Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

PLISKA

STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Pliska Studia Mathematica Bulgarica
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~pliska/
or contact: Editorial Office
Pliska Studia Mathematica Bulgarica
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: pliska@math.bas.bg

СЛАБЫЕ ТОЖДЕСТВА В АЛГЕБРЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ВЕСЕЛИН С. ДРЕНСКИ

Описаны слабые полиномиальные тождества йордановой алгебры симметрических матриц второго порядка над полем нулевой характеристики. Соответствующий слабый вербальный идеал порождается стандартным тождеством четвертой степени и тождеством метабелевости.

Пусть K_2 — алгебра матриц второго порядка над полем K, $H(K_2)$ — йорданова алгебра симметрических матриц в K_2. А. М. Слинько поставил вопрос о нахождении базиса слабых тождеств в паре $(K_2, H(K_2))$ в случае поля нулевой характеристики [2, проблема 2.96]. Частичный ответ дан в [10], где описано модульное строение относительно свободной пары, соответствующей слабому T-идеалу $(T(K_2)\ H(K_2))$. Главная цель представленной работы — дать полный ответ на вопрос А. М. Слинько:

Теорема. *Пусть K — поле характеристики 0. Тогда базис слабых тождеств пары $(K_2, H(K_2))$ состоит из стандартного тождества*

$$S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \tag{1}$$

и из тождества метабелевости

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] = 0. \tag{2}$$

1. Предварительные результаты. На протяжении всей работы K будет фиксированным полем характеристики 0. Все ассоциативные и йордановы алгебры будут с единицей и над K. Наличие единицы не уменьшает общности рассуждений, потому что алгебры K_2 и $H(K_2)$ унитарны. Все необходимые сведения о тождествах в йордановых алгебрах можно найти в [5]. Обозначения будут близки к [9] и [10].

Обозначим A_m свободную ассоциативную алгебру $A(x_1, \ldots, x_m)$ со свободными образующими $x_1, \ldots, x_m$; $A = A_\infty$. Кроме того, $x_1 \circ x_2 = x_1x_2 + x_2x_1$, $x_1 \circ \cdots \circ x_{n-1} \circ x_n = (x_1 \circ \cdots \circ x_{n-1}) \circ x_n$, $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$, $[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$. Пусть $B_m^{(n)}$ — линейное пространство в A_m, натянутое на произведения коммутаторов $[x_{i_1}, \ldots] \ldots [\ldots, x_{i_n}]$, $B_m = \Sigma_{n\geq 0} B_m^{(n)}$, а P_n — множество полилинейных многочленов степени n в A_n. Тогда $\Gamma_n = P_n \cap B_n^{(n)}$ является подмножеством собственных многочленов из P_n. Линейные пространства P_n и A_m обладают структурой левых $\mathrm{Sym}(n)$- и $GL(m, K)$-модулей, соответственно (см., например [3, § 1]), где $\mathrm{Sym}(n)$ — симметрическая группа, действующая на множество $\{1, \ldots, n\}$, а $GL(m, K)$ — полная линейная группа. Подпространства Γ_n и $B_m^{(n)}$ являются подмодулями P_n и A_m. Неприводимые $\mathrm{Sym}(n)$- и $GL(m, K)$-модули описываются диаграммами Юнга или разбие-

ПЛИСКА Български математически студии. Том 8, 1986, с. 77—84.

ниями $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ числа n. Соответствующие модули будем обозначать $M(\lambda)$ и $N_m(\lambda)$.

