PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

МНОГООБРАЗИЯ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР С ТОЖДЕСТВОМ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

ЛЮБОВ А. ВЛАДИМИРОВА, ВЕСЕЛИН С. ДРЕНСКИ

Дано полное описание многообразий ассоциативных алгебр над полем характеристики нуль, удовлетворяющих тождеству третьей степени.

Одна из важнейших задач теории PI-алгебр — описание всех многооб разий алгебр с заданным свойством. Когда описываются все подмногообразия данного многообразия, обычно это делается на языке решеток (см. обзор Артамонова [2]). В случае ассоциативных алгебр над полем характеристики нуль простейший нетривиальный случай — это многообразия с тождеством третьей степени. Эту задачу рассматривали Нагата [12], Клайн [10], Олсон и Регев [13], Ананьин и Кемер [1], Регев [14, 15, 16], Джеймс [9].

Цель этой работы — закончить эти исследования и дать полное описание многообразий с тождеством степени 3. Конечно, эта задача эквивалентна описанию T-идеалов, содержащих такое тождество. В доказательстве мы используем метод, который позволил одному из авторов получить решетку в случае некоторых многообразий алгебр с 1 и алгебр Ли [4, 5].

1. Предварительные сведения. Будем пользовать обозначения, близкие к [4, 5]: K-фиксированное поле характеристики 0; S_n — симметрическая группа, действующая на множество $\{1, 2, \dots, n\}$; $A_m=K\langle x_1, \dots, x_m\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра без 1 со свободными образующими $x_1, x_2, \dots, x_m$ (будем использовать и другие буквы для свободных образующих); $A_m^{(n)}$ — однородная компонента A_m степени n; P_n — множество полилинейных многочленов из $A_n^{(n)}$, P_n является левым S_n-модулем относительно действия $\sigma: x_{i_1}\dots x_{i_n}\to x_{\sigma(i_1)}\dots x_{\sigma(i_n)}$, $\sigma\in S_n$. Неприводимый S_n-модуль, отвечающий разбиению n $\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, будем обозначать $M(\lambda)=M(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. С другой стороны, алгебра A_m изоморфна тензорной алгебре m-мерного линейного пространства и имеет естественную структуру левого $GL(m, K)$-модуля. Соответствующие неприводимые модули будут $N_m(\lambda)=N_m(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.

Решетка $GL(m, K)$-подмодулей $A_m^{(n)}$ вкладывается в решетку S_n-подмодулей P_n. Это вложение осуществляется следующим образом: существуют системы канонических порождающих $f(x_1, \dots, x_r)$ для $N_m(\lambda_1, \dots, \lambda_r)\subset A_m^{(n)}$, $r\leqq m$, и $e(x_1, \dots, x_n)$ для $M(\lambda_1, \dots, \lambda_r)\subset P_n$, $\Sigma\lambda_i=n$. Линеаризируя $f(x_1, \dots, x_r)$, получаем $e(x_1, \dots, x_n)$; „симметризируя" $e(x_1, \dots, x_r)$, получаем мультипликативное кратное $f(x_1, \dots, x_r)$, если $r\leqq m$, и 0, если $r>m$.

Сведения из теории представлений S_n и $GL(m, K)$ можно найти, например, в [3] или [7], а на языке тождеств — в [1] и [4]. В A_m существует естественная полиградуировка: $A_m=\Sigma A_m^{(k_1, \dots, k_m)}, k_i\geqq 0, \Sigma k_i\geqq 1$, где $A_m^{(k_1, \dots, k_m)}$—

ПЛИСКА Български математически студии. Том 8, 1986, с. 144—157.

линейное пространство однородных многочленов степени k_i относительно x_i. Эта градуировка согласована с действием $GL(m, k)$: если $g=\Sigma\xi_i e_{ii}$ — диагональное линейное преобразование из $GL(m, K)$, то $A_m^{(k_1,\ldots,k_m)}$ множество собственных векторов, отвечающих собственному значению $g\ \xi_1^{k_1}\ldots\xi_m^{k_m}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие алгебр с T-идеалом тождеств $T(\mathfrak{M})$. Относительно свободная алгебра $F_m(\mathfrak{M})=A_m/(T(\mathfrak{M})\cap A_m)$ и множество полилинейных элементов $P_n(\mathfrak{M})=P_n/(T(\mathfrak{M})\cap P_n)$ сохраняют действие $GL(m, K)$ и S_n, соответственно, и $F_m^{(n)}(\mathfrak{M})$ и $P_n(\mathfrak{M})$ имеют одинаковую модульную структуру [4, 6]: если $P_n(\mathfrak{M})=\Sigma\varkappa_\lambda M(\lambda)$, то $F_m^{(n)}(\mathfrak{M})=\Sigma\varkappa_\lambda N_m(\lambda)$ (все суммы модулей прямые, а индексы в обозначениях подпространств в $F_m(\mathfrak{M})$ аналогичны случаю A_m). При этом для нашей цели удобнее работать представлениями $GL(m, K)$, а в духе традиции, сформулировать результаты на языке представлений S_n. Ряд Гильберта градуированного пространства $F_m(\mathfrak{M})$

$$H(F_m(\mathfrak{M}),\ t_1,\ldots,\ t_m)=\Sigma\dim F_m^{(k_1,\ldots,k_m)}(\mathfrak{M})t_1^{k_1}\ldots t_m^{k_m}$$

равен $\Sigma\varkappa_\lambda S_\lambda(t_1,\ldots,\ t_m)$, где $S_\lambda(t_1,\ldots,\ t_m)$ функции Шура. Как заметил Береле [6], этот ряд определяет однозначно модульное строение $F_m(\mathfrak{M})$.

Лемма 1. 1. *Пусть* $S_\lambda(t_1,\ldots,\ t_m)=\Sigma\beta_\lambda^{(k)}t_1^{k_1}\ldots t_m^{k_m}$, *суммирование ведется по* $k=(k_1,\ldots,\ k_m)$. *Упорядочим лексикографически все разбиения n. Если* $P_n(\mathfrak{M})=\Sigma\varkappa_\lambda M(\lambda)$, *то для* $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\ \lambda_r)$

$$\varkappa_\lambda=\dim A_r^{(\lambda)}-\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_r^{(\lambda)})-\sum_{\mu>\lambda}\varkappa_\mu\beta_\mu^{(\lambda)}. \tag{1}$$

Доказательство следует из факта, что матрица коэффициентов $\beta_\mu^{(\lambda)}$ унитреугольна [11].

Для непосредственных применений леммы 1.1 нам будут необходимы некоторые коэффициенты в функциях Шура. Они даны в таблице в [11].

Лемма 1. 2. $\beta_{(4)}^{(3,1)}=\beta_{(3,1)}^{(2,2)}=\beta_{(4)}^{(2,1,1)}=\beta_{(2,2)}^{(2,1,1)}=1,\ \beta_{(3,1)}^{(2,1,1)}=2,$
$\beta_{(3,2)}^{(3,1,1)}=\beta_{(3,2)}^{(2,2,1)}=1,\ \beta_{(3,1,1)}^{(2,2,1)}=\beta_{(2,2,1)}^{(2,1,1,1)}=2,\ \beta_{(3,2)}^{(2,1,1,1)}=\beta_{(3,1,1)}^{(2,1,1,1)}=3.$

В каждом многообразии $\mathfrak{M}$ с тождеством степени 3 аннулируется хотя бы одна из неприводимых компонент P_3. Известно, что $P_3\cong KS_3\cong M(3)+2M(2,\ 1)+M(1^3)$. Порождающие соответствующих подмодулей являются линеаризациями многочленов x^3 для $M(3)$, $\alpha[x,\ y]x+\beta x[x,\ y]$, $\alpha\neq0$ или $\beta\neq0$, для $M(2,\ 1)$ и стандартного тождества $S_3(x_1,\ x_2,\ x_3)$ для $M(1^3)$. Мы будем рассматривать отдельно эти три случая. В каждом из них схема рассуждений следующая: 1) Определяем модульную структуру $P_n(\mathfrak{M})$. В этом пункте мы существенно используем более ранние результаты [1, 9, 12, 14, 15, 16]. 2) Для каждой неприводимой компоненты $P_n(\mathfrak{M})$ мы находим следствия высших степеней. При этом достаточно рассматривать только следствия в $P_{n+1}(\mathfrak{M})$. Графически это будет изображено так: будем обозначать точками неприводимые модули, а стрелками будем указывать на их следствия. Таким образом, из этого сразу получается полное описание T-идеалов с тождеством третьей степени, а также решетка подмногообразий соответствующих многообразий.

