PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

СИЛОВСКИЕ p-ПОДГРУППЫ ГРУПП НОРМИРОВАННЫХ ЕДИНИЦ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУППОВЫХ АЛГЕБР НЕСЧЕТНЫХ АБЕЛЕВЫХ p-ГРУПП

ТОДОР Ж. МОЛЛОВ

Пусть G — абелева p-группа, K — поле, характеристика которого отлична от p, $V(KG)$ — группа нормированных единиц групповой алгебры KG группы G над полем K, и ε_i — первообразный корень степени p^i из единицы ($i=1, 2, \dots$). Поле K называется полем первого рода относительно p, если степень $(K(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots): K)=\infty$, а в противном случае — полем второго рода. С. Д. Берман и А. Р. Росса [1968] исследуют силовскую p-подгруппу $S(KG)$ группы $V(KG)$, когда абелева p-группа G счетна. В настоящей работе дается описание группы $S(KG)$, когда K — поле второго рода относительно p и G — произвольная несчетная абелева p-группа, а также когда K — поле первого рода относительно p и G — такая несчетная абелева p-группа, что ее первый ульмовский фактор G/G^1 разлагается в прямое произведение циклических групп.

В [4] исследуется силовская p-подгруппа $S(KG)$ группы нормированных единиц групповой алгебры KG счетной абелевой p-группы G над полем K, характеристика которого отлична от p. В настоящей работе дается описание $S(KG)$ в несчетном случае. Отметим, что в [9] рассматривается $S(KG)$ для кольца K, содержащего первообразные корни степени p^i из единицы ($i=1, 2, \dots$). Описание группы $S(KG)$ в модулярном случае дано в [1, 5, 6, 7, 10, 11] (в [10] p-группа G необязательно абелева). Результаты этой статьи анонсированы в [8].

Будем употреблять следующие обозначения:

N — множество натуральных чисел;

$N_0 = N \cup \{0\}$

$|M|$ — мощность M;

$\aleph_0$ — первое бесконечное кардинальное число;

G — абелева p-группа; $h_G(g)$ — высота g в G; $G[p]=\{g \in G/g^p=1\}$;

G^1 — подгруппа элементов бесконечной высоты в G;

$\langle \cdots \rangle$ — подгруппа, порожденная ...;

$\times$, П — знаки для (ограниченных) прямых произведений групп;

(k) — циклическая группа порядка $k \in N$;

$\Pi_\lambda A$ — прямое произведение λ групп, каждая из которых равняется группе A;

(p^∞) — квазициклическая группа типа p^∞;

ε_i — первообразный корень степени p^i из единицы, $i \in N_0$;

H_p — силовская p-подгруппа группы H;

$\Pi(G/H)$ — полная система представителей группы G по подгруппе H;

$O(g)$ — порядок элемента g;

K — поле, характеристика которого отлична от p;

$K(\alpha)$ — расширение поля K, полученного посредством присоединения элемента α к K;

$K(\alpha)_p$ — силовская p-подгруппа поля $K(\alpha)$;
$K(\chi)$ — расширение поля K, полученного посредством присоединения значений характера χ группы G к K; $\bar{K}=K(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots)$;
$S=S(KG)$;
φ_H — ограничение гомоморфизма φ на подгруппе H;
KGe — идеал алгебры KG, порожденный e;
$\oplus$ — знак прямой суммы колец;
K^* — мультипликативная группа поля K.

Если G не имеет конечного показателя, то будем говорить, что G имеет показатель p^∞. Если e — минимальный идемпотент алгебры KF конечной группы F и $e=e_1+\cdots+e_s$, где e_i — идемпотенты $\bar{K}F$, соответствующие K-сопряженным характерам $\chi_1, \ldots, \chi_s$ группы F, то под Ker$e$ будем понимать $\operatorname{Ker}\chi_1=\cdots=\operatorname{Ker}\chi_s$ (см. [1]). Будем говорить, что элемент a кольца L имеет p-высоту n, $n\in N_0$ (см. [2]) и записываем $h_L(a)=n$, если уравнение $x^{p^m}=a$ разрешимо в L для $m=n$ и неразрешимо для $m=n+1$. Если это уравнение разрешимо для любого натурального m, то назовем a элементом бесконечной p-высоты в L и записываем $h_L(a)=\infty$.

Если K — поле первого рода относительно p, то существует натуральное f (см. [1]), которое назовем константой поля K относительно p, такое, что $K(\varepsilon_q)=K(\varepsilon_{q+1})=\cdots=K(\varepsilon_f)\subset K(\varepsilon_{f+1})\subset\cdots$, где $q=1$ при $p\neq 2$ и $q=2$ при $p=2$. Если K — поле второго рода относительно p, то $K(\varepsilon_q)=K(\varepsilon_i)$, для любого натурального i, $i\geq q$, где $q=1$ при $p\neq 2$ и $q=2$ при $p=2$.

Очевидно, что если K — поле первого (второго) рода относительно p с константой f, то $K(\varepsilon_i)$ — поле первого (второго) рода относительно p с константой i при $i\geq f$ и с константой f при $i<f$ относительно p. Если $U(KG)$ — мультипликативная группа алгебры KG, то очевидно

$$U(KG)_p=S(KG)\times K_p. \tag{1}$$

Определение 1. *Если K — поле, а p — простое число, то множество $s_p(K)=\{i\in N_0/K(\varepsilon_i)\neq K(\varepsilon_{i+1})\}$ называется спектром поля K относительно p.*

Таким образом, когда K — поле первого рода относительно p с константой f относительно p, имеет место: 1) если $p\neq 2$ и $K\neq K(\varepsilon_1)$, то $s_p(K)=\{0, f, f+1, \ldots\}$; 2) если $p\neq 2$ и $K=K(\varepsilon_1)$ или если $p=2$ и $K=K(\varepsilon_2)$, то $s_p(K)=\{f, f+1, \ldots\}$; 3) если $p=2$ и $K\neq K(\varepsilon_2)$, то $s_p(K)=\{1, f, f+1, \ldots\}$.

Можно считать, что следующие три леммы хорошо известны.

Лемма 2. *Если K — поле первого рода относительно простого p, то K_p — циклическая группа. Если K — поле второго рода относительно p, то $K(\varepsilon_2)=(p^\infty)$ и если $K\neq K(\varepsilon_2)$, то K_p — циклическая группа.*

Лемма 3. *Пусть K — поле первого рода относительно p и $i\in N$. Тогда $K(\varepsilon_i)_p=\langle\varepsilon_i\rangle$, если $i\in s_p(K)$ и $K(\varepsilon_i)_p=\langle\varepsilon_f\rangle$, если $i\notin s_p(K)$.*

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $K(\varepsilon_i)_p=\langle\varepsilon_{i+s}\rangle$, $s\in N_0$. Тогда 1) если $i\in s_p(K)$, то $K(\varepsilon_i)\neq K(\varepsilon_{i+1})$, $\varepsilon_{i+1}\notin K(\varepsilon_i)_p$ и $s=0$, т. е. $K(\varepsilon_i)_p=\langle\varepsilon_i\rangle$; 2) если $i\notin s_p(K)$, то $K(\varepsilon_i)=K(\varepsilon_f)$ и $K(\varepsilon_i)_p=K(\varepsilon_f)_p=\langle\varepsilon_f\rangle$, где второе равенство следует из 1).

