(Q_0) \leqq \Lambda^Q({}^mQ) + \Lambda(Q_m)$. Zusammen mit $({}^mQ)^\times$ und $(Q_m)^\times$ ist auch $(Q_0)^\times$ von beschränkter Intensität und es gilt $(Q_0)^0 = Q_0$. Für alle G aus $\mathbf{D}$ existieren damit für Q-fast alle Φ die Verteilungsgesetze $[G]_{(\Phi')}$, $[G]_{({}^m\Phi + \Phi_m)}$, $[G]\,(\Phi'')$. Überdies ist wegen 4.1.3 in [9] die Abbildung $\Phi \to [G]_{(\Phi')} \otimes [G]_{({}^m\Phi \wedge \Phi^m)} \otimes [G]_{(\Phi'')}$ aus $[M, \mathfrak{M}]$ in die Menge aller Verteilungsgesetze auf $\mathfrak{M}^{\otimes 3}$ meßbar. In Gestalt von

$$U = \int ([G]_{(\Phi')} \otimes [G]_{({}^m\Phi \wedge \Phi_m)} \otimes [G]_{(\Phi'')})(\,.\,)\,Q(d\Phi)$$

erhalten wir das Verteilungsgesetz auf $\mathfrak{M}^{\otimes 3}$ eines zufälligen Elementes $[\psi_1, \psi_2, \psi_3]$. Bezüglich dieses Verteilungsgesetzes besitzt $\psi_1 + \psi_2$ die Verteilung $\int [G]_{(\Phi' + ({}^m\Phi \wedge \Phi_m))}(\,.\,)\,Q(d\Phi)$ d. h. die Verteilung $({}^mQ)[G]$. Entsprechend besitzen $\psi_2 + \psi_3$ bzw. $\psi_1 + \psi_3$ bezüglich U die Verteilungen $(Q_m)[G]$ bzw. $(Q_0)[G]$. Für alle x in R^s erhalten wir

$$U_{(((Y+x)\times K)}\,(\psi_2 + \psi_3) \in (\,.\,),\ \psi_1^\times(Y+x) = 0 = \psi_3^\times(Y+x))$$

$$= U_{(((Y+x)\times K)}\,(\psi_1 + \psi_2) \in (\,.\,),\ \psi_1^\times(Y+x) = 0 = \psi_3^\times(Y+x))$$

Somit gilt

$$_{((Y+x)\times K)}\|(Q_m)[G] - ({}^mQ)[G]\| \leqq \| U_{((Y+x)\times K}(\psi_2 + \psi_3) \in (\,.\,),\ (\psi_1 + \psi_3)^\times(Y+x) > 0)$$

$$- U_{((Y+x)\times K}(\psi_1 + \psi_2) \in (\,.\,),\ (\psi_1 + \psi_3)^\times(Y+x) > 0\,\| = 2((Q_0)[G])(\Phi^\times(Y+x) > 0).$$

9. Es seien nun P, L zwei Verteilungsgesetze aus **S** mit den Eigenschaften $\sigma_P=\sigma_L$, $P^0=P$, $L^0=L$. Somit gilt für $m=1,2,\ldots$ $P_m=L_m$ und mit Hilfe von 6. und 8. erhalten wir

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s,\, D\in \mathbf{D}} {}_{((Y+x)\times K)}\| (L[Q_{\omega_n}])[D]-(P[Q_{\omega_n}])[D]\|$$

$$\leqq 2\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s,\, D\in \mathbf{D}} (((L_0)[Q_{\omega_n}])[D])(\Phi^\times(Y+x)>0)$$

$$+2\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s,\, D\in \mathbf{D}} (((P_0)[Q_{\omega_n}])[D])(\Phi^\times(Y+x)>0)$$

Für alle x in I_m gilt

$$\Lambda(L_0,(Z_m+x)\times K)=\int |\Phi^\times(Z_m+x)-[s_L(\Phi^\times)(2m)^s]\,|\,L^\times(d\Phi^\times)\leqq \mu(Z_m)\,\eta_{L,m}.$$

Offenbar gilt stets

$$[s_L(\Phi^\times)(2m)^s]/(2m)^s \longrightarrow S_L(\Phi^\times),\quad m\to\infty.$$

Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue ergibt sich hieraus, daß der zweite in der Definition von $\eta_{L,m}$ eingehende Summand für $n\to\infty$ verschwindet. Auf Grund der Definition von **S** trifft dies aber auch für den ersten Summanden zu, d. h. es gilt $\eta_{L,m}\to 0$, $m\to\infty$. Entsprechend erhalten wir auch $\Lambda(P,(Z_m+x)\times K)\leqq\mu(Z_m)\eta_{P,m}$ und $\lim_{m\to\infty}\eta_{P,m}=0$.

Gestützt auf 7. erhalten wir somit aus der obigen Ungleichungskette

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s,\, D\in \mathbf{D}} {}_{(Y+x)\times K}\|(L[Q_{\omega_n}])[D]-(P[Q_{\omega_n}])[D]\|\leqq 2\mu(Y)(\eta_{L,m}+\eta_{P,m})$$

und

$$\sup_{x\in R^s,\, D\in \mathbf{D}} {}_{(Y+x)\times K}\|(L[Q_{\omega_n}])[D]-(P[Q_{\omega_n}])[D]\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Im folgenden benötigen wir den Hilfsatz.

3.2. *Es sei L aus* **S**, *X aus $\mathfrak{B}$, $c>0$ und λ die Gleichverteilung auf $[-c,c]^s$. Zu jedem $\varepsilon>0$ existiert dann ein $d>0$, so daß für alle Verteilungsgesetze σ auf $\mathfrak{R}^s$ mit der Eigenschaft $\sigma([-d,d]^s)=1$ die Ungleichung*

$$\sup_{x\in R^s,\, D\in \mathbf{D}} {}_{(X+x)}\|((L[Q_{\sigma^!}])[D])[Q_{\lambda^!}]-(L[D])[Q_{\lambda^!}]\|<\varepsilon.$$

erfüllt ist.

Beweis. Ebenso wie im Beweis von 3.1 können wir o. B. d. A. annehmen es existiere eine kompakte Teilmenge Y von R^s. so daß $X=Y\times K$ erfüllt ist.

Offenbar existiert zu jedem $\eta>0$ ein $d>0$ und ein Maß γ auf $\mathfrak{R}^s$ mit den Eigenschaften $\gamma(R^s)>1-\eta$, $\delta(z)*\lambda=\gamma+\alpha_z$ für alle z aus $[-d,d]^s$, wobei α_z ein Maß auf $\mathfrak{R}^s$ ist. Wegen der Meßbarkeit von $z\to\delta(z)*\lambda$ ist auch die Abbildung $z\to\alpha_z$ bezüglich der σ-Algebra $\mathfrak{R}$ meßbar.