В дальнейшем все вычисления будут в относительно свободной алгебре многообразия $\mathfrak{M}$.

2. Многообразие $\mathfrak{M}$, определенное тождеством

$$\alpha[x,\ y]x+\beta x[x,\ y]=0 \tag{2}$$

Строение $P_n(\mathfrak{M})$ почти полностью описано в [1]. В зависимости от коэффициентов α и β задача сводится к четырем случаям: 2.1. $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha-\beta \neq 0$, $\alpha+\beta \neq 0$ (общий случай); 2.2. $\alpha=0$ (аналогично рассматривается $\beta=0$); 2.3. $\alpha-\beta=0$; 2.4. $\alpha+\beta=0$.

Случай 2.1. $\alpha\beta(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) \neq 0$.

Предложение 2.1.1. *$P_n(\mathfrak{M}) \cong M(n)$, $n=1$ или $n \geqq 4$, $P_2(\mathfrak{M}) \cong M(2)+M(1^2)$, $P_3(\mathfrak{M}) \cong M(3)+M(2,1)+M(1^3)$.*

Соответствующие модули порождаются линеаризациями x^n для $M(n)$, $[x_1, x_2]x_1$ для $M(2, 1)$, $S_n(x_1, \ldots, x_n)$ для $M(1^n)$, $n=2, 3$.

Доказательство. При $n \leqq 3$ модули $P_n(\mathfrak{M})$ одни и те же во всех четырех случаях и описываются непосредственно, используя, что $P_n \cong KS_n$. Пусть $n \geqq 4$. Из [1] следует, что если модуль $P_n(\mathfrak{M})$ ненулевой, то он порождается $h_n(x_1, \ldots, x_n)=\Sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$. Алгебра (коммутирующих) многочленов $K[x]$ принадлежит $\mathfrak{M}$, а $x^n \neq 0$ в $K[x]$. Тождество $h_n(x_1, \ldots, x_n)$ является линеаризацией x^n, поэтому $P_n(\mathfrak{M}) \cong M(n)$.

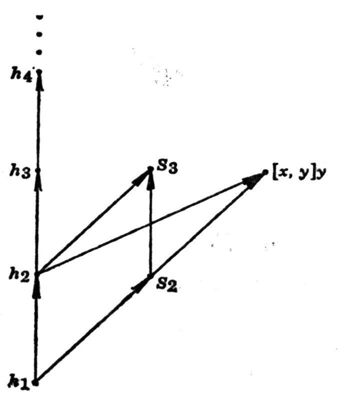

Рис. 1

Теорема 2.1.2. *Пусть линеаризация тождества $f(x_1, \ldots, x_r)$ порождает неприводимый S_n-подмодуль $P_n(\mathfrak{M})$. Тогда следствия высших степеней из $f(x_1, \ldots, x_r)$ эквивалентны тождествам:*

а) $x_1x_2 \ldots x_{n+1}$, *если* $f=x^n$;

б) $[x_1, x_2]x_3$, *если* $f=[x_1, x_2]$;

в) $[x_1x_2]x_1$ *и* $S_3(x_1, x_2, x_3)$ *не имеют следствия высших степеней* (см. рис. 1).

Доказательство. Заметим, что при $n>3$ x^n эквивалентно в $\mathfrak{M}$ многочлену $x_1x_2 \ldots x_n$. Условия а) и б) проверяются непосредственно. Пункт в) следует из того, что в $K[x]: [x_1, x_2]x_1=S_3(x_1, x_2, x_3)=0$, а $x^n \neq 0$.

Случай 2.2. $\alpha=0$. Тогда многообразие $\mathfrak{M}$ определяется тождеством $x[x, y]=0$.

Предложение 2.2.1. *$P_n(\mathfrak{M}) \cong M(n)+M(n-1, 1)$, $n \geqq 4$. Подмодули $M(n)$ и $M(n-1, 1)$ порождается линеаризациями x^n и $f_{n-2}=[x, y]x^{n-2}$, соответственно.*

Доказательство. В [1] показано, что при $n \geqq 4$ $P_n(\mathfrak{M})$ является суммой не более двух неприводимых подмодулей. Линеаризация $[x, y]x^{n-2}$ порождает $M(n-1, 1)$ в P_n, поэтому достаточно убедиться, что $[x, y]x^{n-2} \neq 0$ в $F(\mathfrak{M})$. Пусть $A_1=\langle a, b | a^2=a, b^2=ab=0, ba=b\rangle$ — двумерная ассоциативная алгебра, она изоморфна алгебре матриц $\{k_1e_{11}+k_2e_{21} | k_1, k_2 \in K\}$. Тогда $A_1 \in \mathfrak{M}$, а $[a, b]a^{n-2}=-b \neq 0$.

Теорема 2.2.2. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_r) \in F(\mathfrak{M})$. Тогда следствия высших степеней из f эквивалентны тождествам:*

а) $x_1 x_2 \ldots x_{n+1}$, *если* $f=x^n$;

б) $[x_1 x_2]x_1^{n-1}$, *если* $f=[x_1, x_2]x_1^{n-2}$, $n>2$;

в) $S_3(x_1, x_2, x_3)$ *не имеет следствий высших степеней* (см. рис. 2).

Доказательство. а) Достаточно показать, что в $F(\mathfrak{M})$ из x^n следует x^{n+1} и $[x_1, x_2]x_1^{n-1}$. Из $x[x, y]=0$ следует $xyx=x^2y$. Но $[x, y]x^{n-1}=xyx^{n-1}yx^n=xyx^{n-1}$, тогда $[x, y]x^{n-1}=xyx^{n-1}=x^2yx^{n-2}= \ldots =x^ny$. б) Очевидно. в) Алгебра A_1 из доказательства 2.2.1 двумерна, и поэтому $S_3(x_1, x_2,$

$x_3)=0$ в A_1. Кроме того, $A_1 \in \mathfrak{M}$ и $x^4 \neq 0$, $[x_1, x_2]x_1^2 \neq 0$ в A_1. Поэтому $S_3(x_1, x_2, x_3)$ не имеет следствий высших степеней.