Лемма 4. *Пусть F — конечная абелева группа, F_1, F_2 — подгруппы F, $F=F_1\times F_2$, и K — поле, характеристика которого не делит $|F|$. Если e — минимальный идемпотент алгебры KF_1, и u_0 — минимальный идемпотент KF_2, соответствующий единичному характеру группы F_2, то eu_0 — минимальный идемпотент KF.*

Лемма 5. *Если G — бесконечная абелева p-группа, то* $|S(KG)|=|G|$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}$ — множество всех конечных подгрупп группы G. Тогда $|\mathscr{A}|=|G|$ и

$$(*)\qquad S(KG)=U_{F\in\mathscr{A}}S(KF).$$

Каждая алгебра KF разлагается в прямую сумму полей $I_i=KFe_i$, где e_i — минимальный идемпотент алгебры KF, т. е.

$$(2)\qquad KF=I_0\oplus I_1\oplus\cdots\oplus I_s,\quad I_i\cong K(\chi_i)=K(\varepsilon_i),\quad i=0,1,\ldots,s,$$

где χ_0 — единичный характер группы F, т. е. $I_0\cong K$. Из (1) и (2) следует, что

$$(3)\qquad S(KF)\cong(I_1)_p\times\cdots\times(I_s)_p$$

и из (3), ввиду $|(I_i)_p|\leqq\aleph_0$, что $|S(KF)|\leqq\aleph_0$. Тогда из $|\mathscr{A}|\geqq\aleph_0$ и из формулы (*) получится, что $|S(KG)|\leqq|\mathscr{A}|.\aleph_0=|\mathscr{A}|=|G|$, т. е. $|S(KG)|\leqq|G|$. Обратное неравенство очевидно.

В следующей лемме используется хорошо известное утверждение: подгруппа H абелевой группы G является ее прямым множителем тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм π группы G на подгруппе H, такой, что $\pi(h)=h$ для каждого $h\in H$.

Лемма 6. *Пусть G — абелева группа, H — ее прямой множитель, K — коммутативное кольцо с единицей, q — простое число, $V(KG)$ — группа нормированных единиц групповой алгебры KG и $S_q(KG)$ — силовская q-подгруппа группы $V(KG)$. Тогда существует такая подгруппа A группы $V(KG)$, что*

$$(4)\qquad V(KG)=V(KH)\times A.$$

Кроме того, имеет место

$$(5)\qquad S_q(KG)=S_q(KH)\times B$$

для некоторой подгруппы B группы $S_q(KG)$ и

$$(6)\qquad h_S(x)=h_{S(KH)}(x)$$

для любого $x\in S(KH)$.

Доказательство. Пусть $G=H\times F$. Каждый элемент $x\in KG$ представляется единственным образом в виде $x=\Sigma_{f\in F}\mu_f f$, $\mu_f\in KH$. Имея в виду это, определим отображение $\pi: KG\to KH$ следующим образом: $\pi(x)=\Sigma_{f\in F}\mu_f$. Очевидно, π является K-гомоморфизмом алгебр. Легко видеть, что π сохраняет нормировку. Поэтому ограничение π на $V(KG)$ является гомоморфизмом π^*: $V(KG)\to V(KH)$ со свойством $\pi^*(x)=x$ для всех $x\in V(KH)$. Следовательно, ввиду вышесказанного, имеет место (4), откуда следует (5) и (6). В качестве A можно взять $\operatorname{Ker}\pi^*$.

Лемма 7. *Если F — конечная абелева p-группа, e — минимальный идемпотент алгебры KF, $e=u_1+\cdots+u_r$ — разложение e в сумму минимальных идемпотентов в $\bar{K}F$, $x\in KF$ и $xe\neq e$, то $xu_i\neq u_i$, $i=1,\ldots,r$.*

Доказательство. Предположим, что $xu_i=u_i$ для некоторого i, $i=1,\ldots,r$. Пусть F имеет показатель p^α. Если действуем равенством $xu_i=u_i$ со всеми автоморфизмами алгебры $\bar{K}F$ над KF, порожденными автоморфизмами поля $K(\varepsilon_\alpha)$ над K, то x остается без изменения, а u_i переходит последовательно во все K-сопряженные идемпотенты $u_1,\ldots,u_r$. Таким образом получается $xu_1=u_1, \ldots, xu_r=u_r$. Складывая эти равенства, получается противоречие $xe=e$.

Лемма 8. *Пусть $F=F_1\times F_2$ — конечная абелева p-группа, а u, v — минимальные идемпотенты соответственно алгебр KF_1 и KF_2, $KF_1u\cong K(\varepsilon_m)$, $KF_2v\cong K(\varepsilon_n)$ и $n\leqq m$. Тогда uv разлагается в KF в сумму $uv=w_1+\cdots+w_t$ только на такие минимальные идемпотенты w_i, что $KFw_i\cong K(\varepsilon_m), i=1,\ldots,t$.*

Доказательство. Пусть $u=u_1+\cdots+u_r$ и $v=v_1+\cdots+v_s$ являются соответствующими разложениями u и v в сумму минимальных идемпотентов соответственно в $\bar{K}F_1$ и в $\bar{K}F_2$, причем u_i и v_j соответствуют характерам χ_i и ψ_j. Тогда

$$uv=\Sigma_{i=1}^{r}\Sigma_{j=1}^{s}u_iv_j \tag{7}$$

является разложением uv в $\bar{K}F$ в сумму минимальных идемпотентов. Идемпотент u_iv_j соответствует характеру $\chi_i\psi_j$ и $K(\chi_i\psi_j)=K(\varepsilon_m)$. Чтобы получить разложение uv в KF, в (7) нужно поставить скобки каким-то образом. Следовательно, uv разложится в KF в ортогональную сумму минимальных идемпотентов, порождающих идеалы, изоморфные $K(\varepsilon_m)$.

Лемма 9. *Пусть $F=F_1\times F_2$ — конечная абелева p-группа, e — минимальный идемпотент KF_1, $x\in KF_1$ и $xe\neq e$. Если $e=u_1+\cdots+u_r$ — разложение e в сумму минимальных идемпотентов в KF, то $xu_t\neq u_t$ для $t=1,\ldots,r$.*

Доказательство. Пусть $v_1,\ldots,v_k$ и $w_1,\ldots,w_m$ — минимальные идемпотенты соответственно $\bar{K}F_1$ и $\bar{K}F_2$. Тогда v_iw_j $(i=1,\ldots,k;\ j=1,\ldots,m)$ — минимальные идемпотенты $\bar{K}F$. Любой идемпотент u_t является суммой минимальных идемпотентов $\bar{K}F$, т.е. $u_t=\Sigma_{s\in I}\bar{u}_s$, где $\bar{u}_s=v_iw_j$. Докажем, что $x\bar{u}_s\neq\bar{u}_s$ для $s\in I$, откуда будет следовать, что $xu_t\neq u_t$. Действительно, $x\bar{u}_s=(xv_i)w_j$. В силу леммы 7, имеет место $xv_i\neq v_i$. Если допустим, что $x\bar{u}_s=\bar{u}_s$ для некоторого $s\in I$, т. е. $xv_iw_j=v_iw_j$, то вытекает, что $xv_i/|F_2|=v_i/|F_2|$ (это равенство „F_1-отрезков“ элементов xv_iw_j и v_iw_j), откуда получится противоречие $xv_i=v_i$.

Лемма 10. *Пусть $m\in N_0$, $m+1\in s_p(K)$, $G=\langle a\rangle\times\Pi_{\lambda\in\Lambda}\langle a_\lambda\rangle$ — бесконечное прямое произведение циклических p-групп, $O(a)=p^l$, причем или $l\geqq m+1$, или если $l<m+1$, то $m+1=f$ и $l\notin s_p(K)$. Тогда существуют $|G|$ элементов $y_\lambda\in S(KG)[p]$, $\lambda\in\Lambda$, такие, что $h_S(y_\lambda)=h_S(y_\lambda y_\mu^{-1})=m$, где $\lambda\neq m\in\Lambda$.*