Für alle $Y\in R^s$, $k\in K$, $D\in\mathbf{D}$ und alle Verteilungsgesetze σ auf $\mathfrak{R}^s$ mit der Eigenschaft $\sigma([-d,d]^s)=1$ ergibt sich

$$([Q_{\lambda}!]\circ[D]\circ[Q_{\sigma}!])([y,k[=\int([Q_{\delta(z)*\lambda})[]\circ[D])([y,k])(\,.\,)\sigma(dz)$$

$$=\int(\int \underset{\substack{[x,l]\in A\\ \Phi([x,l])>0}}{*}(\int\delta(\delta([x+u,l]),(\,.\,))(\gamma+\alpha_z)(du))_{\Phi(\{[x,l]\})}[D](d\Phi)([y,k]))\sigma(dz)$$

und dieser Ausdruck läßt sich schreiben als

$$\int \underset{\substack{[x,l]\in A)\\ \Phi(\{[x,l]\}>0}}{*}(\int\delta(\delta([x+u,l]),(\,.\,))\gamma(du))_{\Phi(\{[x,l]\}}[D]([y,k])(d\Phi)+R_{y,k,\sigma},$$

wobei $R_{y,k,\sigma}$ ein endliches Maß auf $\mathfrak{B}$ ist. Offensichtlich gilt

$$R_{y,k,\sigma}=R_{[0,\ldots,0],k,\sigma}((T_{-y}\psi)\in(\,.\,)),\quad y\in R^s$$

und damit

$$\Lambda(R_{y,k,\sigma},(\,.\,))=\Lambda(R_{[0,\ldots,0],k,\sigma},(\,.\,)-y),\quad y\in R^s.$$

Für alle y, k, σ erhalten wir weiterhin

$$\Lambda(R_{y,k,\sigma},A)=1-\int\Phi(A)(\gamma(R^s))^{\Phi(A)}[D]([y,k])(d\Phi)$$
$$=1-\int\Phi(A)(\gamma(R^s))^{\Phi(A)}D_{(k)}(d\Phi)\leqq 1-\int\Phi(A)(1-\eta)^{\Phi(A)}D_{(k)}(d\Phi).$$

Gestützt auf 4.2.8 in [9] ergibt sich somit

$$_{(Y+x)\times K}\|((L[Q_{\sigma}!])[D])[Q_{\lambda}!]-(L[D])[Q_{\lambda}!]\|$$

$$\leqq 2\int\Lambda(R_{[0,\ldots,0],k,\sigma}+R_{[0,\ldots,0],k,\delta([0,\ldots,0])},((Y+x-y)\times K)\Lambda(L,(d[y,k]).$$

Auf Grund der Definition von $\mathbb{S}$ existiert ein endliches Maß τ auf $\mathfrak{K}$ mit der Eigenschaft $\Lambda(L)\leqq\mu\otimes\tau$ und wir können fortfahren mit

$$\leqq 2\int(\int\Lambda(R_{[0,\ldots,0],k,\sigma}+R_{[0,\ldots,0,k,\delta([0,\ldots,0])},(Y+x-y)\times K)\mu(dy))\tau(dk)$$
$$\leqq 4\mu(Y)\tau(K)(1-\int\Phi(A)(1-\eta)^{\Phi(A)}D_{(k)}(d\Phi)).$$

Der letzte Ausdruck strebt aber für $\eta\to 0$ gegen Null.

Für jedes Verteilungsgesetz τ auf $\mathfrak{K}$ bezeichne $\mathbb{D}^{(\tau)}$ die Menge derjenigen D aus $\mathbb{D}$, für die $p(\omega_D)*\tau=\tau$ erfüllt ist.

Wir können nun das abschließende Ergebnis des vorliegenden Abschnitts formulieren.

3.3. Theorem. *Es seien P, L Verteilungsgesetze aus $\mathbb{S}$ derart, daß $\sigma_P=\sigma_L$ gilt. Ferner sei τ ein Verteilungsgesetz auf $\mathfrak{K}$ und (ω_n) eine schwach asymptotisch gleichverteilte Folge von Elementen aus Ω mit der Eigenschaft $p(\omega_n)*\tau=\tau$.*
Für alle endlichen Folgen $X_1,\ldots,X_k$ von Mengen aus $\mathfrak{B}$ gilt dann

$$\sup_{x\in R^s,\,D\in\mathbb{D}^{(\tau)}}\|(P[Q_{\omega_n}])[D]-(L[Q_{\omega_n}])[D]\|_{X_1+x,\ldots,X_k+x}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Beweis. 1. Es seien c, d positive reelle Zahlen und λ bzw. γ die Gleichverteilung auf $[-c,c]^s$ bzw. $[-d,d]^s$.

Wir erhalten für alle X aus $\mathfrak{B}$

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{x\in R^s,\,D\in\mathbb{D}}{}_{(X-x)}\|((L[Q_{\omega_n}])[D])[Q_{\lambda}!]-((P[Q_{\omega_n}])[D])[Q_{\lambda}!]\|$$

$$\leqq \sup_{x \in R^s,\, G \in \mathbf{D}} {}_{(X+x)}\|(L[G])[Q_{\lambda'}]-((L[Q_{\gamma'}])[G])[Q_{\lambda'}]\|$$

$$+\limsup_{n\to\infty} \sup_{x \in R^s,\, G \in \mathbf{D}} \|(L[Q_{\omega_n}*\gamma'])[G]-(P[Q_{\omega_n}*\gamma'])_{[G]}\|$$

$$+\sup_{x \in R^s,\, G \in \mathbf{D}} {}_{(X+x)}\|(P[G])[Q_{\lambda'}]-((P[Q_{\gamma'}])[G])[Q_{\lambda'}]\|.$$

Vermöge 3.1 verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite, und au Grund von 3.2 werden sowohl der erste als auch der dritte Term gleichzeiti beliebig klein, wenn nun d hinreichend klein ist.

Somit ergibt sich für alle X aus $\mathfrak{B}$ und alle $c>0$

$$\sup_{x \in R,\, D \in \mathbf{D}} {}_{(X+x)}\|((L[Q_{\omega_n}])[D])[Q_{\lambda'}]-((P[Q_{\omega_n}])[D])[Q_{\lambda'}]\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

2. Es sei $X_1,\dots,X_k$ eine endliche Folge von Mengen aus $\mathfrak{B}_{\mu\otimes\tau}$. Für jede natürliche Zahl n und alle i aus $\{1,\dots,k\}$ setzen wir

$$F_{i,n}=\{a : a \in A,\ S_{1/n}(a) \subseteq X_i\},\quad G_{i,n}=\bigcup_{a \in X_i} S_{1/n}(a)$$

wobei wie üblich $S_r(a)$ die offene Vollkugel um a mit dem Radius r bezeichnet.

Offenbar ist für $1\leqq i\leqq k$ die Folge $(F_{i,n})$ aufsteigen und besteht nur aus abgeschlossenen Mengen. Ihre Vereinigung ist der innere Kern von X_i. Demgegenüber ist für $1\leqq i\leqq k$ die Folge $(G_{i,n})$ fallend, besteht nur aus offenen Mengen und besitzt als Durchschnitt die abgeschlossene Hülle von X_i. Somit ist $(G_{i,n}\setminus F_{i,n},\ n=1,2,\dots)$ für $1\leqq i\leqq k$ monoton fallend und besitzt den Durchschnitt ∂X_i.