Случай 2.3. $\alpha=\beta$. Многообразие $\mathfrak{M}$ определяется тождеством:

(3) $$[x^2, y]=0$$

и линеаризируя (3), получаем

(4) $$f(x_1, x_2, y)=[x_1x_2+x_2x_1, y]=0.$$

Предложение 2.3.1. $P_4(\mathfrak{M}) \cong M(4)+M(2^2)$, $P_n(\mathfrak{M}) \cong M(n)$, $n \geq 5$. *Подмодуль $M(2^2)$ порождается линеаризацией $x[x, y]y$.*

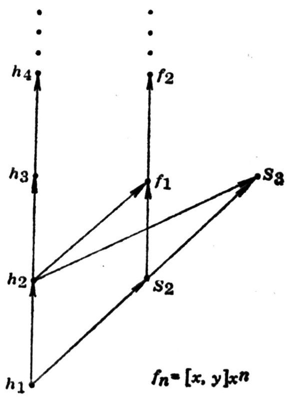

Рис. 2

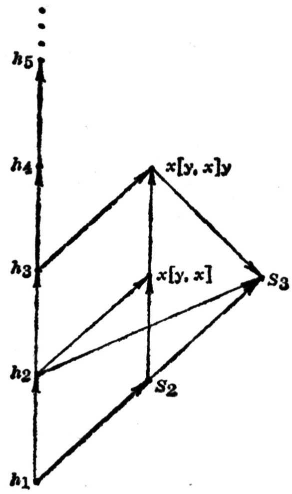

Рис. 3

Доказательство. В [1] показано, что $P_4(\mathfrak{M})$ является суммой не более двух неизоморфных, неприводимых подмодулей, а при $n \geq 5$ $P_n(\mathfrak{M}) \cong M(n)$. Из (3) следует $[x, yzt]=0$, $x^3y-xyx^2=x^2yx-yx^3=x^3y-yx^3=0$, и эти три тождества линейно независимы. Используя (1) и лемму 1.2, получаем

$$0 \leq \varkappa_{(3,1)} \leq \dim A_2^{(3,1)}-1 \, . \, \beta_4^{(3,1)}=0, \quad \varkappa_{(3,1)}=0.$$

Из (3) следует и

(5) $$x^2y^2-xy^2x=yx^2y-y^2x^2=x^2y^2-y^2x^2=xyxy-yxyx=0$$

и (5) линейно независимы. Поэтому

(6) $$\dim(T(\mathfrak{M}) \cap A_2^{(2,2)}) \geq 4.$$

Все следствия из (3) в $A_2^{(2,2)}$ получаются из (4) как линейные комбинации из

(7) $$f(u_1, u_2, u_3)u_4=f(u_1u_2, u_3, u_4)=f(u_1, u_2, u_3u_4)=0,$$

где две из переменных u_1, u_2, u_3, u_4 равны x, а две других равны y. Непосредственная проверка показывает, что всевозможные тождества (7) следуют из (5), т. е. в (6) имеет место равенство.

Леммы 1.1 и 1.2 дают, что $\varkappa_{(2,2)}=1$. При этом легко проверить, что многочлен $[x, y]^2$, который в $A_2^{(4)}$ порождает подмодуль, изоморфный $N_2(2^2)$, по модулю тождеств (5) пропорционален $x[x, y]y$.

Теорема 2.3.2. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_r) \in F(\mathfrak{M})$. *Тогда следствия высших степеней из* f *эквивалентны тождествам:*

а) $x_1x_2\ldots x_{n+1}$, *если* $f=x^n$, $n \geq 1$;

б) $x_1[x_1, x_2]x_2$, *если* $f=[x_1, x_2]x_1$ *или* $f=S_3(x_1, x_2, x_3)$;

в) $x_1[x_1, x_2]x_2$ *не имеет следствий высших степеней* (см. рис. 3).

Доказательство. Покажем, что из $x^3=0$ следует $x[x, y]y=0$, т. е., что $x_1x_2x_3x_4=0$ является следствием из $x^3=0$. Линеаризируем частично $x^3=0$:

$$x^2y+xyx+yx^2=0, \text{ откуда } g(x, y)=x^2y^2+xy^2x+y^2x^2=0;$$

$$h_3(xy, y, x)-(g(x, y)+g(y, x))=yxyx-x^2y^2+2xyxy-2y^2x^2=0.$$

Применяем (5) и получаем, что $x[x, y]y=0$.

Аналогично получается, что $S_3(x, y, xy)=0$ эквивалентно тождеству $x[x, y]y=0$.

Остальные случаи теоремы тривиальны.

Случай 2.4. $\alpha+\beta=0$. Тогда тождество (2) эквивалентно $[x, y, z]=0$.

Предложение 2.4.1. (см. [1]). $P_n(\mathfrak{M}) \cong M(n)+M(n-1, 1)+M(n-2, 1^2)+\ldots+M(1^n)$ *и модули* $M(n-k, 1^k)$ *порождаются линеаризациями* $g_{k+1, n-k-1}=S_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1})x_1^{n-k-1}$.

Теорема 2.4.2. *Все следствия высших степеней из* $S_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1})x_1^{n-k-1}$ *в* $F(\mathfrak{M})$ *эквивалентны* $\varepsilon S_k(x_1, \ldots, x_k)x_1^{n-k+1}$, $S_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1})x_1^{n-k}$, $S_{k+2}(x_1, \ldots, x_{k+2})x_1^{n-k-1}$, $S_{k+3}(x_1, \ldots, x_{k+3})x_1^{n-k-1}$, $\varepsilon=1$, *если* k — *четное, и* $\varepsilon=0$, *если* k — *нечетное* (см. рис. 4).

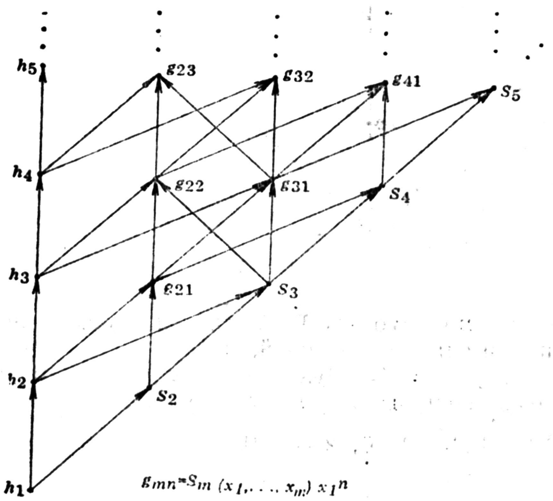

Рис. 4

Доказательство. Будем использовать следствия из $[y, x, x]=0$

$$(8) \qquad [x, y]z=z[x, y]; \quad [x, y][z, t]=-[x, t][z, y].$$

Из предложения 1.1. [5] вытекает, что все полилинейные следствия степени $n+1$ из модуля $M(n-k, 1^k)$ находятся среди $M(n-k+2, 1^{k-1})$, $M(n-k+1, 1^k)$, $M(n-k, 1^{k+1})$, $M(n-k-1, 1^{k+2})$. Непосредственно проверяется, что в случае $M(n-k+2, 1^{k-1})$, $k=2m$, $S_{2m+1}(x_1, \ldots, x_{2m}, x_1^2)x_1^{n-k-1}$ пропорционально $S_{2m}(x_1, \ldots, x_{2m})x_1^{n-k+1}$. Когда $k=2m-1$, то из $S_{2m}(x_1, \ldots, x_{2m})x_1^{n-k+1}$ не следует $S_{2m-1}(x_1, \ldots, x_{2m-1})x_1^{n-k+1}$, потому что первый многочлен следует из произведения m двойных коммутаторов, а второй многочлен нельзя записать как произведение более, чем $m-1$ коммутаторов. Из [8] следует, что $S_{2k}(x_1, \ldots, x_{2k})$ и $S_{2k+1}(x_1, \ldots, x_{2k+1})$ пропорциональны соответственно $[x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2k-1}, x_{2k}]$ и $[x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2k-1}, x_{2k}] x_{2k+1} + [x_2, x_3][x_4, x_5] \ldots [x_{2k}, x_{2k+1}]x_1 + \ldots + [x_{2k+1}, x_1][x_2, x_3] \ldots [x_{2k-2}, x_{2k-1}]x_{2k}$.

Случай $M(n-k+1, 1^k)$ очевиден. Если k — четное, то линеаризация $S_{k+1}(x_1, \ldots, x_k, [x_{k+1}, x_{k+2}])x_1^{n-k-1}$ ненулевая в $\mathfrak{M}$ и порождает $M(n-k, 1^{k+1})$. Если k — нечетное, то имея в виду [8], достаточно умножить последовательно $S_{2m}x_1^{n-k-1}$ с $x_{2k+1}, x_1, x_2, \ldots, x_{2k}$ и за этом суммировать. Результат будет ненулевой и пропорциональный $S_{2m+1}(x_1, \ldots, x_{2m+1})x_1^{n-k-1}$.