Доказательство. Из условий, которые удовлетворяют число m и элемент a, следует, что в групповой алгебре $K\langle a\rangle$ существует идемпотент e, такой, что $I=K\langle a\rangle e\cong K(\varepsilon_{m+1})\neq K(\varepsilon_{m+2})$. Пусть $x\in I$ и $O(x)=p$ в I^*. Обозначим $G_\lambda=\langle a\rangle\times\langle a_\lambda\rangle$, $\lambda\in\Lambda$ и $S_\lambda=S(KG_\lambda)$. Пусть $u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2},\ldots$ являются минимальными идемпотентами алгебры $K\langle a_\lambda\rangle$, причем u_{λ_1} соответствует единичному характеру группы $\langle a_\lambda\rangle$. В силу леммы 4 eu_{λ_1} — минимальный идемпотент KG_λ. Пусть χ — характер группы $\langle a_\lambda\rangle$, для которого $\chi(a_\lambda)=\varepsilon_1$, т. е. $K(\chi)=K(\varepsilon_1)$ и идемпотент u_{λ_2} соответствует характеру χ. Тогда $K\langle a_\lambda\rangle u_{\lambda_2}\cong K(\chi)\subseteq K(\varepsilon_{m+1})$. Пусть u_λ — компонента разложения идемпотента eu_{λ_2} в KG_λ в сумме минимальных идемпотентов. Тогда, в силу леммы 8, имеет место $KG_\lambda u_\lambda\cong K(\varepsilon_{m+1})$. Так как $e.1=eu_{\lambda_1}+eu_{\lambda_2}+\cdots$, то u_λ — минимальный идемпотент, участвующий в разложении e в KG_λ в сумме минимальных идемпотентов. Образуем элемент $y_\lambda=xu_\lambda+(1-u_\lambda)$. Очевидно

$$y_\lambda=xu_\lambda+(eu_{\lambda_1}+\cdots),\quad \lambda\in\Lambda. \tag{8}$$

Так как $x \in I$ и $x = xe \neq e = u_\lambda + \cdots$, то из леммы 9 следует, что $xu_\lambda \neq u_\lambda$. Тогда из $(xu_\lambda)^p = eu_\lambda = u_\lambda$ получается $O(y_\lambda) = p$. Пусть $I_\lambda = KG_\lambda u_\lambda$. Так как $(I_\lambda)_p \cong K(\varepsilon_{m+1})_p = \langle \varepsilon_{m+1} \rangle$, где последнее равенство следует из леммы 3, и $O(xu_\lambda) = p$ в $(I_\lambda)_p$, то $h_{I_\lambda}(xu_\lambda) = m$ и из ортогонального разложения (8) следует $h_{S_\lambda}(y_\lambda) = m$. Так как G_λ — конечный прямой множитель группы G, то из леммы 6 получается, что $h_S(y_\lambda) = h_{S_\lambda}(y_\lambda) = m$.

Пусть $\mu \in \Lambda$ и $\mu \neq \lambda$. Обозначим $G_\lambda G_\mu = G_{\lambda\mu}$. Образуем $y_\mu^{-1} = x^{p-1}u_\mu + (eu_{\mu 1} + \cdots)$. Аналогично вышесказанному видно, что $h_{I_\mu}(x^{p-1}u_\mu) = m$. Так как $eu_\lambda = u_\lambda$ и $x^p = l$, то

$$y_\lambda y_\mu^{-1} = xu_\lambda u_{\mu 1} + x^{p-1}u_\mu u_{\lambda 1} + u_\lambda u_\mu + \cdots \tag{9}$$

Ввиду леммы 4 $u_\lambda u_{\mu 1}$ — минимальный идемпотент алгебры $KG_{\lambda\mu}$, так как $u_{\mu 1}$ соответствует единичному характеру алгебры $K\langle a_\mu \rangle$. Покажем, что элемент $xu_\lambda u_{\mu 1}$ не уничтожается ни с каким слагаемым в (9). Пусть $U_\lambda = KG_{\lambda\mu}u_\lambda$ и $V = KG_{\lambda\mu}eu_{\mu 1}$. Тогда $KG_{\lambda\mu} = U_\lambda \oplus \bar{U}_\lambda$ и $KG_{\lambda\mu} = V \oplus \bar{V}$ для некоторых идеалов $\bar{U}_\lambda$ и $\bar{V}$ алгебры $KG_{\lambda\mu}$. В (9) $xu_\lambda u_{\mu 1}$ принадлежит $U_\lambda \cap V$, а остальные слагаемые принадлежат идеалам $U_\lambda \cap \bar{V}$, $\bar{U}_\lambda \cap \bar{V}$ и $\bar{U}_\lambda \cap V$. Так как $U_\lambda \cap V$ имеет нулевое сечение с $U_\lambda \cap \bar{V}$, $\bar{U}_\lambda \cap \bar{V}$ и $\bar{U}_\lambda \cap V$, то $xu_\lambda u_{\mu 1}$ не уничтожается ни с каким слагаемым в (9). Так как $xu_\lambda \neq u_\lambda$, xu_λ и u_λ являются G_λ-отрезками элементов $xu_\lambda u_{\mu 1}$ и $u_\lambda u_{\mu 1}$, то $xu_\lambda u_{\mu 1} \neq u_\lambda u_{\mu 1}$($u_\lambda u_{\mu 1}$ — единица поля $KG_{\lambda\mu}u_\lambda u_{\mu 1}$). Следовательно, учитывая, что разложение (9) ортогонально и $O(y_\lambda) = O(y_\lambda^{-1}) = p$, получится $O(y_\lambda y_\mu^{-1}) = p$. Так как u_λ — минимальный идемпотент алгебры KG_λ, $KG_\lambda u_\lambda \cong K(\varepsilon_{m+1})$ и $u_{\mu 1}$ — минимальный идемпотент $K\langle a_\mu \rangle$, соответствующий единичному характеру группы $\langle a \rangle$, т. е. $K\langle a_\mu \rangle u_{\mu 1} \cong K(\varepsilon_0)$, то, в силу леммы 8, для минимальных идемпотентов $u_\lambda u_{\mu 1}$ имеет место $KG_{\lambda\mu}u_\lambda u_{\mu 1} \cong K(\varepsilon_{m+1})$. Если $J = KG_{\lambda\mu}u_\lambda u_{\mu 1}$, то, ввиду леммы 3, $J_p = \langle \varepsilon_{m+1} \rangle$. Кроме того, $O(xu_\lambda u_{\mu 1}) = p$ в J_p^*. Следовательно, $h_J(xu_\lambda u_{\mu 1}) = m$. Так как $h_{I_\lambda}(xu_\lambda) = h_{I_\mu}(x^{p-1}u_\mu) = m$, то высота слагаемых, после первого, в правой части ортогонального разложения (9) в соответствующих идеалах алгебры $KG_{\lambda\mu}$ больше или равна m. Следовательно, $h_{\bar{S}}-(y_\lambda y_\mu^{-1}) = m$, где $S = S(KG_{\lambda\mu})$. Так как $G_{\lambda\mu}$ — конечный прямой множитель группы G, то, ввиду леммы 6, $h_S(y_\lambda y_\mu^{-1}) = h_{\bar{S}}-(y_\lambda y_\mu^{-1}) = m$. Ввиду $|\Lambda| = |G|$ лемма доказана.

П р е д л о ж е н и е 11. *Если G — абелева p-группа и K — поле первого рода относительно p, то $S(KG)$ — прямое произведение циклических групп тогда и только тогда, когда G — прямое произведение циклических групп. Если G имеет конечный показатель p^α, $\alpha \in N$, то $S(KG)$ имеет показатель p^α при $\alpha \in s_p(K)$ и показатель p^f при $\alpha \notin s_p(K)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — прямое произведение циклических групп, $G = \Pi_{i=1}^\infty G_i$, $G_i = \Pi_{n_i}(p^i)$ и $H_i = G_1 \times \cdots \times G_i$.

1) Пусть G имеет бесконечный показатель. Тогда $S(KG) = \cup_{i=f}^\infty S(KH_i)$. где f — константа поля K относительно p. Покажем, что высоты элементов $S(KH_i)$ в $S(KG)$ не превосходят $i-1$. Действительно, если x — любой элемент $S(KH_i)$, то $x \in S(KF)$, где F — конечный прямой множитель группы H_i. Следовательно, F — прямой множитель группы G. Пусть для KF имеют место разложения (2) и (3). Тогда $x = x_1 + \cdots + x_s$. Для любого идеала I_j разложения (2) имеет место $I_j \cong K(\chi) \subseteq K(\varepsilon_i)$, так как показатель F не превосходит p^i и $i \in s_p(K)$. Так как $x_j \in (I_j)_p \cong L_p \subseteq K(\varepsilon_i)_p = \langle \varepsilon_i \rangle$, где последнее

равенство, ввиду $i \geqq f$, следует из леммы 3, то $h_{I_j}(x_j) \leqq i-1$. Из леммы 6 следует $h_S(x) \leqq i-1$. Согласно критерию Куликова, $S(KG)$ разлагается в прямое произведение циклических групп.