Es sei nun m irgendeine natürliche Zahl. Wir setzen

$$\lambda=\left(\frac{2}{m}\right)^{-s}\mu\left((\cdot)\cap\left(-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)^s\right).$$

Es ergibt sich

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x \in R^s,\, D \in \mathbf{D}^{(\tau)}} \|(L[Q_{\omega_n}])[D]-(P[Q_{\omega_n}])[D]\|_{X_1+x,\dots,X_k+x}$$

$$\leqq \limsup_{n\to\infty} \sup_{x \in R^s,\, D \in \mathbf{D}^{(\tau)}} \|(L[Q_{\omega_n}])[D]-((L[Q_{\omega_n}])[D])[Q_{\lambda'}]\|_{X_1+x,\dots,X_k+x}$$

$$+\limsup_{x\to\infty} \sup_{x \in R^s,\, D \in \mathbf{D}^{(\tau)}} \|((L[Q_{\omega_n}])[D])[Q_{\lambda'}]-((P[Q_{\omega_n}])[D])[Q_{\lambda'}]\|_{X_1+x,\dots,X_k+x}$$

$$+\limsup_{n\to\infty} \sup_{x \in R^s,\, D \in \mathbf{D}^{(\tau)}} \|(P[Q_{\omega_n}])[D]-((P[Q_{\omega_n}])[D])[Q_{\lambda'}]\|_{X_1+x,\dots,X_k+x}.$$

Setzen wir $X=X_1\cup\dots\cup X_k$, so können wir fortfahren mit

$$\leqq \limsup_{n\to\infty} \sup_{x \in R^s,\, D \in \mathbf{D}^{(\tau)}} \|(L[Q_{\omega_n}])(D]-((L[Q_{\omega_n}])[D])[Q_{\lambda'}]\|_{X_1+x,\dots,X_k+x}$$

$$+\limsup_{n\to\infty} \sup_{x \in R^s,\, D \in \mathbf{D}^{(\tau)}} {}_{(X+x)}\|((L[Q_{\omega_n}])[D])[Q_{\lambda'}]-((P[Q_{\omega_n}])[D])[Q_{\lambda'}]\|$$

$$+\limsup_{n\to\infty} \sup_{x \in R^s,\, D \in \mathbf{D}^{(\tau)}} \|(P[Q_{\omega_n}])[D]-((P[Q_{\omega_n}])[D])[Q_{\lambda'}]\|_{X_1+x,\dots,X_k+x}.$$

Vermöge 1. verscwindet der zweite Term auf der rechten Seite und wir können fortfahren mit

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s,\, D\in \mathbf{D}^{(\tau)}} (((L[Q_{\omega_n}])[D])[Q_{\lambda!}])(\Phi(x+\bigcup_{i=1}^{k}(G_{i,m}\setminus F_{i,m}))>0)$$

$$+\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s,\, D\in \mathbf{D}^{(\tau)}} (((P[Q_{\omega_n}])[D])[Q_{\lambda!}])(\Phi(x+\bigcup_{i=1}^{k}(G_{i,m}\setminus F_{i,m}))>0)$$

wobei wir genauso schließen wie im 8. Schritt des Beweises von 3.1: Liegen nach Ausschauerung mit Hilfe von $Q_{\lambda!}$ keine Punkte in $x+\bigcup_{i=1}^{k}(G_{i,m}\setminus F_{i,m})$. so ist die ursprüngliche Zahl von Punkten in den Mengen $x+X_1, \ldots, x+X_k$ gleich der Zahl von Punkten nach der Ausschauerung!

Zusammen mit D liegt offenbar stets auch $D[Q_{\lambda!}]$ in $\mathbf{D}^{(\tau)}$. Wir können daher die obige Ungleichungskette fortsetzen mit

$$\leq \limsup_{n\to\infty} 2\sup_{x\in R^s,\, G\in \mathbf{D}^{(\tau)}} ((L[Q_{\omega_n}])[G])(\Phi(x+\bigcup_{i=1}^{k}(G_{i,m}\setminus F_{i,m}))>0)$$

$$+\limsup_{n\to\infty} 2\sup_{x\in R^s,\, G\in \mathbf{D}^{(\tau)}} ((P[Q_{\omega_n}])[G])(\Phi(x+\bigcup_{i=1}^{k}(G_{i,m}\setminus F_{i,m}))>0)$$

$$\leq 2\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s,\, G\in \mathbf{D}^{(\tau)}} \Lambda((L[Q_{\omega_n}])[G],\, x+\bigcup_{i=1}^{k}(G_{i,m}\setminus F_{i,m}))$$

$$+2\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s,\, G\in \mathbf{D}^{(\tau)}} \Lambda((P[Q_{\omega_n}])[G],\, x+\bigcup_{i=1}^{k}(G_{i,m}\setminus F_{i,m}))$$

$$=2\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s,\, G\in \mathbf{D}^{(\tau)}} (\omega_G * \omega_{Q_{\omega_n}} * \Lambda(L))(x+\bigcup_{i=1}^{k}(G_{i,m}\setminus F_{i,m}))$$

$$+2\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s,\, G\in D^{(\tau)}} (\omega_G * \omega_{Q_{\omega_n}} * \Lambda(P))(x+\bigcup_{i=1}^{k}(G_{i,m}\setminus F_{i,m})).$$

Voraussetzungsgemäß existieren endliche Maße τ_1, τ_2 auf $\mathfrak{R}$ so, daß $\Lambda(L) \leq \mu\otimes\tau_1$, $\Lambda(P)\leq\mu\otimes\tau_2$ gilt, und wir können die obige Ungleichungskette wieder fortsetzen mit

$$\leq 2\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s,\, G\in \mathbf{D}^{(\lambda)}} (\omega_G * \omega_n * (\mu\otimes(\tau_1+\tau_2)))(x+\bigcup_{i=1}^{k}(G_{i,m}\setminus F_{i,m})).$$

Nun gilt aber für alle ω in Ω

$$\omega * (\mu\otimes(\tau_1+\tau_2)) = \mu\otimes(p(\omega) * (\tau_1+\tau_2)).$$

Wir können damit die obige Ungleichungskette fortsetzen mit

$$\leq 2\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s,\, G\in \mathbf{D}^{(\tau)}} (\mu\otimes(p(\omega_G) * (p(\omega_n) * (\tau_1+\tau_2))))(x+\bigcup_{i=1}^{k}(G_{i,m}\setminus F_{i,m}))$$

$$=2\limsup_{n\to\infty} \sup_{G\in \mathbf{D}^{(\tau)}} (\mu\otimes(p(\omega_G) * (p(\omega_n) * (\tau_1+\tau_2))))(\bigcup_{i=1}^{k}(G_{i=m}\setminus F_{i,m})).$$

Gemäß 2.7 und der Bemerkung nach 2.11 strebt $(p(\omega_n) * (\tau_2+\tau_2))$ in Variation gegen $(\tau_1(K)+\tau_2(K))\,\tau$. Somit kann die obige Ungleichungskette erneut fortgesetzt werden mit

$$=2\,(\tau_1(K)+\tau_2(K))\,(\mu\otimes\tau)\,(\bigcup_{i=1}^{k}(G_{i,m}\setminus F_{i,m}).$$

Dieser Ausdruck strebt aber für $m\to\infty$ gegen Null. Somit gilt

$$\sup_{x\in R^s,\,D\in\mathbf{D}^{(\tau)}} \|(L[Q_{\omega_n}])[D]-(P[Q_{\omega_n}])[D]\|_{X_1+x,\dots,X_k+x} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

für jede endliche Folge $X_1,\dots,X_k$ von Mengen aus $\mathfrak{B}_{\mu\otimes\tau}$.