Алгебра A_m является универсальной обертывающей свободной алгебры Ли L_m. Используя теорему Пуанкаре — Биркгоффа — Витта, легко получить, что если $f_{ks}(x_1, \ldots, x_k)$, $s=1, \ldots, \gamma_k$, базис пространства Γ_k, то P_n имеет базис $x_{i_1} \ldots x_{i_{n-k}} f_{ks}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$, $i_1 < \cdots < i_{n-k}$, $j_1 < \cdots < j_k$, $\{i_1, \ldots, i_{n-k}, j_1, \ldots, j_k\}=\{1, \ldots, n\}$, $s=1, \ldots, \gamma_k$, $k=0, 1, \ldots, n$. Аналогично, если $g_{ks}(x_1, \ldots, x_m)$, $s=1, \ldots, \beta_k$, базис в $B_m^{(k)}$, то A_m имеет базис $x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m} g_{ks}(x_1, \ldots, x_m)$, $\alpha_i \geqq 0$, $i=1, \ldots, m$, $s=1, \ldots, \beta_k$, $k=0, 1, 2, \ldots$.

В A_m есть инволюция $*$, определенная равенством $(x_{i_1} \ldots x_{i_n})^*=x_{i_n} \ldots x_{i_1}$. Йорданова алгебра симметрических элементов $H(A_m, *)$ содержит свободную специальную йорданову алгебру SJ_m. По теореме П. М. Кона [5, с. 76], при $m \leqq 3$ $H(A_m, *)=SJ_m$.

Отметим, что $[x_1, \ldots, x_n]^*=(-1)^{n-1}[x_1, \ldots, x_n]$, и коммутаторы нечетной длины являются йордановыми элементами, т. е. лежат в $SJ=SJ_\infty$.

Пусть G — специальная йорданова алгебра и R — ее ассоциативная обертывающая. По аналогии с [7, определения 1—3] многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ из A называется слабым тождеством в паре (R, G), если $f(g_1, \ldots, g_n)=0$ для любых $g_1, \ldots, g_n \in G$. Множество $T=T(R, G)$ всех слабых тождеств пары (R, G) является слабым T-идеалом (или слабым вербальным идеалом) в A. Многочлены $\{f_i(x_1, \ldots, x_{n_i})\}$ порождают T как слабый T-идеал (т. е. являются базисом T), если T порождается как обычный идеал множеством $\{f_i(u_1, \ldots, u_{n_i}), u_j \in SJ\}$. Из унитарности алгебр R и G и из вышеупомянутых замечаний о базисе в P_n и A_m следует, что базис тождеств T всегда можно выбрать из $\bigcup(\Gamma_n \cap T)$, $n \geqq 2$. Аналогично, все тождества из m переменных в T следуют из $\bigcup(B_m^{(n)} \cap T)$, $n \geqq 2$. Из леммы 2.3 [9] вытекает, что $\mathrm{Sym}(n)$ — модуль $\Gamma_n/(\Gamma_n \cap T)$, и $GL(m, K)$ — модуль $B_m^{(n)}/(B_m^{(n)} \cap T)$, имеют одинаковую структуру: Если $\Gamma_n/(\Gamma_n \cap T) \cong \Sigma k_\lambda M(\lambda)$, то $B_m^{(n)}/(B_m^{(n)} \cap T) \cong \Sigma k_\lambda N_m(\lambda)$. (Во всей работе суммы модулей прямые).

Доказательство следующей леммы повторяет доказательство леммы 1 из [10]:

Лемма 1. *Пусть G — алгебра Ли с упорядоченным базисом $g_1 < g_2 < \cdots$ и $U(G)$ — ее универсальная обертывающая. Тогда $U(G)$ имеет базис*

$$g_{i_1} \circ g_{i_2} \circ \cdots \circ g_{i_r}, \quad i_1 \geqq i_2 \geqq \cdots \geqq i_r.$$

Следствие 2. *Как линейное пространство алгебра A_3 натянута на элементы u и $u[v, w]$ (или u и $w[u, v]$), где $u, v, w \in SJ_3$.*