2) Пусть G имеет конечный показатель p^α и 2.1) $\alpha \geqq f$. Следовательно, ввиду $\alpha \in s_p(K)$, для любого характера χ группы G имеет место $K(\chi) \subseteqq K(\varepsilon_\alpha)$, т. е. $O(x) \leqq p^\alpha$ для любого элемента $x \in S(KG)$. Так как G имеет показатель p^α, то $S(KG)$ имеет показатель p^α (и разлагается в прямое произведение циклических групп). 2.2) Пусть $\alpha < f$. Если $\alpha \notin s_p(K)$, то аналогично случаю 2.1) видно, что $S(KG)$ имеет показатель p^f. Если $\alpha \in s_p(K)$, то это возможно только тогда, когда $p=2$, $K \neq K(\varepsilon_2)$ и $\alpha=1$. Аналогично устанавливается, что $S(KG)$ имеет показатель $2=p^\alpha$.

Теорема 12. *Пусть G — бесконечное прямое произведение циклических p-групп, K — поле первого рода относительно p и $i_0, i_1, i_2, \ldots$ — числа спектра $s_p(K)$, взятые в возрастающем порядке. Тогда, если G имеет бесконечный показатель, то*

$$S(KG) \cong \Pi_{|G|}((p^{i_0}) \times (p^{i_1}) \times (p^{i_2}) \times \ldots),$$

а если G имеет конечный показатель p^α, то

$$S(KG) \cong \Pi_{|G|}((p^{i_0}) \times (p^{i_1}) \times (p^{i_2}) \times \cdots \times (p^{i_k})),$$

где $i_k = \alpha^*$ — минимальное число спектра $s_p(K)$, которое не меньше α.

Доказательство. В силу предложения 11, $S(KG)$ разлагается в прямое произведение циклических групп. Пусть

$$G = \Pi_{i \in I} \langle a_i \rangle \tag{10}$$

и t — произвольный элемент группы $S(KG)[p]$. Элемент t принадлежит алгебре KF, где F — некоторый конечный прямой множитель группы G. Имеют место разложения (2) и (3). Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть $p \neq 2$ или $p=2$, но $K=K(\varepsilon_2)$. Так как $(I_i)_p = K(\varepsilon_j)_p = \langle \varepsilon_{f+r} \rangle$, $r \in N_0$, то элемент $t \in S(KF)[p]$ имеет высоту не меньше $f-1$ в $S(KF)$. Ввиду леммы 6 получается $h_S(t) \geqq f-1$. Следовательно, в разложении $S(KG)$ в прямое произведение циклических групп нет циклических прямые множителей порядков $p, p^2, \ldots, p^{f-1}$. Формула, которую необходимо доказать в случае, следующая:

$$S(KG) \cong \begin{cases} \Pi_{|G|}(p^f), & \text{если } \alpha < f, \\ \Pi_{|G|}((p^f) \times (p^{f+1}) \times \cdots \times (p^\alpha)), & \text{если } f \leqq \alpha, \\ \Pi_{|G|}((p^f) \times (p^{f+1}) \times \ldots), & \text{если } G \text{ с бесконечным показателем.} \end{cases} \tag{11}$$

1.1) Пусть группа G имеет бесконечный показатель или для ее показателя p^α имеет место $\alpha \geqq f$. Применим лемму 10 для числа m, для которого $f-1 \leqq m \leqq \alpha-1$ ($m \geqq f-1$, если G имеет бесконечный показатель). В (12) существует циклический прямой множитель $\langle a \rangle$ порядка p^l, $l \geqq m+1$. Тогда, в силу леммы 10, существуют $|G|$ элементов $y_\lambda \in S(KG)[p]$, $\lambda \in I$, такие, что $h_S(y_\lambda) = h_S(y_\lambda y_\mu^{-1}) = m$, $\lambda \neq \mu$, $\mu \in I$. Следовательно, в разложении $S(KG)$ в прямое произведение циклических групп встречаются $|G|$ прямые циклические множители порядка p^{m+1}, $f \leqq m+1 \leqq \alpha$ ($f \leqq m+1$, если G имеет бесконечный показатель). Ввиду леммы 5, следует, что имеют место вторая и третья формула из (11).

1.2) Пусть $\alpha<f$. Так как в разложение (3) $(I_i)_p=K(\varepsilon_f)$, то для любого элемента $x\in S(KG)[p]$ имеет место $h_S(x)=f-1$ и из леммы 5 следует первая формула из (10).

2) Пусть $p=2$ и $K\neq K(\varepsilon_2)$. Формула, которую надо доказать в случае, следующая:

$$(12)\quad S(KG)\cong\begin{cases}\Pi_{|G|}(p), & \text{если } \alpha=1,\\ \Pi_{|G|}((p)\times(p^f)), & \text{если } 2\leqq\alpha\leqq f,\\ \Pi_{|G|}((p)\times(p^f)\times(p^{f+1})\times\cdots\times(p^\alpha)), & \text{если } f\leqq\alpha,\\ \Pi_{|G|}((p)\times(p^f)\times(p^{f+1})\times\cdots), & \text{если } G \text{ с бесконечным показателем}\end{cases}$$

Так как $1\in s_p(K)$, приложим лемму 10 для числа $m=0$. В (10) есть прямой множитель $\langle a\rangle$ порядка 2^l, $l\geqq 1$. Ввиду леммы 10, существуют $|G|$ элементов $y_\lambda\in S(KG)[p]$, $\lambda\in I$, такие, что $h_S(y_\lambda)=h_S(y_\lambda y_\mu^{-1})=0$, где $\lambda\neq\mu$. Следовательно, ввиду леммы 5, $\Pi_{|G|}(p)$ является прямым множителем группы $S(KG)$

2.1) Пусть $\alpha=1$. Ввиду предложения 11 группа $S(KG)$ имеет показатель 2 и, ввиду леммы 5, имеет место первая формула (12).

2.2) Пусть $\alpha>1$ и 2.2.1) $\alpha\geqq f$. Случай аналогичен случаю 1.1) и с ним устанавливается третья формула из (12).

2.2.2) Пусть $\alpha<f$. Для группы $S(KG)$ применяется лемма 10 при $m+1=f$ и $\alpha\notin s_p(K)$ и аналогично получается, что $\Pi_{|G|}(p^f)$ — прямой множитель группы $S(KG)$. Так как $S(KG)$, ввиду предложения 11, имеет показатель p^f, то этим установлена вторая формула из (12).

2.3) Пусть G имеет бесконечный показатель. Случай аналогичен 1.1), т. е. имеет место четвертая формула из (12). Теорема доказана.

Лемма 13. *Если A — подгруппа конечной абелевой p-группы H, то сумма минимальных идемпотентов алгебры KH, ядра которых содержат A, совпадает с минимальным идемпотентом алгебры KA, соответствующим единичному характеру группы A.*

Доказательство. Пусть e — минимальный идемпотент алгебры KA, соответствующий единичному характеру χ группы A, u — минимальный идемпотент алгебры KH, соответствующий характеру θ группы H, M — множество минимальных идемпотентов алгебры KH, участвующих в разложении идемпотента e, и M' — множество всех минимальных идемпотентов алгебры KH, ядра которых содержат A. Пусть $u\in M$, т. е. $e=u+\cdots$. Тогда $\theta|_A=\chi$ и $\operatorname{Ker}u=\operatorname{Ker}\theta\supseteqq\operatorname{Ker}\theta|_A=\operatorname{Ker}\chi=\operatorname{Ker}e=A$, т. е. $u\in M'$ или $M\subseteqq M'$. Пусть теперь $u\in M'$, т. е. $\operatorname{Ker}\theta=\operatorname{Ker}u\supseteqq A$. Очевидно $\theta|_A=\chi$. Следовательно, $l=u+\cdots$, т. е. $u\in M$ или $M'\subseteqq M$. Таким образом $M=M'$ и $e=\Sigma_{u\in M}u=\Sigma_{u\in M'}u$.