В $S_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1})\, x_1^{n-k-1}$ подставляем $x_1 + [x_{k+2}, x_{k+3}]$ вместо x_1 и берем линейную часть по x_{k+2}. После преобразования полученного выражения оказывается, что оно эквивалентно тождеству $S_{k+3}(x_1, \ldots, x_{k+3})\, x_1^{n-k-2}$. Теорема доказана.

3. Многообразие $\mathfrak{M}$, определенное тождеством $S_3(x_1, x_2, x_3)=0$.

Предложение 3.1. $P_3(\mathfrak{M}) \cong M(3)+2M(2, 1)$; $P_4(\mathfrak{M}) \cong M(4)+2M(3, 1)+M(2^2)$; $P_n(\mathfrak{M}) \cong M(n) + 2M(n-1, 1)$, $n \geqq 5$. *Неприводимые компоненты $P_n(\mathfrak{M})$ порождаются линеаризациями многочленов: x^n для $M(n)$, $f_n(x, y) = \alpha[x, y]x^{n-2}+\beta x^{n-2}[x, y]$ для $M(n-1, 1)$, $[x, y]^2$ для $M(2^2)$.*

Доказательство. Модульная структура $P_n(\mathfrak{M})$ полностью описана в [9]. Для доказательства предложения достаточно показать, что многочлены $f_n(x, y)$ и $[x, y]^2$ не аннулируются в $F_2(\mathfrak{M})$. В разложении $A_2^{(4)}$ в сумму неприводимых $GL(2, K)$-модулей $N_2(2^2)$ участвует с кратностью 2. Но $S_3(x_1, x_2, [x_1, x_2]) = \Sigma(-1)^\sigma [x_1, x_2, x_{\sigma(1)}]x_{\sigma(2)} + [x_1, x_2]^2$, и это и есть единственное следствие из $S_3(x_1, x_2, x_3)$, которое порождает модуль $N_2(2^2)$. Поэтому $[x_1, x_2]^2 \neq 0$ в $F_2(\mathfrak{M})$. Двумерные алгебры (см. случай 2.2) $B_1 = \{k_1e_{11}+k_2e_{21}, |k_1, k_2 \in K\}$ и $B_2 = \{k_1e_{11}+k_2e_{12}|k_1, \kappa_2 \in K\}$ принадлежат $\mathfrak{M}$ и для них $f_n(x, y) \neq 0$, $n \geqq 3$. Предложение доказано.

Теорема 3.2. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in F(\mathfrak{M})$. Тогда следствия высших степеней из $f(x_1, \ldots, x_n)$ эквивалентны тождеству:*

а) $x_1x_2 \ldots x_{n+1}$, *если* $f=x^n$;

б) $[x_1, x_2]x_3 \ldots x_{n+1}$, *если* $f=[x, y]x^{n-2}$;

в) $x_1 \ldots x_{n-1}[x_n, x_{n+1}]$, *если* $f=x^{n-2}[x, y]$;

г) $[x_1, x_2]x_3 \ldots x_{n+1}$ *и* $x_1 \ldots x_{n-1}[x_n, x_{n+1}]$, *если* $f=\alpha[x, y]x^{n-2}+\beta x^{n-2}[x, y]$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$;

д) $[x, y]^2$ *не имеет следствий высших степеней* (см. рис. 5).

Доказательство. а) В $F(\mathfrak{M})$ $S_3(x, y, x^2) = x[y, x]x = 0$. С другой стороны, из $x^n=0$ следует $0 = x^{n-1}yx + x^{n-2}yx^2 + \ldots + xyx^{n-1} = (n-1)x^{n-1}yx = (n-1)(x^ny + x^{n-1}[y, x])$, т. е. $x^{n-1}[y, x]=0$ следует из $x^n=0$. Аналогично получается и следствие $[y, x]x^{n-1}=0$. При $n \geqq 4$ получается, что все неприводимые подмодули в $P_{n+1}(\mathfrak{M})$ аннулируются по модулю $x^n=0$. Поэтому $x_1 \ldots x_{n+1}=0$ следует в $F(\mathfrak{M})$ из $x^n=0$. При $n=3$ нам остается доказать еще, что $[x, y]^2=0$. Из $x^3=0$ следуют тождества $x^2y^2+xy^2x+y^2x^2 = y^2x^2 + yx^2y + x^2y^2 = 0$, поэтому

$$xy^2x = yx^2y. \tag{9}$$

Кроме того, $0=[x^2y+xyx+yx^2, y]$ и, согласно (9),

$$x^2y^2+xyxy = yxyx + y^2x^2. \tag{10}$$

Подставляем в $(x^2y+xyx+yx^2)x = x^2yx+xyx^2 = 0$ $x+y$ вместо x и берем однородную компоненту второй степени по x: $x^2y^2 + 2xy^2x + yxyx + y^2x^2 + xyxy = 0$. По (9) и (10) получается, что $x^2y^2+xy^2x+xyxy=0$. Ввиду того, что $x^2y^2+xy^2x+y^2x^2=0$, то $xyxy=y^2x^2$. Аналогично $yxyx=x^2y^2$. Поэтому, из $s_3(x, y, xy)=[x, y]^2+x[y, x]y=0$ следует, что $x[x, y]y=[x, y]^2 = y[y, x]x$, $2[x, y]^2 = x[x, y]y + y[y, x]x = x^2y^2 - yxyx+y^2x^2-xyxy=0$. Этим доказывается, что в $F(\mathfrak{M})$ из $x^3=0$ следует $[x, y]^2=0$.

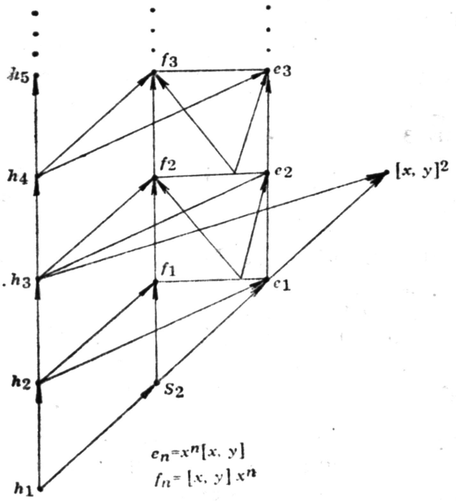

Рис. 5

б) Очевидно, что в $F(\mathfrak{M})$ из $[x, y]x^{n-2}=0$ следует $[x, y]x^{n-1}=0$. При $n \geqq 4$ это означает, что $[x_1, x_2]x_3 \ldots x_{n+1}=0$. Кроме того, из $[x, y]x^{n-2}=0$ не следует $x^{n-1}[x, y]=0$, потому что первое тождество выполняется, а второе не выполняется в алгебре B_2.

Случай $n=3$ уже рассмотрен в п. 2.

в) Доказательство аналогично случаю б).

г) Из тождества $f(x, y)=\alpha[x, y]x^{n-2} + \beta x^{n-2}[x, y] = 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, следует $f(x,y)x=\alpha[x, y]x^{n-1}=0$, $xf(x, y)=\beta x^{n-1}[x, y]=0$ (в $F(\mathfrak{M})$ $x[x,y]x=0$). Это доказывает утверждение при $n \geqq 4$. При $n=3$ все следует из п. 2.

д) Тождество $[x, y]^2=0$ не имеет следствий высших степеней в $F(\mathfrak{M})$, потому что выполняется в алгебрах B_1 и B_2 из доказательства предложения 3.1, а ненулевые многочлены степени 5 из $F(\mathfrak{M})$ не аннулируются в этих алгебрах.

4. Многообразие $\mathfrak{M}$, определенное тождеством $x^3=0$.