Доказательство. Выбираем упорядоченный базис из левонормированных коммутаторов в свободной алгебре Ли L_3, $u_1 u_2 < \cdots < v_1 < v_2 < \cdots$, где u_i (соответственно v_j) — коммутаторы четной (нечетной) длины (т. е. $u_i^*=-u_i$, $v_j^*=v_j$). По лемме 1, A_3 имеет базис, состоящий из многочленов

$$t=v_{j_1} \circ \cdots \circ v_{j_n} \circ u_{i_1} \circ \cdots u_{i_m}, \quad j_1 \geqq \cdots \geqq j_n, \quad i_1 \geqq \cdots \geqq i_m.$$

Если m — четное число, то $t^*=t$ и, по теореме П. М. Кона, $t \in SJ_3$, а если m нечетно, то $t=t_1 \circ u_{i_m}$, $t_1 \in SJ_3$. С другой стороны, $u_i=[[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}], x_{i_k}]$ и $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}] \in SJ_3$. Следовательно, t является йордановым значением x_1 или $x_1 \circ [x_2, x_3]$ (вместо x_1 может быть подставлена 1). Но $x_1 \circ [x_2, x_3] =[x_1, [x_2, x_3]]+2[x_2, x_3]x_1$ и $[x_1, [x_2, x_3]] \in SJ_3$, откуда получается следствие.

2. Слабые тождества Капелли. Напомним, что k-тое слабое тождество Капелли — это многочлен из P_n, $n \geqq k$, в котором есть k альтернирующих переменных $x_1, \ldots, x_k$. Тождества Капелли являются линейными комбинациями полилинейных многочленов степени n следующего вида:

$$\Sigma(-1)^\sigma u_1 x_{\sigma(1)} u_2 x_{\sigma(2)} \cdots u_k x_{\sigma(k)} u_{k+1}, \quad \sigma \in \operatorname{Sym}(k),$$

а $u_1, \ldots, u_{k+1}$ — одночлены.

Лемма 3. *Пусть (R, G) — пара и T — соответствующий слабый T-идеал, $F_m = A_m/(A_m \cap T)$, $\widetilde{B}_m$ и $\widetilde{\Gamma}_n$ — образы B_m и Γ_n при каноническом гомоморфизме $A_m \to F_m$. Пусть в $\widetilde{\Gamma}_n$, $n \geqq k$ аннулируются все многочлены, в которых есть k альтернирующих переменных. Тогда:*

а) $\widetilde{B}_m \cong \Sigma N_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1})$;

б) $\widetilde{F}_m \cong \Sigma N_m(\mu_1, \ldots, \mu_k)$;

в) *Пара (R, G) удовлетворяет все $k+1$-вые слабые тождества Капелли.*

Доказательство. а) Согласно теореме 2 [11], условие о многочленах, в которых k переменных альтернируют, означает, что все неприводимые компоненты $\operatorname{Sym}(n)$-модуля $\widetilde{\Gamma}_n$ отвечают диаграммам Юнга, в которых не более, чем $k-1$ строчек, $\widetilde{\Gamma}_n \cong \Sigma M(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1})$. Из соответствия между модульными структурами в $\widetilde{\Gamma}_n$ и $\widetilde{B}_m^{(n)}$ следует, что $\widetilde{B}_m \cong \Sigma N_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1})$.

б) Из теоремы 2.6 [9] и из предложения 2 [10] следует, что имеет место $GL(m, K)$-модульный изоморфизм $F_m \cong K[x_1, \ldots, x_m] \otimes_K \widetilde{B}_m$ ($K[x_1, \ldots, x_m]$ — алгебра обычных многочленов). Но $K[x_1, \ldots, x_m] \cong \Sigma N_m(n)$, $n \geqq 0$. Используя правило тензорного произведения $GL(m, K)$-модулей [1, гл. 8], получаем, что

$$N_m(n) \otimes N_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}) \cong \Sigma N_m(\lambda_\perp + n_1, \ldots, \lambda_{k-1} + n_{k-1}, \lambda_k),$$

где $0 \leqq n_1$, $0 \leqq n_i \leqq \lambda_{i-1} - \lambda_i$, $2 \leqq i \leqq k-1$, $0 \leqq n_k \leqq \lambda_{k-1}$, $n_1 + \cdots + n_k = n$. Следовательно, неприводимые подмодули в F_m имеют диаграммы Юнга с не более чем k строк.