Лемма 14. *Если G_1 — подгруппа абелевой группы G, F — конечная подгруппа группы G, H — подгруппа группы F, e — минимальный идемпотент алгебры KH и $e=e_1+\cdots+e_s$ — разложение e в сумму минимальных идемпотентов в KF, то $(H\cap G_1)\setminus\operatorname{Ker}e=(H\cap G_1)\setminus\operatorname{Ker}e_i$, $l=1,2,\ldots,s$.*

Доказательство. Если $(H\cap G_1)\setminus\operatorname{Ker}e=\varnothing$ ($\varnothing$ — пустое множество), то $(H\cap G_1)\setminus\operatorname{Ker}e_i=\varnothing$, так как $\operatorname{Ker}e_i\supseteqq\operatorname{Ker}e$. Пусть $h\in(H\cap G_1)\setminus\operatorname{Ker}e$. Если e соответствует характеру χ группы H, а e_i соответствует характеру χ_i группы F, то $\chi_{i|H}=\chi$ и, ввиду $h\notin\operatorname{Ker}e=\operatorname{Ker}\chi$, $\chi_i(h)=\chi(h)\neq 1$, т. е. $h\notin\operatorname{Ker}\chi_i=\operatorname{Ker}e_i$. Обратное включение очевидно. Лемма доказана.

Хорошо известно, что если H — конечная группа, u — минимальный идемпотент алгебры KH и $h\in H$, то $hu=u$ тогда и только тогда, когда $h\in\operatorname{Ker}u$.

В следующих утверждениях будем считать, что G_1 — подгруппа абелевой p-группы G и что φ — отображение, для которого $\varphi(\Sigma_{g\in G}\chi_g g)=\Sigma_{g\in G}\chi_g(gG_1)$. Очевидно φ — гомоморфизм, отображающий p-элементы в p-элементах, т. е. $\varphi: S(KG)\to S(K(G/G_1))$.

Лемма 15. *Пуст A — множество всех элементов x группы $S(KG)$, обладающих свойством: для любого такого x существует конечная подгруппа $H_x=H$ группы G, такая, что* 1) $x\in KH$ *и* 2) *если $u_1,\ldots,u_s$ — минимальные идемпотенты алгебры KG, ядра которых содержат $H\cap G_1$, то $xu_i=u_i$, $i=1,\ldots,s$. Тогда* $\operatorname{Ker}\varphi=A$.

Доказательство. Пусть $x\in\operatorname{Ker}\varphi$ и H — любая конечная подгруппа группы G, такая, что $x\in KH$. Пусть $H_1=H\cap G_1$ и $M=\Pi(H/H_1)$, содержащая 1. Тогда, если $x=\Sigma_{g\in H}x_g g$, то

$$\Sigma_{t\in H_1}x_{gt}=\begin{cases}1, & \text{если } g=1,\\ 0, & \text{если } g\in M\setminus\{1\}.\end{cases}\tag{13}$$

Пусть u — любой минимальный идемпотент алгебры KH, такой, что $\operatorname{Ker}u\supseteq H_1$. Тогда

$$xu=(\sum_{h\in H}x_h h)u=\sum_{g\in M}\sum_{t\in H_1}x_{gt}g(tu)=\sum_{g\in M}(\sum_{t\in H_1}x_{gt})gu=u,$$

где предпоследнее равенство, ввиду $t\in H_1\subseteq\operatorname{Ker}u$, следует из $tu=u$, а последнее — из $x\in\operatorname{Ker}\varphi$ и (13). Следовательно, $x\in A$, т. е. $\operatorname{Ker}\varphi\subseteq A$.

Пусть теперь $x\in A$. Тогда существует подгруппа H группы G, удовлетворяющая условия 1) и 2). В силу леммы 13 имеет место $u_1+\cdots+u_s=u$, где u — минимальный идемпотент алгебры KH_1, соответствующий единичному характеру группы H_1. Тогда, слагая равенства $xu_i=u_i$, $i=1,\ldots,s$, получаем $xu=u$. Последнему равенству, действуя гомоморфизмом φ, имеем

$$\varphi(x)\varphi(u)=\varphi(u).\tag{14}$$

Однако $\varphi(u)=(1/|H_1|)\Sigma_{g\in H_1}gG_1=G_1$. Тогда (14) принимает вид $\varphi(x)G_1=G_1$ или $\varphi(x)=G_1$, т. е. $x\in\operatorname{Ker}\varphi$. Следовательно, $A=\operatorname{Ker}\varphi$.

Из доказательства первой части леммы 15 получается следующее утверждение.

Следствие 16. *Ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ гомоморфизма φ совпадает с множеством всех элементов x группы $S(KG)$ со свойством: если H — любая конечная подгруппа группы G, для которой $x\in S(KH)$ и $u_1,\ldots,u_s$ — все минимальные идемпотенты алгебры KH, ядра которых содержат $H\cap G_1$, то $xu_i=u_i$, $i=1,\ldots,s$.*

Лемма 17. *Пусть $\mathscr{X}$ — группа характеров абелевой p-группы G, $x\in KG$ и H — подгруппа носителя элемента x. Элемент $x=\Sigma_{g\in H}x_g g$ принадлежит группе $S(KG)$ тогда и только тогда, когда для любого характера $\chi\in\mathscr{X}$ имеет место $\Sigma_{g\in H}x_g\chi(g)\in\bar{K}_p$, $\Sigma_{g\in H}x_g=1$ и $x_g\in K$.*

Доказательство. Пусть F — множество всех функций $f:\mathscr{X}\to\bar{K}$, для каждой функции f, из которых существует конечная подгруппа T группы G со следующим свойством: из $\chi_1|_T=\chi_2|_T(\chi_i\in\mathscr{X})$ вытекает, что $f(\chi_1)=f(\chi_2)$ (см. [9]). Множество F является $\bar{K}$-алгеброй и отображение $\psi:\bar{K}G\to F$ определено следующим образом: если $x=\Sigma_{g\in H}x_g g$ и $\chi\in\mathscr{X}$, то $\psi(x)(\chi)=\Sigma_{g\in H}x_g\chi(g)$, является $\bar{K}$-изоморфизмом (см. [9]). Рассмотрим p-подгруппу $V_p(F)=\{f\in F/\forall\chi\in\mathscr{X},\ f(\chi)\in\bar{K}_p,\ f(\chi_0)=1\}$ (см. [9]). Тогда утверждение

$x \in S(KH)$ эквивалентно утверждениям 1) $\psi(x) \in V_p(F)$ и 2) для любого $\chi \in \mathscr{X}$ имеет место $\psi(x)(\chi) \in \bar{K}_p$ и $\psi(x)(\chi_0)=1$, где χ_0 — единичный характер. Из 2) следует утверждение леммы.

Лемма 18. *Отображение* $\varphi: S(KG) \to S(K(G/G_1)$ *является эпиморфизмом.*

Доказательство. Рассмотрим следующие два случая.