Тождество $x^3=0$ эквивалентно своей линеаризации $h_3(x_1, x_2, x_3) = \Sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}=0$, $\sigma \in S_3$. Известно [12], что в $F(\mathfrak{M})$ $x_1x_2x_3x_4x_5x_6=0$, т. е. для описания модульной структуры $P_n(\mathfrak{M})$ мы должны рассмотреть случаи $n=4$, 5. Сначала докажем:

Теорема 4.1. $P_4(\mathfrak{M}) \cong M(3, 1)+M(2^2)+2M(2, 1^2)+M(1^4)$.

Доказательство проведем в несколько шагов. Оно будет следовать из лемм 4.2—4.5.

Лемма 4.2. *В* $F(\mathfrak{M})$ $x^2yx+xyx^2=x^2y^2-yxyx=0$.

Доказательство. В $F(\mathfrak{M})$ $0=h_3(x, x, y)x=x^2yx+xyx^2+yx^3$, поэтому $x^2yx + xyx^2=0$; $[h_3(x, x, y), y] = x^2y^2 + yxyx - (y^2x^2 + xyxy) = 0$. В $x^2yx + xyx^2=0$ подставляем $x+y$ вместо x и берем однородную компоненту второй степени по y: $x^2y^2 + 2xy^2x + yxyx + y^2x^2 + xyxy = 2(x^2y^2 + xy^2x + xyxy)=0$. Ввиду $h_3(x, x, y^2)=x^2y^2 + xy^2x + y^2x^2 = 0$, мы получаем, что $y^2x^2 = xyxy$ и аналогично $x^2y^2 = yxyx$.

Лемма 4.3. *В разложении $P_4(\mathfrak{M})$ в сумму неприводимых S_4-подмодулей модуль $M(3, 1)$ участвует с кратностью* 1.

Доказательство. По формуле (1) и лемме 1.2 $\varkappa_{(3,1)} = \dim A_2^{(3,1)} - \dim(T(\mathfrak{M}) \cap A_2^{(3,1)})$ (модуль $N(4)$ порождается многочленом x^4, и поэтому лежит в $T(\mathfrak{M})$. Здесь $\dim A_2^{(3,1)}=4$ и $\varkappa_{(3,1)}=4-\dim(T(\mathfrak{M}) \cap A_2^{(3,1)})$.

Все следствия состава (3, 1) получаются из $h_3(x, y, z)$ подстановкой x, x^2, y, xy, yx вместо x, y, z и умножением справа на x и y. Непосредственно проверяется, что все тождества состава (3, 1) являются линейными комбинациями тождеств $x^3y=yx^3=x^2yx-xyx^2=0$, которые линейно независимы. Поэтому $\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_2^{(3,1)})=3$ и $\varkappa_{(3,1)}=1$.

Лемма 4.4. *Кратность модуля* $M(2^2)$ *в* $P_4(\mathfrak{M})$ *равна* 1.

Доказательство. В этом случае формула (1) дает: $\varkappa_{(2,2)}=\dim A_2^{(2,2)}-\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_2^{(2,2)})-1\cdot\beta_{(3,1)}^{(2,2)}=5-\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_2^{(2,2)})$. Как и в предыдущей лемме, проверяется, что тождества $xyxy-y^2x^2=xy^2x+x^2y^2+y^2x^2=yxyx-x^2y^2=yx^2y+y^2x^2+x^2y^2=0$ линейно независимы и что все следствия из $x^3=0$ состава (2, 2) являются их линейными комбинациями. Поэтому $\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_2^{(2,2)})=4$ и $\varkappa_{(2,2)}=1$.

Лемма 4.5. *Кратность модуля* $M(2, 1^2)$ *в* $P_4(\mathfrak{M})$ *равна* 2.

Доказательство. Из формулы (1) получается, что $\varkappa_{(2,1^2)}=\dim A_3^{(2,1^2)}-\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_3^{(2,1^2)})-1\cdot\beta_{(3,1)}^{(2,1^2)}-1\cdot\beta_{(2,2)}^{(2,1^2)}$. Линейное пространство $A_3^{(2,1^2)}$ имеет базис из 12 элементов: $xyxz$, $xyzx$, $yxzx$, $xzxy$, $xzyx$, $zxyx$, yx^2z, yzx^2, x^2yz, zx^2y, zyx^2, x^2zy. Рассмотрим три тождества $xyxz+x^2yz+yx^2z=xyzx+x^2yz+yzx^2=yxzx+yx^2z+yzx^2=0$ вместе с аналогичными тождествами, которые получаются перестановкой y и z, и тождество $x^2yz+yx^2z+yzx^2+x^2zy+zx^2y+zyx^2=0$. Матрица, строчками которой являются координаты этих многочленов относительно указанного базиса, имеет ранг 7, поэтому эти тождества линейно независимы. Как в предыдущих леммах, показывается, что это максимальное число линейно независимых многочленов из $T(\mathfrak{M})\cap A_3^{(2,1^2)}$. Поэтому по лемме 1.2 $\varkappa_{(2,1^2)}=12-7-1.2-1.1=2$. Заметим, что модуль $M(1^4)$ остается в разложении $P_4(\mathfrak{M})$, потому что из $h_3(x, y, z)=0$ нельзя получить как следствие $S_4(x, y, z, t)=0$ [5, предложение 1.1].

Следующая теорема дает модульное описание $P_5(\mathfrak{M})$. Доказательство следует из лемм 4.7—4.11.

Теорема 4.6. $P_5(\mathfrak{M})\cong M(3, 2)+M(3, 1^2)+M(2, 1^3)$.

Лемма 4.7. *В разложении* $P_5(\mathfrak{M})$ *не участвуют модули* $M(5)$ *и* $M(4, 1)$.

Доказательство. В силу лемм 1.1 и 1.2 достаточно показать, что одночлены x^4y, x^3yx, x^2yx^2, xyx^3, yx^4 аннулируются в $F_2(\mathfrak{M})$. Это неочевидно только для x^2yx^2. Но $x(x^2y+xyx+yx^2)x=0$, поэтому $x^2yx^2=0$.

Лемма 4.8. *В разложении* $P_5(\mathfrak{M})$ *в сумме неприводимых* S_5*-модулей* $M(3, 2)$ *участвует с кратностью* 1.

Доказательство. По леммам 1.1 и 4.7 $\varkappa_{(3,2)}=\dim A_2^{(3,2)}-\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_2^{(3,2)})$. Здесь $\dim A_2^{(3,2)}=10$. Умножаем слева или справа на x или y тождества из доказательства леммы 4.2 $x^2yx+xyx^2=x^2y^2+xy^2x+y^2x^2=x^2y^2+xy^2x+xyxy=y^2x^2-xyxy=x^2y^2-yxyx=0$ и получаем, что $xyxyx=0$, $x^2y^2x=-xy^2x^2=xyx^2y=-x^2yxy=yxyx^2=-yx^2yx$. Вместе с очевидными тождествами $x^3y^2=y^2x^3=yx^3y=0$ это дает 9 линейно независимых тождеств состава (3, 2). После непосредственной проверки доказывается, что все следствия из $x^3=0$ степени 3 относительно x и степени 2 относительно y являются линейными комбинациями этих 9 тождеств. Поэтому $\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_2^{(3,2)})=9$, откуда $\varkappa_{(3,2)}=1$.

Лемма 4.9. *В разложении* $P_5(\mathfrak{M})$ *участвует один модуль* $M(3, 1^2)$.