3. Es seien nun $X_1,\dots,X_k$ irgendeine endliche Folge von Mengen aus $\mathfrak{B}$ und ε irgendeine positive Zahl. Für alle i aus $\{1,\dots,k\}$ greifen wir uns eine abgeschlossene Menge F_i, sowie eine offene beschränkte Menge G_i so heraus, daß

$$F_i\subseteq X_i\subseteq G_i,\quad (\mu\otimes\tau)\,(\bigcup_{i=1}^{k}(G_i\setminus F_i))<\varepsilon$$

erfüllt ist. Weiterhin seien Z_i, $1\leq i\leq k$ Mengen aus $\mathfrak{B}_{\mu\otimes\tau}$ mit der Eigenschaft $F_i\subseteq Z_i\subseteq G_i$.

Mit Hilfe von 2. ergibt sich

$$\limsup_{n\to\infty}\ \sup_{x\in R^s,\,D\in\mathbf{D}^{(\tau)}} \|(L[Q_{\omega_n}])[D]-(P[Q_{\omega_n}])[D]\|_{X_1+x,\dots,X_k+x}$$

$$\leq 2\limsup_{n\to\infty}\ \sup_{x\in R^s,\,D\in\mathbf{D}^{(\tau)}} \Lambda\,((L[Q_{\omega_n}])[D],\ x+\bigcup_{i=1}^{k}(G_i\setminus F_i))$$

$$+2\limsup_{n\to\infty}\ \sup_{x\in R^s,\,D\in\mathbf{D}^{(\tau)}} \Lambda\,((P[Q_{\omega_n}])[D],\ x+\bigcup_{i=1}^{k}(G_i\setminus F_i))$$

$$\leq 2\limsup_{n\to\infty}\ \sup_{x\in R^s,\,D\in\mathbf{D}^{(\tau)}} (\mu\otimes(p(\omega_D\rangle*(p(\omega_n)*\tau_1)))\,(\bigcup_{i=1}^{k}(G_i\setminus F_i))$$

$$+2\limsup_{n\to\infty}\ \sup_{x\in R^s,\,D\in\mathbf{D}^{(\tau)}} (\mu\otimes(p(\omega_D)*(p)\,\omega_n)*\tau_2)))\,(\bigcup_{i=1}^{k}(G_i\setminus F_i))$$

$$=2\,(\tau_1(K)+\tau_2(K))\,(\mu\otimes\tau)\,(\bigcup_{i=1}^{k}(G_i\setminus F_i))\leq 2\,(\tau_1(K)+\tau_2(K))\,\varepsilon.$$

Da $\varepsilon>0$ beliebig gewählt werden konnte, ist damit unser Beweis beendet.

4. Asymptotische Schaueranalyse. Für alle D aus $\mathbf{D}$ alle k aus K und alle nichtnegativen ganzen Zahlen m setzen wir zur Abkürzung

$$D^{(n)}_{(k)}=D^{[n]}_{(k)}(.)/\chi\neq 0)\ z_{n,k}=z_{n,k}(D)=D^{[n]}_{(k)}(\chi\neq 0).$$

Alle Überlebenswahrscheinlichkeiten $z_{n,k}$ sind positiv. Wir sagen, ein D aus $\mathbf{D}$ genüge der Bedingung

$d_1)$ falls $z_{n,k}\to 0$, $n\to\infty$, $(k\in K)$ erfüllt ist.

Wie üblich bezeichne M_f die Menge aller endlichen Zählmaße aus M. Für alle Φ aus M_f erhalten wir in Gestalt von $\Phi^0=\Phi(R^s\times(.))$ ein Maß Φ^0 auf $\mathfrak{K}$.

4.1. *Für alle $D \in \mathbf{D}$, alle Φ in M_f und alle natürlichen Zahlen n gilt*

$$[D^{[n]}]_{(\Phi)} = \Big(\prod_{j \in K,\ \Phi^0(\{j\})>0} (1-z_{n,j})^{\Phi^0(\{j\})}\Big) \sum_{[x,\,k] \in A,\ \Phi(\{x,\,k\})>0} z_{n,k}(1-z_{n,k})^{-1}\Phi(\{x,k\}\}) [D^{(n)}_{(k)}]_{(x)} + F_{n,\Phi}.$$

Hierbei ist $F_{n,\Phi}$ ein endliches Maß auf $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft

$$\Lambda(F_{\Phi,n}, A) = \sum_{k \in K,\ \Phi^0(\{k\})>0} \Phi^0(\{k\})(1-(1-z_{n,k})^{-1} \prod_{j \in K,\ \Phi^0(\{j\})>0} (1-z_{n,j})^{\Phi^0(\{j\})}.$$

Beweis. Offensichtlich gilt

$$[D^{[n]}]_{([x,\,k])} = (1-z_{n,k})\,\delta_0 + z_{n,k}[D^{(n)}_{(k)}]_{(x)}.$$

Jedes Zählmaß Φ aus M_f besitzt die Gestalt

$$\Phi = \sum_{i \in I} \delta([x_i, k_i]).$$

Da unsere Behauptung für $\Phi=0$ trivialerweise gilt, können wir von jetzt ab $\Phi \neq 0$ annehmen. Wir erhalten

$$[D^{[n]}]_{(\Phi)} = \mathop{*}_{i \in I} [D^{[n]}]_{([x_i,\,k_i])} = \mathop{*}_{i \in I} ((1-z_{n,k_i})\,\delta_0 + z_{n,k_i}[D^{(n)}_{(k_i)}]_{(x_i)}$$

$$= \sum_{i \in I} \Big(\prod_{l \in I \setminus \{i\}} (1-z_{n,k_l})\Big) z_{n,k_i} [D^{(n)}_{(k_i)}]_{(x_i)} + F_{\Phi,n}$$

wobei $F_{\Phi,n}$ ein endliches Maß auf $\mathfrak{M}$ darstellt. Den ersten Term auf der rechten Seite können wir umformen in

$$\Big(\prod_{j \in K,\Phi^0(\{j\})>0} (1-z_{n,j})^{\Phi^0(\{j\})}\Big) \sum_{[x,k] \in A,\Phi(\{[x,k]\})>0} z_{n,k}(1-z_{n,k})^{-1}\Phi(\{[x,k]\}) [D^{(n)}_{(k)}]_{(x)}.$$

Andererseits erhalten wir

$$\Lambda(F_{\Phi,n}, A) = \Lambda([D^{[n]}]_{(\Phi)}, A) - \Big(\prod_{j \in K,\ \Phi^0(\{j\})>0} (1-z_{n,k})^{\Phi^0(\{j\})}\Big)$$

$$\times \sum_{[x,\,k] \in A,\ \Phi(\{[x,\,k]\})>0} z_{n,k}(1-z_{n,k})^{-1}\Phi(\{[x,k]\})\Lambda([D^{(n)}_{(k)}]_{(x)})$$

$$= \sum_{k \in K,\ \Phi_0(\{k\})>0} \Phi^0(\{k\})(1-(1-z_{n,k})^{-1} \prod_{j \in K,\ \Phi^0(\{j\})>0} (1-z_{n,j})^{\Phi^0(\{j\})}.$$