1) Пусть G — конечная группа. Обозначим $M = \Pi(G/G_1)$, так что $1 \in M$. Любой элемент группы $S(K(G/G_1))$ можно записать в виде $y = \Sigma_{s \in M} y_s(sG_1)$. Ищем элемент $x = \Sigma_{g \in G} x_g g$, являющийся прообразом элемента y в $S(KG)$ при отображении φ. Пусть

$$x_g = \begin{cases} 1 + (y_1 - 1)/|G_1|, & \text{если } g = 1, \\ (y_1 - 1)/|G_1|, & \text{если } g \in G_1 \setminus \{1\}, \\ (y_{\pi(g)}/|G_1|, & \text{если } g \in G \setminus G_1, \end{cases} \tag{15}$$

где $\pi(g)$ — единственный представитель смежного класса gG_1 в M. Тогда

$$\varphi(x) = \sum_{h \in M} \Big(\sum_{g \in hG_1} x_g\Big)(hG_1) = \Big(\sum_{g \in G_1} x_g\Big)G_1 + \sum_{h \in M \setminus \{1\}} \Big(\sum_{g \in hG_1} x_g\Big)(hG_1)$$

$$= \Big(1 + \frac{y_1 - 1}{|G_1|} + \frac{y_1 - 1}{|G_1|}(|G_1| - 1)\Big)G_1 + \frac{1}{|G_1|} \sum_{h \in M \setminus \{1\}} \Big(\sum_{g \in hG_1} y_h\Big)(hG_1)$$

$$= y_1 G_1 + \Sigma_{h \in M \setminus \{1\}} y_h(hG_1) = \Sigma_{h \in M} y_h(hG_1) = y,$$

где для получения третьего равенства использовано (15), учитывая, что $\pi(g) = h$, когда $g \in hG_1$ $(h \in M)$. Докажем, что а) $\Sigma_{g \in G} x_g = 1$ и б) $\Sigma_{g \in G} x_g \chi(g) \in \bar{K}_p$ для любого характера χ группы G. Тогда, ввиду леммы 17, $x \in S(KG)$ и утверждение будет установлено.

Докажем а). Действительно,

$$\Sigma_{g \in G} x_g = 1 + (y_1 - 1)/|G_1| + (y_1 - 1)(|G_1| - 1)/|G_1| + (1/|G_1|)\Sigma_{g \in G \setminus G_1} y_{\pi(g)}$$

$$= y_1 + (|G_1|/|G_1|)\Sigma_{h \in M \setminus \{1\}} y_h = \Sigma_{h \in M} y_h = 1,$$

так как y — нормированная единица, т. е. $y \in S(K(G/G_1))$.

Докажем б). Ввиду (15),

$$\sum_{g \in G} x_g \chi(g) = 1 + \frac{y_1 - 1}{|G_1|} + \frac{y_1 - 1}{|G_1|} \sum_{g \in G_1 \setminus \{1\}} \chi(g) + \frac{1}{|G_1|} \sum_{h \in M \setminus \{1\}} \Big(\sum_{g \in hG_1} y_{\pi(g)} \chi(g)\Big)$$

$$= 1 + \frac{y_1 - 1}{|G_1|} \sum_{g \in G_1} \chi(g) + \frac{1}{|G_1|} \sum_{h \in M \setminus \{1\}} \Big(\sum_{g_1 \in G_1} y_h \chi(h) \chi(g_1)\Big)$$

$$= 1 + \frac{y_1 - 1}{|G_1|} \sum_{g \in G_1} \chi(g) + \frac{1}{|G_1|} \sum_{h \in M \setminus \{1\}} y_h \chi(h) \sum_{g_1 \in G_1} \chi(g_1),$$

где для получения второго равенства положено $g = hg_1$ (и $\pi(g) = h$). Следовательно,

$$\Sigma_{g \in G} x_g \chi(g) = 1 + \frac{1}{|G_1|}(y_1 - 1 + \Sigma_{h \in M \setminus \{1\}} y_h \chi(h)) \Sigma_{g_1 \in G_1} \chi(g_1). \tag{16}$$

Пусть $\mathscr{X}_1$ — подмножество $\mathscr{X}$, состоящее из всех характеров χ со свойством: $\chi(g) = 1$ для любого $g \in G_1$. Для характера χ рассмотрим следующие два подслучая.

б1) Пусть $\chi \in \mathscr{X} \setminus \mathscr{X}_1$. Тогда $\Sigma_{g_1 \in G_1}\chi(g_1)=0$ и из (16) следует, что $\Sigma_{g \in G} x_g \chi(g) = 1 \in \overline{K}_p$.

б2) Пусть $\chi \in \mathscr{X}_1$. Тогда $\Sigma_{g_1 \in G_1}\chi(g_1)=|G_1|$ и из (16) получается

$$\Sigma_{g \in G} x_g \chi(g) = \Sigma_{h \in M}\, y_h \chi(h) = \Sigma_{h \in M}\, y_h \chi(hG_1).$$

Так как $y \in S(K(G/G_1))$, то из леммы 17 следует, что $\Sigma_{h \in M}\, y_h \chi(hG_1) \in \overline{K}_p$, чем случай б2) закончен.

2) Пусть G — бесконечная группа. Докажем, что любой элемент $y \in S(K(G/G_1))$ обладает прообразом в $S(KG)$ при гомоморфизме φ. Пусть H_1/G_1 — подгруппа носителя элемента y, $M=\Pi(H_1/G_1)$ и $H=\langle M\rangle$. Очевидно H — конечная группа и ограничение $\varphi|_H=\theta: H \to H_1|G_1$ является эпиморфизмом. Если $\eta: H \to H/\mathrm{Ker}\,\theta$ — натуральный гомоморфизм, то ввиду теоремы гомоморфизмов существует изоморфизм $\sigma: H_1|G_1 \to H/\mathrm{Ker}\,\theta$, такой, что $\eta=\sigma\theta$. Пусть $\overline{\sigma}: K(H_1/G_1) \to K(H/\mathrm{Ker}\,\theta)$, $\overline{\eta}: KH \to K(H/\mathrm{Ker}\,\theta)$ — продолженные по линейности соответствующие отображения и $\overline{\theta}=\varphi|_{KH}$. Следовательно, $\overline{\sigma}$ и его ограничение $\overline{\sigma}$: $S(K(H_1/G_1)) \to S(K(H/\mathrm{Ker}\,\theta))$ также изоморфизмы. Так как H — конечная группа, то ввиду пункта 1, $\overline{\eta}: S(KH) \to S(K(H/\mathrm{Ker}\,\theta))$ является эпиморфизмом. Ввиду того, что для гомоморфизма $\overline{\theta}$: $S(KH) \to S(K(G/G_1))$ имеет место $\overline{\theta}=\overline{\sigma}^{-1}\overline{\eta}$, $\overline{\sigma}^{-1}$ — изоморфизм и $\overline{\eta}$ — эпиморфизм, то $\overline{\theta}$ — эпиморфизм, т. е. элемент y обладает прообразом в $S(KH) \subseteq S(KG)$ при гомоморфизме $\overline{\theta}=\varphi|_{KH}$. Лемма доказана.

Имея в виду теорему 12, следующая теорема дает описание группы $S(KG)$, когда G/G^1 — прямое произведение циклических групп.

Теорема 19. *Если G — бесконечная абелева p-группа, G^1 — ее подгруппа элементов бесконечной высоты и K — поле первого рода относительно p, то имеет место прямое разложение*

$$S(KG)=P\times S(K(G/G^1)), \tag{17}$$

где P — максимальная полная подгруппа группы $S(KG)$ и $S(K(G/G^1)$ — сепарабельная группа. Если $G^1=1$, то $P=1$, а если $G^1 \neq 1$, то

$$P \cong \Pi_{|G|}(p^\infty). \tag{18}$$

Доказательство. Мы будем использовать гомоморфизм $\varphi: S(KG) \to S(K(G/G_1))$ (рассматриваемый в лемме 15) для $G_1=G^1$. В силу леммы 18, φ является эпиморфизмом. Докажем, что $\mathrm{Ker}\,\varphi=P$ — полная подгруппа группы $S(KG)$, откуда будет следовать (17), и, что P — максимальная полная подгруппа группы $S(KG)$. Пусть x — любой элемент ядра $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Ввиду леммы 15, существует конечная подгруппа H группы G, такая, что $x \in S(KH)$, и если $\{u_1, \ldots, u_s, e_1, \ldots, e_r\}$ — полная система минимальных идемпотентов алгебры KH, такая, что $\mathrm{Ker}\,e_i \not\supseteq H \cap G^1$, $i=1, \ldots, r$, и $\mathrm{Ker}\,u_j \supseteq H \cap G^1$, $j=1, \ldots, s$, то $xu_j=u_j$, $j=1, \ldots, s$, т. е. x имеет вид $x=u_1+\cdots+u_s+xe_1+\cdots+xe_r$. Следовательно, для каждого i, $i=1, \ldots, r$, существует $h_i \in (H \cap G^1) \setminus \mathrm{Ker}\,e_i$ Обозначим $O(xe_i)=p^{\alpha_i}$. Так как $h_i \in G^1$, то существует элемент $a_i \in G$, такой, что $a_i^{p^{\alpha_i}}=h_i$, $i=1, \ldots, r$. Образуем $F=\langle H, a_1, \ldots, a_r\rangle$. Пусть $e_i=e_{i1}+\cdots+e_{i\beta_i}$, $i=1, \ldots, r$, является разложением идемпотента e_i в сумму минимальных идемпотентов в KF. Так как $KFe_{ij} \cong K(\chi)$, где χ — характер группы F, которому соответствует e_{ij} и $K(\chi)$ — поле первого рода относительно p, то, ввиду леммы 2, силовская p-подгруппа мультипликативной группы поля