Доказательство. По леммам 1.1, 1.2, 4.7 и 4.8 $\varkappa_{(3,1^2)}=\dim A_3^{(3,1^2)}-\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_3^{(3,1^2)})-1\cdot\beta_{(3,2)}^{(3,1^2)}$, где $\beta_{(3,2)}^{(3,1^2)}=1$, $\dim A_3^{(3,1^2)}=20$. Из тождества в [8]

$$yx^2zt+tyx^2z=0 \tag{11}$$

получаем при $t=x$ $yx^2zx+xyx^2z=0$. Из $xyx^2=-x^2yx$ получаем $yxzx^2+x^2yxz=0$. Кроме того, $h_3(x, x, yxz)=yxzx^2+xyxzx+x^2yxz=0$, поэтому $xyxzx=0$. Аналогично $xzxyx=0$. В $xyx^2+x^2yx=0$ подставляем yz вместо y и получаем $xyzx^2+x^2yzx=0$. В (11) подставляем $x+v$ вместо x и берем полилинейную компоненту. Потом подставляем $y=x=t$: $x^2vzx+xvxzx+x^3vz+x^2vxz=0$, т. е. в $\mathfrak{M}$ выполняется тождество $x^2yzx+x^2yxz=0$. Следовательно, получаем в $\mathfrak{M}$ 9 тождеств: $x^3yz=yzx^3=yx^3z=xyxzx=0$, $xyzx^2=-x^2yzx=x^2yxz=-xyx^2z=yx^2zx=-yxzx^2$. Еще 9 тождеств получается перестановкой y и z. Непосредственно проверяется, что эти 18 тождеств линейно независимы. Для этого достаточно записать их относительно любого базиса $A_3^{(3, 1^2)}$ и найти ранг матрицы координат. Удобнее всего рассматривать следующий базис в $A_3^{(3, 1^2)}$: в первых шести элементах участвует множитель x^3, потом следуют два одночлена $xyxzx$, $xzxyx$. Следующая группа базисных элементов состоит из $xyzx^2$, x^2yzx, x^2yxz, xyx^2z, yx^2zx и еще из 6 одночленов, которые получаются перестановкой y и z. В конце поставим элементы $yxzx^2$ и $zxyx^2$. Тогда минор порядка 18, состоящий из первых 18 столбцов, равен 1. С другой стороны, если мы получим все следствия из $x^3=0$ состава $(3, 1^2)$, легко проверить, что они являются линейными комбинациями этих 18 тождеств. Поэтому $\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_3^{(3, 1^2)})=18$ и $\varkappa_{(3,1^2)}=1$.

Лемма 4.10. *Модуль $M(2^2, 1)$ не участвует в разложении $P_5(\mathfrak{M})$.*

Доказательство. Леммы 1.1, 1.2 и уже полученные результаты в п. 4 дают, что

$$\varkappa_{(2^2, 1)}=\dim A_3^{(2^2, 1)}-\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_3^{(2^2, 1)})-1\,.\,\beta_{(3, 2)}^{(2^2, 1)}-1\,.\,\beta_{(3, 1^2)}^{(2^2, 1)},$$

$$\dim A_3^{(2^2, 1)}=30,\quad \beta_{(3, 2)}^{(2^2, 1)}=2,\quad \beta_{(3, 1^2)}^{(2^2, 1)}=1.$$

Из равенства $x^2u+xux+ux^2=0$ следует, что $xz(yxy+y^2x+xy^2)=0$, т. е. $xzyxy=-xzxy^2-xzy^2x=(x^2z+zx^2)y^2+x^2(zy^2)+(zy^2)x^2$. С другой стороны, $xzyxy=(-x^2(zy)-(zy)x^2)y=-x^2zy^2+z(y^2x^2+x^2y^2)$. Поэтому $2x^2zy^2+zx^2y^2+zy^2x^2=-x^2zy^2+zx^2y^2+zy^2x^2$ и $x^2zy^2=0$. Аналогично $y^2zx^2=0$. Из полученных тождеств легко следуют равенства в $F(\mathfrak{M})$: $zxyxy=zy^2x^2$ (в лемме 4.4 мы показали, что $xyxy=y^2x^2$), $xyzxy=x^2y^2z+zx^2y^2$, $x^2yzy=-x^2y^2z$, $xy^2zx=-x^2y^2z$, $xyxyz=y^2x^2z$, $xzy^2x=-zy^2x^2$, $xzyxy=zx^2y^2+zy^2x^2$, $xy^2xz=-x^2y^2z-y^2x^2z$, $yxzxy=y^2x^2z+zx^2y^2$, $zxy^2x=-zx^2y^2-zy^2x^2$, $xyxzy=x^2y^2z+y^2x^2z$, $x^2y^2z+y^2x^2z+zx^2y^2+zy^2x^2=0$, $xzxy^2=-zx^2y^2$.

Еще столько же тождеств получаются перестановкой x и y. Проверяется, что эти 27 тождеств линейно независимы. Для этого достаточно показать, что матрица коэффициентов этих тождеств относительно любого базиса в $A_3^{(2^2, 1)}$ имеет ранг 27. Удобно работать относительно следующего базиса в $A_3^{(2^2, 1)}$: x^2zy^2, y^2zx^2, потом следуют все одночлены, в которых две буквы x (или две буквы y) не находятся рядом, x^2y^2z, zx^2y^2, y^2x^2z, zy^2x^2. Поэтому $\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_3^{(2^2, 1)})\geqq 27$ и $0\leqq\varkappa_{(2^2,1)}\leqq 30-27-3=0$, откуда $\varkappa_{(2^2,1)}=0$.

Лемма 4.11. *В разложении $P_5(\mathfrak{M})$ в сумме неприводимых S_5-подмодулей $M(2, 1^3)$ участвует с кратностью 1.*

Доказательство. По лемме 1.1, 1.2 и из уже известных кратностей следует, что $\varkappa_{(2,1^3)}=\dim A_4^{(2, 1^3)}-\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_4^{(2, 1^3)})-1.\,\beta_{(3, 2)}^{(2, 1^3)}-1\,.\,\beta_{(3, 1^2)}^{(2, 1^3)}$, $\dim A_4^{(2, 1^3)}=60$, $\beta_{(3, 2)}^{(2, 1^3)}=\beta_{(3, 1^2)}^{(2, 1^3)}=3$. Задача сводится к определению размерности $T(\mathfrak{M})\cap A_4^{(2, 1^3)}$. Из тождества $x^2zy^2=0$ следуют

(12) $$x^2yzt+x^2ytz=yztx^2+zytx^2=0.$$

В [8] доказано, что в $\mathfrak{M}$ выполняется тождество

(13) $$yx^2zt+tyx^2z=0.$$

Линеаризируем $x^2zy^2=0$: $xyztu+yxztu+xyzut+yxzut=0$ и подставляем $u=x$. Используя, что $xvx=x^2v-vx^2$, получаем

(14) $$x^2yzt+yztx^2+yx^2zt+yzx^2t=0.$$

Легко проверить и тождества

(15) $$\begin{aligned} &xyxzt=-x^2yzt-yx^2zt, && yxzxt=-yx^2zt-yzx^2t,\\ &xyzxt=-x^2yzt-yzx^2t, && yxztx=-vx^2zt-yztx^2,\\ &xyztx=-x^2yzt-yztx^2, && yzxtx=-yzx^2t-yztx^2. \end{aligned}$$

Из шести тождеств (15) пермутированием y, z, t получаются еще 30 новых тождеств. Аналогично, из (12) и (13) получаются еще 18. Таким образом, мы имеем 54 тождества типа (12), (13) и (15). Оказывается, что среди них 53 линейно независимых, а все 54 тождества линейно зависимы. Чтобы показать это, достаточно выразить эти многочлены относительно базиса $A_4^{(2,1^3)}$, состоящий из следующих одночленов: $xyxzt$, $xyzxt$, $xyztx$, $yxzxt$, $yxztx$, $yzxtx$, следуют еще 30 одночленов, которые получаются перестановкой y, z, t; в конце следуют 24 элемента, в которых участвует x^2:

$$x^2yzt,\ x^2ytz,\ ytzx^2,\ tyzx^2,\ x^2tyz,\ x^2tzy,\ tzyx^2,\ ztyx^2,$$

$$x^2zty,\ x^2zyt,\ zytx^2,\ yx^2zt,\ yx^2tz,\ zx^2ty,\ zx^2yt,\ tx^2yz,$$

$$tx^2zy,\ yzx^2t,\ ytx^2z,\ ztx^2y,\ zyx^2t,\ tyx^2z,\ tzx^2y,\ yztx^2.$$

Матрица 60×54 координат рассматриваемых тождеств относительно этого базиса имеет ранг 53. В результате переборки всех возможных следствий из $x^3=0$ состава $(2, 1^3)$ получается, что все следствия указаного типа, являются линейными комбинациями тождеств типа (12), (13), (15). Поэтому $\dim(T(\mathfrak{M})\cap A_4^{(2,1^3)})=53$ и $\varkappa_{(2,1^3)}=1$.