в) Условие следует из теоремы 2 [11] и из соответствия между $\operatorname{Sym}(n)$- и $GL(m, K)$-модульной структурой в $P_n/(P_n \cap T)$ и F_m [3, § 1].

До конца работы через T будем обозначать слабый T-идеал, порожденный тождествами (1) и (2). Из предложения 2.1 [4] следует, что

$$\Gamma_4 \cong M(3, 1) + M(2^2) + M(2, 1^2) + M(1^4). \tag{3}$$

Отсюда легко вывести, что тождества (1) и (2) порождают $M(2, 1^2)$ и $M(1^4)$ в этом разложении и что они эквивалентны тождеству

$$\Sigma(-1)^\sigma [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] [x_{\sigma(3)}, x_4] = 0, \quad \sigma \in \operatorname{Sym}(3). \tag{4}$$

Пара $(K_2, H(K_2))$ удовлетворяет слабым тождествам (1) и (2). Это хорошо известно для (1), а для (2) проверяется непосредственно, потому что коммутатор двух симметрических матриц является кососимметрической матрицей и поэтому пропорционален $e_{12} - e_{21}$. Следовательно,

$$T \subset T(K_2, H(K_2)), \tag{5}$$

и теорема будет доказана, если установим, что в (5) имеет место равенство.

В дальнейшем будем работать в $F = A/T$.

Предложение 4. *В $\widetilde{\Gamma}_n$ нет ненулевых многочленов, в которых три из участвующих переменных альтернируют.*

Доказательство. Будем вести индукцию по n. Основание индукции $n=4$ следует из того, что в разложении (3) модули $M(2, 1^2)$ и $M(1^4)$ принадлежат T. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \widetilde{\Gamma}_n$ альтернирует по x_1, x_2, x_3. Сначала рассмотрим случай $n=5$. По теореме 2.3 [3] имеет место следующее разложение Sym (5)-модуля лиевых многочленов из Γ_5:

$$P_5(L) \cong M(4,1)+M(3,2)+M(3,1^2)+M(2^2,1)+M(2,1^3).$$

Согласно замечанию 2.8 [3], сумма последних трех подмодулей порождается тождеством $[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5]=0$, которое является слабым следствием из (2). Следовательно, если рассматриваемый многочлен f является лиевым элементом, то $f=0$ в $\widetilde{\Gamma}_5$. По замечанию 1.2 и предложению 2.4 [4], мы будем работать в Γ_5 по модулю $P_5(L)$ и

$$\Gamma_5/P_5(L) \cong M(3,2)+M(3,1^2)+M(2^2,1)+M(2,1^3).$$

Подставим в (2) вместо x_1 йорданов элемент x_1^2 и получим следствие

$$0=[[x_1, x_2] \circ x_1, [x_3, x_4]]=[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] \circ x_1+[x_1, x_2] \circ [x_1, [x_3, x_4]],$$

т. е. в F выполняется

$$[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4, x_1]=0. \tag{6}$$

В доказательстве леммы 3.2 [4] мы установили, что по модулю $P_5(L)$ тождества из подмодулей $M(3,1^2)$, $M(2^2,1)$ и $M(2,1^3)$ в Γ_5 следуют из (6). Это доказывает предложение при $n=5$. Позднее нам понадобится, что из (6) следует и тождество

$$[x_2, x_1, x_1] \circ [x_2, x_1]=0. \tag{7}$$

Перейдем к общему случаю. Согласно [6, с. 154], каждый элемент из $\widetilde{\Gamma}_n$ записывается как линейная комбинация произведений канонических коммутаторов $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}]$, $i_1>i_2<\cdots<i_k$. Кроме того,

$$\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]=0, \quad \Sigma(-1)^\sigma[x_i, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]=[x_i, x_1, x_2]$$
$$-[x_i, x_2, x_1]=-[x_1, x_2, x_i]=-(1/2)\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_i],$$
$$\Sigma(-1)^\sigma[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]=(1/2)\Sigma(-1)^\sigma[[x_{i_1}, x_{i_2}], [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]].$$