$K(\chi)$ является циклической, т. е. $(KFe_{ij})_p$ — циклическая группа. Так как $h_i \in (H \cap G^1) \setminus \operatorname{Ker} e_i = (H \cap G^1) \setminus \operatorname{Ker} e_{ij}$, где равенство следует из леммы 14, то $h_i \notin \operatorname{Ker} e_{ij}$, т. е. $h_i e_{ij} \neq e_{ij}$ для каждого $i = 1, \ldots, r$ и $j = 1, \ldots, \beta_i$. Тогда для каждого i и j $(a_i e_{ij})^{p^{\alpha_i}} = h_i e_{ij} \neq e_{ij}$, т. е. $O(a_i e_{ij}) > p^{\alpha_i}$ и $(KFe_{ij})_p$ имеет порядок, больше чем p^{α_i}.

Ввиду того, что элемент xe_{ij} порядка p^{α_i} принадлежит циклической группе $(KFe_{ij})_p$ порядка больше, чем p^{α_i}, то $xe_{ij} = (y_{ij} e_{ij})^p = y_{ij}^p e_{ij}$, $y_{ij} \in KF$, $i = 1, \ldots, r$; $j = 1, \ldots, \beta_i$. Пусть $u_i = u_{i1} + \cdots + u_{i\gamma_i}$, $i = 1, \ldots, s$, является разложением идемпотента u_i в сумму минимальных идемпотентов в алгебре KF. Образуем элемент $y = \Sigma_{i=1}^{s} \Sigma_{j=1}^{\gamma_i} u_{ij} + \Sigma_{i=1}^{r} \Sigma_{j=1}^{\beta_i} y_{ij} e_{ij}$. Очевидно $y^p = x$. Так как $h_i \in (H \cap G^1) \setminus \operatorname{Ker} e_{ij}$, то $\operatorname{Ker} e_{ij} \not\supseteq H \cap G^1$, т. е. $\operatorname{Ker} e_{ij} \not\supseteq F \cap G^1$, для каждого $i = 1, \ldots, r$ и $j = 1, \ldots, \beta_i$. Следовательно, ввиду следствия 16, $y \in \operatorname{Ker} \varphi$, т. е. $\operatorname{Ker} \varphi = P$ — полная группа.

Для второй части доказательства теоремы установим:

1) если $G^1 = 1$, то $S^1(KG) = 1$;

2) если $G^1 \neq 1$, то $S^1(KG) = P$, т. е. $S^1(KG)$ — полная группа.

Доказательство пункта 1). Пусть $x \in S(KG)$ и F — подгруппа носителя элемента x. Так как F — конечная подгруппа сепарабельной группы G, то F можно вложить в конечный прямой множитель H группы G ([12, с. 7] с показателем p^r. Ввиду предложения 11, $S(KH) = \bar{S}$ имеет конечный показатель p^t. В силу леммы 6, $h_S(x) = h_{\bar{S}}(x) \leq t$. Следовательно, $S^1(KG) = 1$.

Доказательство пункта 2. Так как G/G^1 — сепарабельная группа, то, ввиду пункта 1), $S^1(K(G/G^1)) = 1$, т. е. $S(K(G/G^1))$ — сепарабельная группа. Тогда из (17) следует $S^1(KG) \cong P$, т. е. $S^1(KG)$ — полная группа. Так как P — максимальная полная подгруппа группы $S(KG)$, $S^1(KG) \supseteq P$ и $S^1(KG)$ — полная группа, то $S^1(KG) = P$, чем установлен пункт 2).

Пусть $G^1 = 1$. Так как $P \subseteq S^1(KG)$ и по пункту 1 $S^1(KG) = 1$, то $P = 1$. Пусть $G^1 \neq 1$. Докажем формулу (18). Если $|G| = \aleph_0$, то (18) доказана в [4]. Пусть $|G| > \aleph_0$. Если $|G^1| = |G|$, то, ввиду пункта 2, $P = S^1(KG) \supseteq G^1$ и, следовательно, $|P| = |G^1| = |G|$, т. е. имеет место (18). Поэтому предположим, что $|G^1| < |G|$, т. е. $|G| = |G/G^1|$. Укажем $|G|$ различных элементов в $P = \operatorname{Ker} \varphi$, откуда будет следовать (18). Группа P неединична, так как $P = S^1(KG) \supset G^1 \neq 1$. Пусть $H = \langle a \rangle$ — любая подгруппа группы G^1 порядка p, $e_1, \ldots, e_s$ — минимальные идемпотенты алгебры KH и $\operatorname{Ker} e_s = 1$. Рассмотрим всевозможные элементы вида $y_g = e_1 + \cdots + e_{s-1} + ge_s$, где g пробегает $\Pi(G/G^1)$. Очевидно $y_g \in S(KG)$. Пусть $F = \langle H, g \rangle$ и $e_j = e_{j1} + \cdots + e_{j\alpha_j}$ — разложение e_j в KF в сумму минимальных идемпотентов, $j = 1, \ldots, s$. Так как $\operatorname{Ker} e_s \not\supseteq H \cap G^1$, то существует элемент $h \in (H \cap G^1) \setminus \operatorname{Ker} e_s = (H \cap G^1) \setminus \operatorname{Ker} e_{si} \subseteq (F \cap G^1) \setminus \operatorname{Ker} e_{si}$, $i = 1, \ldots, \alpha_s$, где равенство следует из леммы 14. Следовательно, $\operatorname{Ker} e_{si} \not\supseteq F \cap G^1$, $i = 1, \ldots, \alpha_s$ и, ввиду леммы 15, $y_g \in \operatorname{Ker} \varphi = P$. Если $g \neq g_1$ и $g, g_1 \in \Pi(G/G^1)$, то $y_g \neq y_{g_1}$. Допустим противное. Тогда следует, что $ge_s = g_1 e_s$. Так как g и g_1 — различные представители смежных классов группы G по подгруппе H, то ge_s и $g_1 e_s$ записываются через элементы различных смежных классов gH и $g_1 H$, что противоречит полученному равенству $ge_s = g_1 e_s$. Таким образом, $\operatorname{Ker} \varphi$ содержит подмножество $\{y_g\}$ с мощностью $|G/G^1| = |G| > \aleph_0$. Следовательно, P содержит $\Pi_{|G|}(p^\infty)$. Так как, ввиду леммы 5, $|S(KG)| = |G|$, то имеет место (18). Теорема доказана.

Вспомогательные утверждения пунктов 1) и 2) из доказательства этой теоремы очевидно эквивалентны следующему предложению.