Gestützt auf 4.1 erhalten wir nun für alle $n>m>0$ und alle k aus K

$$D^{[n]}_{(k)} = (D^{[m]}_{(k)})[D^{[n-m]}] = \int [D^{[n-m]}]_{(\Phi)}(\,.\,)D^{[m]}_{(k)}(d\Phi) \geqq \int \Big(\prod_{j \in K,\ \Phi_0(\{j\})>0} 1-z_{n-m,j})^{\Phi^0(\{j\})}\Big)$$

$$\times\Big(\sum_{[x,\,l] \in A,\ \Phi(\{[x,\,l]\})>0} z_{n-m,l}(1-z_{n-m,l})^{-1}\Phi(\{[x,l]\}) [D^{(n-m)}_{(l)}]_{(x)}(\,.\,)\Big) [D^{[m]}_{[k]}](d\Phi)$$

Wir bezeichnen die rechte Seite dieser Ungleichung mit $V_{n,m,k}$ und setzen $V'_{n,m,k} = D^{[n]}_{(k)} - V_{n,m,k}$. Somit ist $V'_{n,m,k} = \int F_{n-m,\Phi}(\,.\,)D^{[m]}_{(k)}(d\Phi)$ und wir erhalten

$$\limsup_{n\to\infty} \Lambda(V'_{n,m,k}, A) = \limsup_{n\to\infty} \int \Big(\sum_{k \in K,\ \Phi_0(\{k\})>0} \Phi^0(\{k\})(1-(1-z_{n,k})^{-1}$$

$$\times \prod_{j \in k,\ \Phi^0(\{j\})>0} (1-z_{n-m,j})^{\Phi^0(\{j\})}\Big)\Big)D^{[m]}_{(k)}(d\Phi).$$

Der Integrand auf der rechten Seite wird majoriert durch die nicht von n abhängende integrierbare reelle Funktion $\Phi \to \Phi(A)$. Andererseits strebt dieser Integrand auf Grund der Bedingung d_1 punktweise gegen Null. Somit erhalten wir $\Lambda(V'_{n,m,k}, A) \to 0$, $n \to \infty$ Zusammenfassend können wir feststellen:

4.2. Für alle D aus $\mathbb{D}$, ale $n > m > 0$ und alle k aus K gilt $D^{[n]}_{(k)} = V_{n,m,k} + V_{n,m,k}$ Hierbei ist $V'_{n,m,k}$ ein endliches Maß auf $\mathfrak{M}$. Genügt D der Bedingung d_1), so ist $\Lambda(V'_{n,w,k}, A) \to 0, n \to \infty$, $(m = 1, 2, \ldots, k \in K)$ Unter den in 4.2. formulierten Voraussetzungen erhalten wir mit Hilfe des Campbellschen Theorems

$$(Q_{(\omega^{[m]}_D)^+(k,(.))})[D^{[n-m]}] = \int [D^{[n-m]}]_{([x,l])}\, \omega^+_{D[m]}(k, d[x, l])$$

$$= \int [D^{[n-m]}]_{([x,l])}\, \Lambda(D^{[m]}_{(k)}, (d[x, l])) \geqq \int z_{n-m,l}\, [D^{(n-m)}_{(l)}]_{(x)}(\,.\,)\Lambda(D^{[m]}_{(k)}, (d[x, l]))$$

$$= \int \sum_{[x,l] \in A,\ \Phi(\{[x,l]\})>0} \Phi(\{[x, l]\})\, [D^{(n-m)}_{(l)}]_{(x)}(\,.\,) D^{[m]}_{(k)}(d\Phi) \geqq \int \Big(\prod_{j \in K, \Phi^{\circ}(\{j\})>0} (1 - z_{n-m,j})^{\Phi^{\circ}(\{j\})}\Big)$$

$$\times \Big(\sum_{[x,l] \in A, \Phi(\{[x,l]\})>0} z_{n-m,l}\,(1 - z_{n-m,l})^{-1} \Phi(\{[x, l]\})\, [D^{(n-m)}_{(l)}]_{(x)}\Big)\, [D^{[m]}_{(k]}]\,(d\Phi) = V_{n,m,\Phi}.$$

Wir erkennen somit die Gültigkeit von

4.3. Für alle D in $\mathbb{D}$, alle $n > m > 0$ und alle k aus K gilt

$$(Q_{(\omega^{[m]}_D)^+(k,(.))})[D^{[n-m]}] \geqq V_{n,m,k}.$$

Offenkundig gilt aber

$$\Lambda((Q_{(\omega^{[m]}_D)^+(k,(.))})[D^{[n-m]}]) = \omega^{[n-m]}_D * ((\omega^{[m]}_D)^+(k, (\,.\,)) = (\omega^{[n]}_D)^+(k, (\,.\,)) = \Lambda(D^{[n]}_{(k)}, (\,.\,)).$$

Zusammenfassend ergibt sich

4.4. Es sei D eine der Bedingung d_1) genügende Familie aus D. Dann existieren Familien

$$(V_{n,m,k},\ n > m > 0,\ k \in K),\ (V'_{n,m,k},\ n > m > 0,\ k \in K),\ (V^*_{n,m,k},\ n > m > 0,\ k \in K)$$

endlicher Maße auf $\mathfrak{M}$, so daß für alle $n > m > 0$ und alle k aus K

$$D^{[n]}_{(k)} = V_{n,m,k} + V'_{n,m,k},\ (Q_{(\omega^{[m]}_D)^+(k,(.))})[D^{[n-m]}] = V_{n,m,k} + V^*_{n,m,k}$$

gilt und die Konvergenzen

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda(V'_{n,m,k}, A) = 0 = \lim_{n\to\infty} \Lambda(V^*_{n,m,k}, A)$$

stattfinden.

5. Ein Approximationssatz. Wir sagen eine Familie D aus $\mathbb{D}$ genüge der Bedingung

d_2), falls $((\omega_D)^{[n]})$ d. h. $(\omega_{D[n]}$ schwach asymptotisch gleichverteilt ist;

Weiterhin sagen wir, ein D aus $\mathbb{D}$ genüge der Bedingung

d_3), falls ein Verteilungsgesetz τ_D auf $\mathfrak{K}$ mit der Eigenschaft $p(\omega_D) * \tau_D = \tau_D$ existiert.

Genügt D der Bedingung d_2), so kann es höchstens ein solches Verteilungsgesetz geben.

5.1. Theorem. *Es seien P, L aus $\mathbb{S}$ mit $\sigma_P = \sigma_L$. Genügt nun eine Familie D aus $\mathbb{D}$ den Bedingungen d_1), d_2), d_3), so gilt für alle $X_1, \ldots, X_l \in \mathfrak{B}$ die Konvergenz*

$$\sup_{x \in R^s} \| P[D^{[n]}] - L[D^{[n]}] \|_{X_1+x, \ldots, X_l+x} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Beweis.