Поэтому мы можем предполагать, что альтернирующие переменные находятся на самом левом месте в двух или трех коммутаторах. Следовательно, $f(x_1, \ldots, x_n)$ линейная комбинация многочленов следующего типа:

$$\Sigma(-1)^\sigma u_1[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_i, \ldots]u_2[x_{\sigma(3)}, x_j, \ldots]u_3,$$
$$\Sigma(-1)^\sigma u_1[x_{\sigma(1)}, x_i, \ldots]u_2[x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_j, \ldots]u_3, \tag{8}$$
$$\Sigma(-1)^\sigma u_1[x_{\sigma(1)}, x_i, \ldots]u_2[x_{\sigma(2)}, x_j, \ldots]u_3[x_{\sigma(3)}, x_k, \ldots]u_4.$$

Здесь суммирование ведется по $\sigma \in \mathrm{Sym}(3)$, а u_1, u_2, u_3, u_4 — произведения коммутаторов. Будем рассматривать только первый и третий случаи из (8), второй случай аналогичен. Расскрываем все коммутаторные скобки в u_1, u_2,

u_3, u_4, а в $[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_i, \ldots]$, $[x_{\sigma(3)}, x_j, \ldots]$, $[x_{\sigma(1)}, x_i, \ldots]$, $[x_{\sigma(2)}, x_j, \ldots]$, $[x_{\sigma(3)}, x_k, \ldots]$ оставляем только двойные коммутаторы, т. е. записываем (8) в следующем виде:

$$\begin{aligned}&\Sigma(-1)^\sigma v_1[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]v_2[x_{\sigma(3)}, x_j]v_3,\\ (9)\quad &\Sigma(-1)^\sigma w_1[x_{\sigma(1)}, x_i]w_2[x_{\sigma(2)}, x_j]w_3[x_{\sigma(3)}, x_k]w_4,\end{aligned}$$

$v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3, w_4$ — одночлены. Без ограничения общности рассуждений можно предполагать, что $v_1=v_3=w_1=w_4=1$. Степень многочленов v_2, w_2 и w_3 ниже n. Следовательно, по индуктивному предположению, по модулю четвертого тождества Капелли (лемма 3, в)), v_2, w_2 и w_3 эквивалентны тождествам из трех переменных. По следствию 2, в (9) мы можем предполагать, что вместо v_2 и w_2 подставлены $1, y_1, [y_1, y_2], [y_1, y_2]y_3$, а в w_3 подставлены $1, y_4, [y_4, y_5], y_4[y_5, y_6]$. Из тождества (2) следует, что $[x_1, x_2][x_3, x_4]=[x_3, x_4][x_1, x_2]$ и в (9) мы можем перенести коммутатор $[y_1, y_2]$ на первое место, например,

$$\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}][y_1, y_2][x_{\sigma(3)}, x_j]=[y_1, y_2]\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}][x_{\sigma(3)}, x_j].$$

Используя соображения о симметрии, следует, что вместо (9) достаточно рассматривать случаи

(10) $$z=\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]y[x_{\sigma(3)}, x_4],$$

11) $$z_1=\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_4][x_{\sigma(2)}, x_5][x_{\sigma(3)}, x_6],$$

(12) $$z_2=\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_4]y_1[x_{\sigma(2)}, x_5][x_{\sigma(3)}, x_6],$$

(13) $$z_3=\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_4]y_1[x_{\sigma(2)}, x_5]y_2[x_{\sigma(3)}, x_6].$$