Для доказательства теоремы 4.6 достаточно заметить еще, что $S_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=0$ пропорционально тождеству

$$\Sigma(-1)^\sigma h_3(x_{\sigma(1)}\,x_{\sigma(2)},\ x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)},\ x_{\sigma(5)})=0,$$

поэтому $S_5=0$ следует из $x^3=0$.

Предложение 4.12. *Линеаризации следующих элементов порождают неприводимые S_n-подмодули в $P_n(\mathfrak{M})$: $S_3(x, y, z)-M(1^3)$; $\alpha x[x, y]+\beta[x, y]x$, $(\alpha, \beta)\neq(0, 0)-M(2, 1)$; $S_4(x, y, z, t)-M(1^4)$; $\alpha f_1(x, y, z)+\beta f_2(x, y, z)$, $(\alpha, \beta)\neq(0, 0)-M(2, 1^2)$, где $f_1(x, y, z)=x^2[y, z]-[y, z]x^2$; $f_2(x, y, z)=yx^2z-zx^2y$; $xy^2x-M(2^2)$; $x^2yx-M(3, 1)$; $x^2S_3+2d_3(y, z, t;\ x^2, 1)-M(2, 1^3)$ (здесь $d_3(x_1, x_2, x_3;\ y_1, y_2)=\Sigma(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}y_1x_{\sigma(2)}y_2x_{\sigma(3)}$ — тождество Капелли); $x[y, z]x^2-M(3, 1^2)$; $x^2y^2x-M(3, 2)$.*

Доказательство. Будем следовать такую основную идею доказательства предложения. Сначала зафиксируем разбиение $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ числа n. В обозначениях §1[4] рассматриваем таблицу Юнга D_τ, соответствующую разбиению λ для подходящей подстановки τ. Симметризация $f_\tau(x_1, \ldots, x_r)$ порождает неприводимый $GL(m, K)$-подмодуль в $F_m(\mathfrak{M})$, изоморфный $N_m(\lambda)$.

Используя уже известные следствия из $x^3=0$, мы перерабатываем $f_\tau(x_1, \ldots, x_t)$ и показываем, что в $F_m(\mathfrak{M})$ оно эквивалентно тождествам, указанным в формулировке предложения 4.12.

Случаи $M(1^3)$, $M(2, 1)$, $M(1^4)$ очевидны. Будем предполагать, что $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $x_4=t$.

Для разбиения $(2, 1^2)$ и для тождественной подстановки τ_1 мы получаем: $f_{\tau_1}(x, y, z)=S_3(x, y, z)x=-x^2[y, z]+[y, z]x^2+yx^2z-zx^2y$. Потом для подстановки $\tau_2=(34)$ мы имеем:

$$f_{\tau_2}(x, y, z)=[x, y]xz+[y, z]x^2+[z, x]xy=[y, z]x^2-x^2[y, z]+2(zx^2y-yx^2z)$$

Используя тождества в доказательстве леммы 4.5, можно показать, что два многочлена f_{τ_1} и f_{τ_2} линейно независимы в $F_3(\mathfrak{M})$. Это означает, что их линеаризации порождают два различных изоморфных подмодуля $M(2, 1^2)$ в $P_4(\mathfrak{M})$. Но, легко заметить, что f_{τ_1} и f_{τ_2} являются линейными комбинациями f_1 и f_2.

Случай (2^2). Для тождественной подстановки τ в этом случае получаем $f_\tau(x, y)=x^2y^2-yx^2y-xy^2x+y^2x^2$. Из доказательства леммы 4.4 следует, что $f_\tau(x, y)=-3xy^2x\neq 0$ в $F(\mathfrak{M})$.

Случаи $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 1^2)$ рассматриваются аналогично, используя тождественную подстановку и тождества из лемм 4.3, 4.8 и 4.9.

Случай $(2, 1^3)$. Используя тождества (12), (13), (14), (15), легко убедиться, что из всех неприводимых подмодулей, отвечающих стандартным таблицам Юнга, только для тождественной подстановки получается ненулевой порождающий элемент — $x^2S_3(y, z, t)+2d_3(y, z, t; x^2, 1)$.

Следующая теорема дает полное описание T-идеалов, содержащих многочлен x^3.

Теорема 4.13. *В многообразии $\mathfrak{M}$, определенном тождеством $x^3=0$, все следствия высших степеней из тождеств, порождающих неприводимые S_n-подмодули в $P_n(\mathfrak{M})$, указаны на рис. 6, а, б, в.* На этой рисунке $f=yx^2z-zx^2y$, $e=x^2S_3(y, z, t)+2d_3(y, z, t; x^2, 1)$, $g=x^2[y, z]-[y, z]x^2$.

Доказательство теоремы проведем в несколько шагов:

1) Чтобы доказать случай из рис. 6*а*, достаточно проследить следствия высших степеней из x^3 в многообразиях, определенных тождествами $S_3(x, y, z)=0$, $\alpha x[x, y]+\beta[x, y]x$, $(\alpha, \beta)\neq(0, 0)$, соответственно (см. рис. 1, 2, 3, 4, 5).

2) В доказательстве предложения 4.12 мы уже отметили, что $S_4(x, y, z, t)x\equiv x^2S_3(y, z, t)+2d_3(y, z, t; x^2, 1)$ по модулю тождеств (12), (13), (14), (15), т. е. элемент $x^2S_3+2d_3$, очевидно, являются следствием из $S_4(x, y, z, t)$ в $F(\mathfrak{M})$.

В (14) переставляем y, z, t и суммируем знакопеременно, учитывая четность соответствующей перестановки. Получаем

$$x^2S_3(y, z, t)+S_3(y, z, t)x^2=0. \tag{16}$$

Заменяя t на x и используя (12), видим, что тождество $x[y, z]x^2=0$ является следствием из $S_4(x, y, z, t)=0$ в $F(\mathfrak{M})$. Таким образом, мы получили случай из рис. 6, *б*. Согласно предложению 1.1 [5] из тождества $S_4(x, y, z, t)=0$ не следует $x^2y^2x=0$.

3) Убедимся, что из $xy^2x=0$ и $x^2yx=0$ следует $x^2S_3(y, z, t)+2d_3(y, z, t; x^2, 1)=0$.