Предложение 20. *Если G — абелева p-группа и K — поле первого рода относительно p, то $S(KG)$ — сепарабельная группа тогда и только тогда, когда G — сепарабельная группа. Подгруппа $S^1(KG)$ элементов бесконечной высоты в $S(KG)$ является полной группой.*

Теорема 21. *Пусть G — бесконечная абелева p-группа и K — поле второго рода относительно p. Тогда*

1) *если $p \neq 2$ или $p=2$, но $K=K(\varepsilon_2)$, то*

$$S(KG) \cong \Pi_{|G|}(p^\infty); \tag{19}$$

2) *если $p=2$ и $K \neq K(\varepsilon_2)$, то*

$$S(KG) \cong P \times S(K(G/G^2)), \tag{20}$$

где P — максимальная полная подгруппа группы $S(KG)$. Если $G^2=1$, то $P=1$, а если $G^2 \neq 1$, то P разлагается в прямое произведение $|G|$ квазициклических групп типа p^∞, т. е. выполнено (18). *Для группы $S(K(G/G^2)$ имеет место*

$$S(K(G/G^2)) \cong \Pi_{|G/G^2|-1}(2). \tag{21}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие 1) теоремы. Любой элемент x группы $S(KG)$ принадлежит $S(KF)$ для некоторой конечной подгруппы F группы G и для $S(KF)$ имеет место формула (3). Так как K — поле второго рода относительно p, то в (3) $(I_i)_p \cong (p^\infty)$, $i=1, \ldots, s$, т. е. $S(KG)$ — полная группа. Если $|G|=\aleph_0$, то (19) доказана в [4], а если $|G|>\aleph_0$, то (19) следует тривиально из $|S(KG)|=|G|>\aleph_0$.

Пусть $p=2$ и $K \neq K(\varepsilon_2)$. Мы будем использовать гомоморфизм φ (рассматриваемый в лемме 15) для $G_1=G^2$. Докажем, что $\operatorname{Ker}\varphi$ — полная группа. Пусть x — любой элемент ядра $\operatorname{Ker}\varphi$. Ввиду леммы 15 существует конечная подгруппа H группы G, такая, что $x \in S(KH)$, и если $\{u_1, \ldots, u_s, e_1, \ldots, e_r\}$ — полная система минимальных идемпотентов алгебры KH, такая, что $\operatorname{Ker} e_i \not\supseteq H \cap G^2$, $i=1, \ldots, r$, и $\operatorname{Ker} u_j \supseteq H \cap G^2$, $j=1, \ldots, s$, то $xu_j=u_j$, $j=1, \ldots, s$. Следовательно, для каждого i, $i=1, \ldots, r$, существует $h_i \in (H \cap G^2) \setminus \operatorname{Ker} e_i$. Так как $h_i \in G^2$, то существует $a_i \in G^2$, такое, что $a_i^2=h_i$, $i=1, \ldots, r$. Образуем $F=\langle H, a_1, \ldots, a_r\rangle$. Если $e_i=e_{i1}+\cdots+e_{i\alpha_i}$, $i=1, \ldots, r$, является разложением e_i в сумму минимальных идемпотентов в KF, то, аналогично доказательству теоремы (19), видно, что $O(a_i e_{ij}) \geq 2^2$, т. е. KFe_{ij} содержит подполе, изоморфное полю $K(\varepsilon_2)$. Следовательно, $(KFe_{ij})_2 \cong (2^\infty)$ и для $xe_{ij} \in (KFe_{ij})_2$ имеет место $xe_{ij}=y_{ij}^2 e_{ij}$. Аналогично доказательству теоремы 19 строится элемент $y \in \operatorname{Ker}\varphi$, такой, что $x=y^2$, т. е. $\operatorname{Ker}\varphi=P$ — полная группа. Следовательно, имеет место (20) и P — максимальная полная подгруппа группы $S(KG)$.

Если G/G^2 — конечная группа и $|G/G^2|=2^s$, то прямая сумма $K(G/G^2) \cong K \oplus \cdots \oplus K$ состоит из 2^s полей K и так как $K_2 \cong (2)$, то имеет место (21). Кроме того, мы доказали, что если A — конечная группа с показателем 2 (и, ввиду рассматриваемого случая, $K \neq K(\varepsilon_2)$), то $S(KA)$ — конечная группа с показателем 2. Пусть G/G^2 — бесконечная группа. Любая конечная подгруппа H/G^2 группы G/G^2 имеет показатель 2, следовательно, $S(K(H/G^2))$ и $S(K(G/G^2))$ — группы с показателем 2. Так как $S(K(G/G^2)) \supseteq G/G^2$, то $|S(K(G/G^2))| \geq |(G/G^2)|$. В силу лемы 5, следует формула (21).

Для описания полной группы P при $p=2$ и $K \neq K(\varepsilon_2)$ рассматриваются два случая: $G^2=1$ и $G^2 \neq 1$. Если $G^2=1$, то аналогично вышедоказанному видно, что $S(KG)$ — группа с показателем 2, т. е. $P=1$. Пусть $G^2 \neq 1$ и $|G| > \aleph_0$. Из (20), учитывая (21), видно, что $S^2(KG)$ — полная группа. Следовательно, $P=S^2(KG) \supseteq G^2$ и $|P| \geqq |G^2|$. Если $|G^2|=|G|$, то получится $|P|=|G|$, т. е. имеет место (18). Поэтому предположим, что $|G^2|<|G|$, т. е. $|G|=|G/G^2|$. Укажем в $P=\operatorname{Ker}\varphi$ $|G|$ различных элементов, откуда будет следовать (18). Группа $P \neq 1$, так как $P \supseteq G^2 \neq 1$. Пусть $H=\langle a\rangle$ — любая подгруппа группы G^2 порядка 2. Если e_1 — минимальный идемпотент алгебры KH с ядром H, а e_2 — минимальный идемпотент KH с ядром 1, то $1=e_1+e_2$. Рассмотрим всевозможные элементы вида $y_g=e_1+ge_2$, где g пробегает $\Pi(G/G^2)$. Очевидно $y_g \in S(KG)$. Образуя $F=\langle H, g\rangle$, аналогично доказательству теоремы 19, показывается, что $y_g \in \operatorname{Ker}\varphi$. Если $g \neq g_1$ и $g, g_1 \in \Pi(G/G^2)$ то $y_g \neq y_{g_1}$. Следовательно, имеет место (18). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Берман. Групповые алгебры счетных абелевых p-групп. *Publ. Math. (Debrecen)*, 14, 1967, 365—405.
2. С. Д. Берман, Т. Ж. Моллов. О групповых кольцах абелевых p-групп. *Мат. заметки*, 6, 1969, 381—392.
3. С. Д. Берман, Т. Ж. Моллов. Расщепляемость базисов и изоморфизм групповых колец абелевых групп. *Плиска*, 2, 1981, 6—22.
4. С. Д. Берман, А. Р. Росса. Силовская p-подгруппа групповой алгебры счетной абелевой p-группы. *Материалы XXIX Научн. конф. проф.-преп. состава Ужгор. ун-тета, Секция мат. наук.*, 1975, 158—176.
5. А. А. Бовди, З. Ф. Патай. О строении центра мультипликативной группы группового кольца p-группы над кольцом характеристики p. *Весцы АН Беларусской ССР*, 1, 1978, 5—11.
6. Т. Ж. Моллов. Силовские p-подгруппы групп единиц модулярных групповых алгебр абелевых p-групп. *Сердика*, 1, 1975, 249—260.
7. Т. Ж. Моллов. Ульмовские инварианты силовских p-подгрупп групповых алгебр абелевых групп над полем характеристики p. *Плиска*, 2, 1981, 77—82.
8. Т. Ж. Моллов. О мультипликативных группах полупростых групповых алгебр абелевых p-групп. *Доклады БАН*, 35, 1982, 1619—1622.
9. Н. А. Начев. Инварианты Ульма—Капланского группы нормированных единиц групповых алгебр абелевых p-групп над коммутативным кольцом, в которым p—обратимый элемент. *Плиска*, 8, 1986, 21—33.
10. Н. А. Начев, Т. Ж. Моллов. Инварианты Ульма—Капланского группы нормированных единиц центра группового кольца FC—p-группы над коммутативным кольцом характеристики p. *Сердика*. 7, 1981, 42—56.
11. Н. А. Начев, Т. Ж. Моллов. Инварианты Ульма—Капланского группы нормированных единиц модулярного группового кольца примарной абелевой группы. *Сердика*, 6, 1980, 258—263.
12. Л. Фукс. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. Москва, 1977.

Пловдивский университет
4000 Пловдив Болгария

Поступила 29. 6. 1982