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s} \| P[D^{[n]}] - L[D^{[n]}] \|_{X_1+x, \ldots, X_l+x}$$

$$\leqq \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s} \| L[D^{[n]}] - (L[Q_{\omega_D^{[m]}}])[D^{[n-m]}] \|_{X_1+x, \ldots, X_l+x}$$

$$+ \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s} \| (L[Q_{\omega_D^{[m]}}])[D^{[n-m]}] - (P[Q_{\omega_D^{[m]}}])[D^{[n-m]}] \|_{X_1+x, \ldots, X_l+x}$$

$$+ \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s} \| (P[Q_{\omega_D^{[m]}}])[D^{[n-m]}] - P[D^{[n]}] \|_{X_1+x, \ldots, X_l+x}.$$

Wir greifen uns nun irgendeine kompakte Teilmenge Y von R^s so heraus, daß $X_1 \cup \ldots \cup X_l \subseteq Y \times K$ erfüllt ist. Ferner seien τ_1, τ_2 endliche Maße auf $\mathfrak{K}$ mit den Eigenschaften $\Lambda(L) \leqq \mu \otimes \tau_1$, $\Lambda(P) \leqq \mu \otimes \tau_2$. Weiterhin setzen wir zur Abkürzung $\tau = \tau_D$.

Zusammen mit D gehören auch alle Schauerpotenzen $D^{[n]}$, $n = 1, 2, \ldots$ zu $\mathbb{D}^{(\tau)}$, und mit Hilfe von 4.2.8 in [9] erhalten wir für $m = 1, 2, \ldots$ als Fortsetzung der obigen Ungleichungskette.

$$\leqq \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s} {}_{(Y+x)\times K}\| L[D^{[n]}] - (L[Q_{\omega_D^{[m]}}])[D^{[n-m]}] \|$$

$$+ \sup_{x\in R^s,\, G \in \mathbb{D}^{(\tau)}} \| (L[Q_{\omega_D^{[m]}}])[G] - (P[Q_{\omega_D^{[m]}}])[G] \|_{X_1+x, \ldots, X_l+x}$$

$$+ \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s} {}_{(Y+x)\times K}\| P[D^{[n]}] - (P[Q_{\omega_D^{[m]}}])[D^{[n-m]}] \|$$

$$\leqq 2 \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s} \int \Lambda(V'_{n,m,k} + V^*_{n,m,k}, (Y+x-y)\times K)\, \Lambda(L, (d[y,k]))$$

$$+ \sup_{x\in R^s,\, G \in \mathbb{D}^{(\tau)}} \| (L[Q_{\omega_D^{[m]}}])[G] - (P[Q_{\omega_D^{[m]}}])[G] \|_{X_1+x, \ldots, X_l+x}$$

$$+ 2 \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s} \int (V'_{n,m,k} + V^*_{n,m,k}, (Y+x-y)\times K)\, \Lambda(P, (d[y,k]))$$

$$\leqq 2 \limsup_{n\to\infty} \mu(Y) \int (\Lambda(V'_{n,m,k}, A) + \Lambda(V^*_{n,m,k}, A))\, \tau_1(dk)$$

$$+ \sup_{x\in R^s,\, G \in \mathbb{D}^{(\tau)}} \| (L[Q_{\omega_D^{[m]}}])[G] - [P[Q_{\omega_D^{[m]}}])[G] \|_{X_1+x, \ldots, X_l+x}$$

$$+ 2 \limsup_{n\to\infty} \mu(Y) \int (\Lambda(V'_{n,m,k}, A) + \Lambda(V^*_{n,m,k}, A))\, \tau_2(dk).$$

Vermöge 4.4 strebt im ersten wie im letzten Term auf der rechten Seite der Integrand punktweise für $n \to \infty$ gegen Null. Andererseits gilt aber offensichtlich

$$\Lambda(V'_{n,m,k}, A) \leqq 1, \quad \Lambda(V^*_{n,m,k}, A) \leqq 1$$

Auf Grund des Satzes von Lebesgue verschwinden also der erste und der dritte Term, und wir erhalten mit Hilfe von 3.3.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R^s} \| L[D^{[n]}]-P[D^{[n]}] \|_{x_1+x,\ldots,x_l+x}$$

$$\leq \lim_{m\to\infty} \sup_{x\in R^s,\, G\in \mathbf{D}^{(\tau)}} \| (L[Q_{\omega_D^{[m]}}])[G]-(P[Q_{\omega_D^{[m]}}])[G] \|_{x_1+x,\ldots,x_l+x}=0.$$

6. Die Verteilungsgesetze $]D_{(.)}[$. Wir sagen, eine Familie $D_{(.)}$ aus $\mathbb{D}$ genüge der Bedingung

d_4) falls die Abbildung $k\to D_{(k)}$ bezüglich ρ_K und der schwachen Topologie in $\mathbb{P}$ stetig ist, d. h. (vgl. 11. 1. 1 in [9]), wenn die Abbildung $[D]_{(.)}$ von A in $\mathbb{P}$ bezüglch ρ_A und der schwachen Topologie in $\mathbb{P}$ stetig ist.

Es sei nun D eine der Bedingung d_4) genügende Familie aus $\mathbb{D}$. Setzen wir nun $\varkappa=[D]_{(.)}$, so erhalten wir ein Schauerfeld auf $[A, \rho_A]$ mit dem Phasenraum $[A, \rho_A]$, das den Bedingungen der Arbeit [7] genügt. Wie in [7] setzen wir nun $J=\omega_D$ und bezeichnen die Menge derjeniden ν in N, für die $J*\nu=\nu$ erfüllt ist mit N_J.

Vermöge Satz 1.4, in [7] ergibt sich

6.1. Zu jedem ν in N_J existiert ein unbegrenzt teilbares Verteilungsgesetz $V_{(\nu)}$ auf $\mathfrak{M}$ mit den Eigenschaften

$$(V_\nu)_\varkappa=V_\nu,\ (P_\nu)_{\varkappa[n]} \Rightarrow V_{(\nu)},\ \Lambda(V_{(\nu)})\leq\nu$$

Hierin bezeichnet wie üblich P_ν das Poissonsche Verteilungsgesetz mit dem Intensitätsmaß ν.

Auf Grund der räumlichen Homogenität von J erhalten wir für alle endlichen Maße γ auf $\mathfrak{K}$, alle beschränkten X in $\mathfrak{R}^s$ und alle L in $\mathfrak{K}$

$$J*(\mu\otimes\gamma)=\mu\otimes(p(J)*\gamma).$$

Somit ergibt sich

6.2. Für ein endliches Maß γ auf $\mathfrak{K}$ gilt genau dann $\mu\otimes\gamma\in N_J$, wenn $p(J)*\gamma=\gamma$ erfüllt ist.

Ebenso wie in [7] bezeichne $N_\varkappa$ die Menge derjenigen Maße ν in N zu denen ein Verteilungsgesetz P auf $\mathfrak{M}$ mit den Eigenschaften $P_\varkappa=P$, $\Lambda(P)=\nu$ existiert. Vermöge 1.1.1 ist $N_\varkappa$ eine Teilmenge von N_J und auf Grund von Theorem 1.6 in [7] gilt

6.3. Ein Maß ν aus N_J liegt genau dann in $N_\varkappa$, wenn die Folge $(P_\nu)_{\varkappa[n]}$ schwach gegen ein Verteilungsgesetz $]\varkappa,\nu[$ mit dem Intensitätsmaß ν konvergiert, d. h. wenn $\Lambda(V_{(\nu)})=\nu$ erfüllt ist.

Das Verteilungsgesetz $]\varkappa,\nu[$ ist unbedrenzt teilbar und schauerinvariant bezüglich $\varkappa$.