Заметим, что $z=y\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}][x_{\sigma(3)}, x_4]+\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, y][x_{\sigma(3)}, x_4]=0$ в F, потому что предложение верно для многочленов степени 4 и 5. Запишем (10) более подробно:

$$2([x_1, x_2]y[x_3, x_4]+[x_2, x_3]y[x_1, x_4]-[x_1, x_3]y[x_2, x_4])=0,$$

(14) $$\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_3]y[x_{\sigma(2)}, x_4]=(1/2)\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]y[x_3, x_4].$$

Аналогично, при $y=1$ (или из (4)) получается

(15) $$\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_3][x_{\sigma(2)}, x_4]=(1/2)\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}][x_3, x_4].$$

Применим тождества (14) и (15) к (11), (12) и (13) и получим, что они следуют из тождеств (4) и (10), например,

$$z_2=(1/2)(\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_4]y_1[x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}])[x_5, x_6]=0.$$

Предложение полностью доказано.

Следствие 5. *В алгебре F выполняется слабое тождество*

(16) $$\begin{aligned}[x_1, x_2, x_4, \ldots]\ldots[x_3, x_5, \ldots]&=[x_1, x_3, x_4, \ldots]\ldots[x_2, x_5, \ldots]\\ &-[x_2, x_3, x_4, \ldots]\ldots[x_1, x_5, \ldots].\end{aligned}$$

Доказательство. Следствие получается непосредственно из предложения 4, потому что в тождестве (16) переменные x_1, x_2, x_3 альтернируют.

3. Слабые тождества от двух переменных. В доказательстве предложения 3 [10] показано, что

$$B_2/(B_2 \cap T(K_2, H(K_2))) \cong \Sigma N_2(p+q, p),\ p>0,\ q \geqq 0. \tag{17}$$

В силу предложения 4 и вложения (5) основная теорема будет доказана, если установим, что ряды Гильберта двух модулей $B_2/(B_2 \cap T(K_2, H(K_2)))$ и $\widetilde{B}_2$ совпадают. Поэтому до конца работы мы будем работать в $\widetilde{B}_2$.

Предложение 6. $\widetilde{B}_2^{(n)} \cong B_2^{(n)}/(B_2^{(n)} \cap T(K_2, H)))$, $n \leqq 6$.

Доказательство. Из разложения в сумму неприводимых подмодулей $B_2^{(2)}, B_2^{(3)}$ и $B_2^{(4)}$ и из (17) следует, что они пересекаются тривиально с T. Тождество (7) порождает $GL(2, K)$-модуль, изоморфный $N_2(3, 2)$. Кроме того, $B_2^{(5)} \cong N_2(4,1)+2N_2(3,2)$. Поэтому, (7) единственное тождество двух переменных в $B_2^{(5)}$. Из предложений 2.5 и 2.6 [4] вытекает

$$B_2^{(6)} \cong N_2(5, 1)+3N_2(4, 2)+2N_2(3^2)$$

и соответствующие подмодули порождаются многочленами

$$N_2(5, 1):\ w_1 = y(adx)^5;$$

$$N_2(4, 2):\ w_2 = [[y, x, x, x], [y, x]],\ w_{16} = [y, x][y, x, x, x],\ w_{25} = [y, x, x]^2;$$

$$N_2(3^2):\ w_9 = 2[[y, x, x], [y, x, y]],\ w_{13} = [y, x]^3.$$

Коммутатор $[x_1, x_2, x_3]$ — йорданов элемент, поэтому из (2) следует слабое тождество $[[[x_1, x_2, x_3], x_4], [x_5, x_6]] = 0$ и в F коммутаторы четной длины коммутируют:

$$[x_1, \ldots, x_{2k}][y_1, \ldots, y_{2l}] = [y_1, \ldots, y_{2l}][x_1, \ldots, x_{2k}]. \tag{18}$$