В (11) переставляем y, z, t и суммируем знакопеременно. Из этого следует

$$d_3(y, z, t; x^2, 1)+d_3(y, z, t; 1, x^2)=0. \tag{17}$$

В $yx^2y=0$ подставляем $y+z$ вместо y, за этим подставляем zx вместо z и вычисляем полученное с помощью (14), (15). Получаем $ytx^2z+2ytzx^2=0$. Отсюда следует, что

$$d_3(y,\ z,\ t;\ x^2,\ 1)+2S_3(y,\ z,\ t)x^2=0. \tag{18}$$

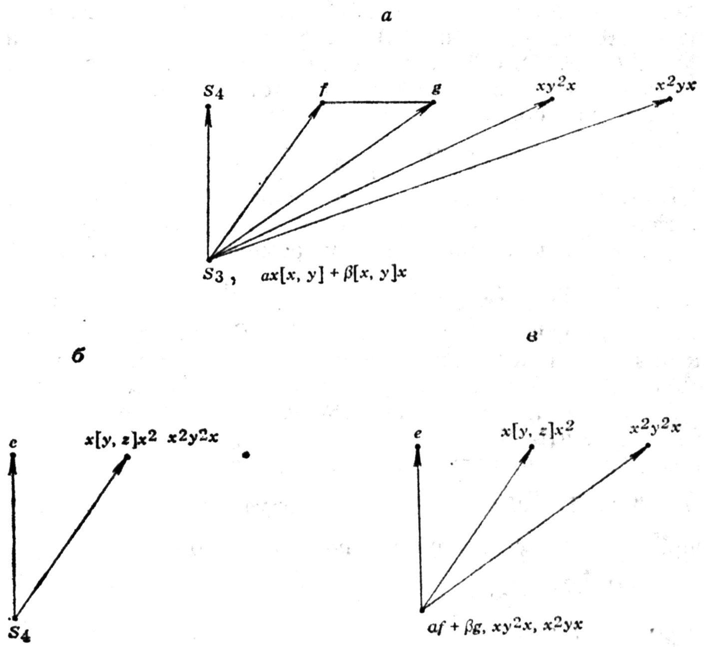

Рис. 6

Линеаризируем x^2yzx. Тогда из (15) следует $2tyx^2z=yzx^2t+yztx^2+tyzx^2$, т. е. $d_3(y,\ z,\ t;\ 1,\ x^2)=S_3(y,\ z,\ t)x^2$. Из этого и из (16), (17), (18) получаем, что из $xy^2x=0$ следует $d_3(y,\ z,\ t;\ x^2,\ 1)=0=x^2S_3(y,\ z,\ t)$. Из $xyx^2=0$ следует $xyzx^2=yx^2zx=0$ и можно провести аналогичные рассуждения.

4) Из $xy^2x=0$ очевидно следует $x^2y^2x=0$.

Линеаризируем по y и подставляем yx вместо y. Потом подставляем zx вместо z и вычитая эти тождества, получаем, что $x^2[y,\ z]x=0$.

То, что из $x^2yx=0$ следует $x^2[y,\ z]x=0$ и $x^2y^2x=0$ очевидно.

5) Сейчас получим, что из

$$x^2[y,\ z]-[y,\ z]x^2=0 \tag{19}$$

следует $2d_3(y,\ z,\ t;\ x^2,\ 1)+x^2S_3(y,\ z,\ t)=0$.

Используя (13) и (14), преобразуем (19) и получаем $tx^2yz-2zx^2yt+2yx^2tz-yx^2zt=0$. В (19) подставляем $z\circ t=zt+tz$ вместо z и, имея в виду (12), находим, что $x^2(z\circ t)y+y(z\circ t)x^2=0$. Из этого и (14) видно, что $yx^2tz-zx^2yt=-yx^2zt+tx^2yz$. Совместно с (19) последнее равенство дает

$$tx^2yz=yx^2zt \tag{20}$$

и, аналогично, $yx^2zt=zx^2ty$. Умножаем (19) слева t и из (20) получаем

$$2x^2tyz=tx^2[z, y]. \tag{21}$$

Имея в виду (14) и (20), получаем $x^2yzt+yztx^2=0$. Поэтому, из (12) видно, что все одночлены, в начале или конце которых находится x^2, являются равными с точностью до знака. Тогда, умножая (19) слева на x, получаем $tx^2[y, z]+4tyzx^2=0$. Из этого и (15) следует, что $tx^2[y, z]=0$ и $tyzx^2=0$. Поэтому $d_3(y, z, t; x^2, 1)=0$ и $S_3(y, z, t)x^2=0$. В частности следует, что $x^2[y, z]x=0$ и $x^2y^2x=0$ тоже являются следствиями из (19).

6) Теперь получим следствия из

$$yx^2z^2-zx^2y=0. \tag{22}$$

Подставляя zx вместо z, yx вместо y и вычитая эти равенства, получаем $x^2[y, z]x=0$. Если подставим yx вместо z в (22), получим, что $x^2y^2x=0$. Заменяя в (22) z на zt и суммируя знакопеременно y, z, t, получаем

$$d_3(y, z, t; x^2, 1)-d_3(y, z, t; 1, x^2)=0. \tag{23}$$

Из этого и (16) видно, что $d_3(y, z, t; x^2, 1)=0$. Линеаризируем (22), умножаем его слева на x, а потом, имея в виду (15), выводим, что $yx^2tz+2ytzx^2+ytx^2z-ztyx^2-zx^2ty=0$. Сейчас суммируем знакопеременно по всем перестановкам y, z, t: $2d_3(y, z, t; x^2, 1)+4S_3(y, z, t)x^2+2d_3(y, z, t; 1, x^2)=0$. Тогда из (16) видно, что $S_3(y, z, t)x^2=0$.

7) Нужно еще рассмотреть следствия из тождества

$$\alpha(x^2[y, z]-[y, t]x^2)+\beta(yx^2z-zx^2y)=0, \quad \alpha\neq0, \ \beta\neq0. \tag{24}$$

Умножаем справа на t и суммируем знакопеременно по перестановкам y, z, t:

$$2x^2S_3(y, z, t)+(\alpha+\beta)d_3(y, z, t; x^2, 1)=0. \tag{25}$$

Аналогичным образом, умножая слева на t и имея в виду (25), получаем $d_3(y, z, t; x^2, 1)=x^2S_3(y, z, t)=0$.

Сейчас умножаем (24) справа на x: $(\alpha-\beta)x^2[y, z]x=0$. В случае $\alpha=\beta$ можно конкретно проверить, что снова следует $x^2[y, z]x=0$.

Если подставим в (24) yx вместо z, получаем $(3\alpha-\beta)x^2y^2x=0$. В случае $3\alpha=\beta$ подставляем в (24) $z=xy$.

Случай из рис. 6, *в* из теоремы получаем как следствие 3) — 7).

Таким образом, доказательство теоремы полностью завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. З. Ананьин, А. Р. Кемер. Многообразия ассоциативных алгебр, решетки подмногообразий которых дистрибутивны. *Сиб. мат. ж.*, 17, 1976, 723—730.
2. В. А. Артамонов. Решетки многообразий линейных алгебр. *Успехи мат. наук*, 33, 1978, 135—167.
3. Г. Вейль. Классические группы, их инварианты и представления. Москва, 1947 (Гл. 4.).
4. В. С. Дренски. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр. *Мат. сб.*, 115, 1981, 98—115.
5. В. С. Дренски. О решетках многообразий ассоциативных алгебр. *Сердика*, 8, 1982, 20—31.
6. A. Berele. Homogeneous polynomial identities. *Israel J. Math.*, 42, 1982, 258—272.
7. J. A. Green. Polynomial representations of GL_n. *Lecture Notes in Math.*, 830, Berlin — Heidelberg — New York, 1980.
8. G. Higman. On a conjecture of Nagata. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 52, 1956, 1—4.

9. G. D. J a m e s. A note on the T-ideal generated by $S_3[x_1, x_2, x_3]$. *Israel J. Math.*, **29**, 1978, 105—112.
10. A. A. K l e i n. *PI*-algebras satisfying identities of degree 3. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **201**, 1975, 263—277.
11. I. G. M a c d o n a l d. Symmetric functions and Hall polynomials. Oxford, 1979. (Ch. 1.)
12. M. N a g a t a. On the nilpotency of nil-algebras. *J. Math. Soc. Japan*, **4**, 1952, 296—301.
13. J. O l s s o n, A. R e g e v. On the T-ideal generated by a standard identity. *Israel J. Math.*, **26**, 1977, 97—104.
14. A. R e g e v. The T-ideal generated by the standard identity $S_3[x_1, x_2, x_3]$. *Israel J. Math.*, **26**, 1977, 105—125.
15. A. R e g e v. T-ideals of degree 3 are finitely generated. *Bull. London Math. Soc.*, **10**, 1978, 261—266.
16. A. R e g e v. Algebras satisfying a Capelli identity. *Israel J. Math.*, **33**, 1979, 149—154.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 7. 12. 1983