Erfüllt $D_{(.)}$ neben der Bedingung d_4) noch die beiden Forderungen d_2) und d_3), so sind alle endlichen Maße γ auf $\mathfrak{K}$ mit der Eigenschaft $p(J)*\gamma=\gamma$ nichtnegative Vielfache eines wohlbestimmten Verteilungsgesetzes τ_D auf $\mathfrak{K}$. In diesem Falle nennen wir $D_{(.)}$ stabil, falls $\mu\otimes\tau_D$ zu $N_\varkappa$ gehört. Zur Abkürzung setzen wir dann

$$]D[=]\varkappa,\mu\otimes\tau_D[$$

Vermöge Satz 1.8. in [7] liegt zusammen mit $\mu \otimes \tau_D$ für alle $l \geqq 0$ auch $\mu \otimes l\tau_D$ in $N_\varkappa$ und es gilt $]D[^l =]\varkappa, \mu \otimes l\tau_D[$ wobei $]D[^{-l}, l \geqq 0$, gemäß Abschnitt 2.4 in [9] zu verstehen ist.

Da $P_{\mu \otimes l\tau_D}$ stationär ist, gilt dies auch für alle $(P_{\mu \otimes l\tau_D})_{\varkappa^{[n]}}$ und damit auch für $]D[^l$.

Zusammenfassend erkennen wir unter nochmaliger Benutzung von Satz 1.8 in [7]:

6.4. Satz. *Eine den Bedingungen d_2), d_3) und d_4) genügende Familie $D_{(.)}$ in $\mathbf{D}$ ist genau dann stabil, wenn ein bezüglich $[D]$ schauerinvariantes stationäres Verteilunpsgesetz P in $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft $0 < i_P < +\infty$ existiert.*

Es bezeichne $\mathbf{C}$ die Menge derjenigen Familien $D_{(.)}$ in $\mathbf{D}$, die den Bedingungen $d_1) - d_4)$ genügen und stabil sind.

Ebenso wie Satz 12.1.5 in [9] ergibt sich

6.5. Satz. *Für alle $D_{(.)}$ aus $\mathbf{C}$ ist das Verteilungsgesetz $]D[$ zingulär unbegrenzt teilbar.*

Gestützt auf Theorem 5.1 erkennt man nun mit Hilfe des beim Beweis von Theorem 12.4.1 in [9] benutzten Verfahrens:

6.6. Theorem. *Für alle $l \geqq 0$, alle $D_{(.)}$ in $\mathbf{C}$ und alle stationären P in $\mathbf{P}$ sind folgende Aussagen gleichbedeutend:*

a) $P =]D[^l$,

b) $P]D[= P$, $\sigma_P = \delta(l)$,

c) $P[D] = P$, $i_P = l$, P *ist ergodisch.*

Da die Abbildung $l \rightarrow]D[^l$ von $[0, +\infty)$ in $\mathbf{P}$ schwach stetig und dami meßbar ist, können wir für jedes Verteilungsgesetz σ auf $\mathfrak{R}^1$ mit der Eigenschaft $\sigma([0, +\infty)) = 1$ die Mischung $P = \int]D[^l(.)\, \sigma(dl)$ einfüren und erhalten $\sigma_P = \sigma$.

Durch erneute Anwendung von Theorem 5.1. erhalten wir nun

6.7. Theorem. *Für alle L in $\mathbf{S}$, alle $D_{(.)}$ in $\mathbf{C}$ und alle endlichen Folgen $X_1, \ldots, X_m$ von Mengen in $\mathfrak{B}$ gilt*

$$\sup_{x \in R^s} \| L[D^{[n]}] - \int]D[^l(.)\, \sigma_L(dl) \|_{X_1+x, \ldots, X_m+x} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Ebenso wie Theorem 12.4.6 in [9] ergibt sich hieraus

6.8. Theorem. *Für alle $D_{(.)}$ in $\mathbf{C}$ ist $\sigma \rightarrow \int]D[^l(.)\, \sigma(dl)$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge aller Verteilungsgesetze σ zufälliger nichtnegativer Zahlen auf die Menge aller bezüglich $[D]$ schauerinvarianten stationären Verteilungsgesetze auf $\mathfrak{M}$.*

7. Hinreichende Bedingungen für die Aussterbebedingung d_1. Gestützt auf dem Apparat der Theorie der räumlich homogenen Verzweigungsprozesse läßt sich (vgl. [4]) in teilweiser Verallgemeinerung einer bekannten Aussage über kritische Galton-Watson-Prozesse die folgende Aussage herleiten:

7.1. Satz. *Es sei $D_{(.)}$ eine der Bedingung d_4) genügende Familie in $\mathbf{D}$ mit den Eigenschaften:*

a_1) *Es existiert ein Verteilungsgesetz τ auf $\mathfrak{K}$, so daß für alle k in K*

$$\| (p(J))^{[n]}(k, (.)) - \tau \| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty;$$

a_2) *Für mindestens ein k_0 aus dem Träger von τ gilt*

$$D_{(k_0)}(\chi(A) = 1) < 1.$$

Unter diesen Voraussetzungen genügt $D^{(\cdot)}$ der Bedingung d_1).

Beweis. 1. Zusammen mit $D_{(\cdot)}$ erfüllt auch die durch

$$k \to G_{(k)} = D_{(k)}\Big(\Big(\sum_{k \in K,\ \chi(R^s \times \{k\})>0} \chi(R^s \times \{k\})\,\delta\,(\delta[[0, \ldots, 0], k]) \in (\,.\,)\Big)$$

eingeführte Familie $G_{(\cdot)}$ aus $\mathbf{D}$ alle oben formulierten Voraussetzungen. Dies ist unmittelbar klar für a_1) und a_2). Es bleibt somit nur zu zeigen, daß die Abbildung $k \to G_{(k)}$ schwach stetig ist. Es gelte also $k_n \to k$ und damit

$$D_{(k_n)} \Rightarrow D_{(k)}$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ greifen wir uns nun ein X_ε aus $\mathfrak{D}_{D_{(k)}}$ heraus, für welches $\Lambda(D_{(k)}, X_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ erfüllt ist. Wegen Satz 3.1.6 aus [9] ist dies stets möglich.

Vermöge Satz 3.1.11 in [9] können wir nun aufschließen

$$(*) \qquad x_\varepsilon(D_{(k_n)}) \Rightarrow x_\varepsilon(d_{(k)}).$$

Ferner gilt (vgl. Satz 3.1.12 in [9])

$$1 - \varepsilon \leq \Lambda(D_{(k)}, X_\varepsilon) \leq \liminf_{n\to\infty} \Lambda(D_{(k_n)}, X_\varepsilon)$$

Beachtet man nun die Zugehörigkeit von $D_{(\cdot)}$ zu $\mathbf{D}$, so folgt hieraus

$$\limsup_{n\to\infty} \Lambda(D_{(k_n)}, A \setminus X_\varepsilon) \leq \Lambda(D_{(k)}, A \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$$

und somit

$$(**) \qquad \limsup_{n\to\infty} D_{(k_n)}(\chi(A \setminus X_\varepsilon) > 0) < \varepsilon.$$

Gestützt auf Satz 3.1.9 in [9] läßt sich nun mühelos aus der Gültigkeit von (*), (**) für alle $\varepsilon > 0$ auf $G_{(k_n)} \Rightarrow G_{(k)}$, $n \to \infty$ schließen.