В частности

$$[[y, x, x, x], [y, x]] = 0. \tag{19}$$

Из тождеств (7) и (18) вытекает:

$$0 = [[y, x, x] \circ [y, x], x] = [y, x, x, x] \circ [y, x] + [y, x, x] \circ [y, x, x],$$

$$[y, x, x]^2 = -[y, x, x, x][y, x]. \tag{20}$$

Линеаризируем (7) по y: $[y, x, x] \circ [z, x] + [z, x, x] \circ [y, x] = 0$ и подставим y^2 вместо z:

$$0 = [y, x, x] \circ [y^2, x] + [y^2, x, x] \circ [y, x] = [y, x, x] \circ (y \circ [y, x])$$
$$+ ([y, x, x] \circ y + 2[y, x]^2) \circ [y, x].$$

После переработки по модулю (18) получаем

$$g(x, y) = [y, x, x, y][y, x] + [y, x, y][y, x, x] + 2[y, x]^3 = 0.$$

В последнем равенстве меняем местами x и y и вычитаем

$$g(x, y) - g(y, x) = [[y, x, y], [y, x, x]] + 4[y, x]^3 = 0;$$

$$[[y, x, y], [y, x, x]] = -4[y, x]^3. \tag{21}$$

Из (19), (20) и (21) следует, что $B_2^{(6)} \cap T \cong 2N_2(4, 2)+N_2(3^2)$, т. е. $\widetilde{B}_2^{(6)} \cong B_2^{(6)}/(B_2^{(6)} \cap T(K_2, H(K_2)))$.

Предложение 7. *Линейное пространство $\widetilde{B}_2$ натянуто на*

$$([y, x](adx)^k(ady)^l)[y, x]^{q-1}, \quad k, l \geq 0, \quad q \geq 1.$$

Доказательство. Рассмотрим Sym(5)-подмодуль M в Γ_5, порожденный многочленом $[x_1, x_2, x_3]\circ[x_4, x_5]$. В силу предложения 2.4 [4], $M \cong M(3, 2)+M(3, 1^2)+M(2^2, 1)+M(2, 1^4)$. Из п. 2 следует, что M аннулируется в $\widetilde{\Gamma}_5$ и в $\widetilde{\Gamma}_5$:

$$[x_1, x_2][x_3, x_4, x_5] = -[x_3, x_4, x_5][x_1, x_2].$$

Как в (18) получается, что

$$(22) \qquad [x_1, \ldots, x_{2k}][y_1, \ldots, y_{2l+1}] = -[y_1, \ldots, y_{2l+1}][x_1, \ldots, x_{2k}].$$

Аналогично, пусть M_1 — Sym(6)-подмодуль в Γ_6, порожденный многочленами $[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5, x_6]$ и $[x_1, x_2][x_3, x_4, x_5, x_6]$:

$$M_1 \cong \Sigma M(k_1, k_2) + \Sigma M(l_1, l_2, \ldots, l_m), \ m>2,$$

разложение M_1 в сумму неприводимых компонент. Второе слагаемое в M_1 аннулируется в $\widetilde{\Gamma}_6$ ввиду предложения 4, а из (19), (20) и (21) следует, что в $\widetilde{\Gamma}_6$ компоненты $M(k_1, k_2)$ выражаются как линейные комбинации $[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}][x_{i_5}, x_{i_6}]$ и $[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}][x_{i_5}, x_{i_6}]$. Это означает, что в $\widetilde{\Gamma}_6$

$$[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5, x_6] = \Sigma\alpha_i[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}][x_{i_5}, x_{i_6}] + \Sigma\beta_i[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}][x_{i_5}, x_{i_6}]$$

для подходящих $\alpha_i, \beta_i \in K$. Отсюда, по аналогии с (18) и (22) получается, что

$$(23) \qquad [x_1, \ldots, x_{2k+1}][x_{2k+2}, \ldots, x_{2l}] = \Sigma\gamma[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{2p}}]\ldots[x_{j_1}, \ldots, x_{j_{2q}}],$$

(все коммутаторы правой стороны равенства (23) четной длины).

Согласно лемме 1.5 [8], пространство B_2 натянуто на

$$(24) \qquad ([y, x](adx)^{k_1}(ady)^{l_1})\ldots([y, x](adx)^{k_m}(ady)^{l_m}), \ k_i, l_i \geq 0.$$

Используя тождества (22) и (23), можно предполагать, что $\widetilde{B}_2$ натянуто только на те элементы из (24), для которых k_m+l_m — четные числа, когда $m>1$. Коммутаторы нечетной длины лежат в SJ_2 и из тождества (16) следует, что

$$[y, x, t_1, \ldots][y, x, z_1, z_2, \ldots] = [y, x, t_1, \ldots][[y, x, z_1], z_2, \ldots]$$
$$= [[y, x, z_1], x, t_1, \ldots][y, z_2, \ldots] - [[y, x, z_1], y, t_1, \ldots][x, z_2, \ldots],$$

т. е. элементы из $\widetilde{B}_2$ являются линейными комбинациями тех многочленов из (24), для которых $k_m=l_m=0$ при $m>1$. Доказательство предложения завершается легкой индукцией по степени элементов из (24).

Предложение 8. *Ряды Гильберта $B_2/(B_2 \cap T(K_2, H(K_2)))$ и $\widetilde{B}_2$ совпадают.*

Доказательство. Из теоремы 2.2 [9] и предложения 2 [10] следует, что

$$H_1(t) = H(B_2/(B_2 \cap T(K_2, H(K_2))), t) = 1 + t^2(1-t)^{-2}(1-t^2)^{-1}.$$

С другой стороны, из предложения 7 следует, что ряд $H_2(t)=H(\widetilde{B}_2, t)$ мажорируется рядом Гильберта $H_3(t)$ градуированного линейного пространства в $A(x, y)$ с базисом 1 и $([y, x](adx)^k(ady)^l)[y, x]^{q-1}$, $k, l\geqq 0$, $q\geqq 1$. Для ряда $H_3(t)$ имеем

$$H_3(t)=1+t^2\Sigma t^{k+l}(t^2)^{q-1}=1+t^2(1-t)^{-2}(1-t^2)^{-1}=H_1(t).$$

Так как в силу (5) $H_1(t)\leqq H_2(t)$ и, кроме того, $H_2(t)\leqq H_3(t)$, то $H_1(t)=H_2(t)$. Предложение, а, следовательно, и основная теорема доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Барут, Р. Рончка. Теория представлений групп и ее приложения. Т. 1. Москва, 1980.
2. Днесторовская тетрадь. Нерешенные проблемы теории колец и модулей. Третье издание. Новосибирск, 1982.
3. В. С. Дренски. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр. *Мат. сб.*, **115**, 1981, 98—115.
4. В. С. Дренски. О решетках многообразий ассоциативных алгебр. *Сердика*, **8**, 1982, 20—31.
5. К. А. Жевлаков, А. М. Слинько, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов. Кольца, близкие к ассоциативным. Москва, 1978.
6. В. Н. Латышев. О сложности нематричных многообразий ассоциативных алгебр. I. — *Алгебра и логика*, **16**, 1977, 149—183.
7. Ю. П. Размыслов. О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль. *Алгебра и логика*, **12**, 1973, 83—113.
8. П. Н. Сидеров. Базис тождеств алгебры треугольных матриц над произвольным полем. *Плиска*, **2**, 1981, 143—152.
9. V. Drensky. Codimensions of *T*-ideals and Hilbert series of relatively free algebras. — *J. Algebra*, **91**, 1984, 1—17.
10. V. S. Drensky. Polynomial identities in simple Jordan algebras. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **35**, 1982, 1327—1330.
11. A. Regev. Algebras satisfying a Capelli identity. *Israel J. Math.*, **33**, 1979, 149—154.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 19. 1. 1983