2. Offenbar genügt $G_{(\cdot)}$ genau dann der Bedingung d_1), wenn dies für $D_{(\cdot)}$, zutrifft. Auf Grund von 1. können wir daher im folgenden annehmen $D_{(\cdot)}$ falle mit $G_{(\cdot)}$ zusammen, d. h. für alle k in K gelte $D_{(k)}(\chi((R^s \setminus [0, \ldots, 0]) \times K) > 0) = 0$,

3. Vermöge d_4) und a_2) gilt $\tau(D_{(k)}(\chi(A) = 1) < 1) > 0$.

4. Auf Grund der Sätze 2.2.13 und 4.3.3 in [9] sind alle Verteilungsgesetze $((P_{\mu\otimes\tau})[D^{[n]}])\times$, $(n = 1, 2, \ldots)$ nachwirkungsfrei. Wegen Satz 3.2.11 in [9] ist somit auch $(V_{\mu\otimes\tau})$ nachwirkungsfrei, wobei $V_{\mu\otimes\tau}$ den gemäß 2.1.1 existierenden schwachen Limes von $((P_{\mu\otimes\tau})[D^{[n]}])$ bezeichnet. Somit besitzt nach 11.4.2, 11.4.3 und 11.4.4 in [9] das stationäre unbegrenzte teilbare Verteilungsgesetz $V_{\mu\otimes\tau}$ eine homogene Schauerdarstellung der Gestalt $V_{\mu\otimes\tau} = (P_{l\mu})[V]$ wobei l in $[0, +\infty)$ liegt und V ein Verteilungsgesetz auf $\mathfrak{M}$ mit den Eigenschaften $V(\{\mathfrak{o}\}) = 0$, $V(\chi((R^s \setminus [0, \ldots, 0]) \times K) > 0) = 0$ darstellt.

5. Für alle natürlichen Zahlen n gilt $V_{\mu\otimes\tau} = (V_{\mu\otimes\tau})[D^{[n]}] = ((P_{l\mu})[V])((D^{[n]}] = (P_{l\mu})[V[D^{[n]}]]$ Vermöge 3. erhalten wir für alle endlichen Zahlmaße χ in M mit Hilfe von a_1) für alle hinreichend großen n, $[D^{[n]}]_{(\chi)}(\{\mathfrak{o}\}) > 0$. Beachten wir nun, daß die Folge $([D^{[n]}]_{(\chi)}(\{\mathfrak{o}\}))$ monoton wachsend ist, so erkennen wir: Es existiert eine natürliche Zahl m mit der Eigenschaft $(V[D^{[m]}])(\{\mathfrak{o}\}) > 0$. Setzen wir nun $V' = (V[D^{[m]}])((\,.\,)/\chi \neq \mathfrak{o})$ so erhalten wir die homogene Schauerdarstellung $V_{\mu\otimes\tau} = (P_{vl\mu})[V']$ mit $0 < v < 1$.

Im Falle $l>0$ haben wir damit einen Widerspruch zur Eindeutigkeitsaussage 11.4.2 in [9] hergeleitet. Somit ist $l=0$, d. h. es gilt

$$(P_{\mu\otimes\tau})[D^{[n]}] \Rightarrow \delta(0),\ n\to\infty.$$

6. Offenkundig ist für jedes k in K die Folge monoton fallend. Wäre nun $\tau(\lim\limits_{n\to\infty} z_{n,k}>0)>0$ so wäre für jedes X aus $\mathfrak{B}_\mu$ mit der Eigenschaft $\mu(X)>0$,

$$\lim_{n\to\infty}((P_{\mu\otimes\tau})[D^{[n]}])(\chi(X\times K)>0)>0.$$

Dies widerspricht aber die Aussage von 5. Somit erhalten wir $\tau(\lim z_{n,k}=0)=1$. Auf Grund von d_4) folgt somit $\lim_{n\to\infty} z_{n,k}=0$ für alle k aus dem Träger des Verteilungsgesetzes τ.

7. Es sei nun j irgendein Element aus K. Wir erhalten für alle natürlichen Zahlen m, n

$$z_{m+n,j}=D_{(j)}^{[m+n]}(\chi\neq\mathfrak{o})=((D_{(j)}^{[m]})[D^{[n]}])(\chi\neq\mathfrak{o})=\int[D^{[n]}]_{(\Phi)}(\chi\neq\mathfrak{o})D_{(j)}^{[m]}(d\Phi)$$
$$\leqq\int(\int[D^{[n]}]_{(a)}(\chi\neq\mathfrak{o})\Phi(da))D_{(j)}^{[m]}(d\Phi)=\int D_{(a)}^{[n]}(\chi\neq\mathfrak{o})\Lambda(D_{(j)}^{[m]},(da))$$
$$=\int z_{n,k}(p(J))^{[m]}(j,(dk)).$$

Vermöge a_1) strebt dieser Ausdruck für $m\to\infty$ gegen $\int z_{n,k}\tau(dk)$. Für alle natürlichen Zahlen n gilt somit $\lim_{m\to\infty} z_{m,j}\leqq\int z_{n,k}\tau(dk)$ Wegen 6. gilt aber fast überall bezüglich τ $z_{n,k}\to 0$, $n\to\infty$. Somit ist nach dem Satz von Lebesgue $\lim_{m\to\infty} z_{n,k}=0$. Offenbar ist die Bedingung a_1) erfüllt, falls d_2) und d_3) gelten.

Dankbarkeit. Der Autor dankt Prof. Dr. k. Matthes für die Problemstellung und die wertvollen Diskussionen.

LITERATUR

1. H. Debes, J. Kerstan, A. Liemant, K. Matthes. Verallgemeinerung eines Satzes von Dobruschin I. *Math. Nachr,* **47**, 1970, 183—244.
2. T. E. Harris. The Theory of Branching Process·s. Berlin, 1963.
3. O. Kallenberg. Stability of critical cluster fields. *Math. Nachr.,* **77**, 1977, 7—43.
4. Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке. Безгранично делимые точечные процессы. Москва, 1982.
5. J. Kerstan, K. Matthes, U. Prehn. Verallgemeinerung eines Satzes von Dobruschin II. *Math. Nachr.,* **51**, 1971, 149—188.
6. A. Liemant. Invariante zufällige Punktfolgen. *Wiss. Z. der Friedrich-Schiller-Universität, Jena,* **18**, 1969, 361—372.
7. A. Liemant. Kritische Verzweigungsprozesse mit allgemeinem Phasenraum I. *Math. Nachr.,* **96**, 1980, 119—124.
8. A. Liemant. Kritische Verzweigungsprozesse mit allgemeinem Phasenraum II. *Math. Nachr.,* **99**, 1980, 115—120.
9. K. Matthes, J. Kerstan, J. Mecke. Infinitely Divisible Point Processes. Chishester, 1978.
10. У. Прен, Б. Рёдер. Предельные теоремы для схем ветвления с конечным числом типов частиц, однородных в пространстве. *Math. Nachr.,* **80**, 1977, 37—86.
11. G. S. Tschobanow. Räumlich homogene kritische Bellman-Harris-Prozesse. *Pliska,* **7**, 1984, 18—33.
12. W. Warmuth. Kritische räumlich homogene Verzweigungsprozesse mit abzählbarer Typenmenge. *Math. Nachr.,* **84**, 1978, 25—85.

Centre for Mathematics and Mechanics
1090 Sofia P. O. Box 373

Eingegangen am 5. 12. 1980