PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

ГРУППЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ПРАВЫХ ПОРЯДКОВ

СИМЕОН А. ТОДОРИНОВ, НАДЕЖДА Л. ПЕТРОВА

Найдено необходимое и достаточное условие полугруппового типа, для того чтобы данная группа G имела в точности k правых (двусторонних) линейных порядков.

В настоящей работе делается полугрупповое исследование групп, допускающих конечное число правых (двусторонних) линейных порядков. Вопрос об описании этих групп поставлен Кокориным в [8] под номером 2.25 а): „Описать те группы, которые обладают конечным числом линейных порядков". Эта задача фигурирует и в монографии Фукса [3] под номером 18 с).

Блудов [4] нашел полугрупповое условие для групп, имеющих единственный двусторонний линейный порядок, и, кроме того, сконструировал пример некоммутативной группы с этим свойством. Соответствующая задача для ω-упорядоченных групп рассмотрена в [6]. Полное описание групп, допускающих единственный правый линейный порядок, сделано в [7]. Из этого описания следует, что указанный пример Блудова является группой, которая не имеет единственного правого порядка.

Для доказательства основных утверждений понадобится следующая теорема из [5].

Теорема. *Группа H — относительно выпуклая подгруппа правоупорядочиваемой группы G тогда и только тогда, когда для произвольных элементов $g_i \in G \setminus H$, $a_j \in H \setminus \{e\}$ и $h_{kr} \in H$ существует набор $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s, \eta_1, \dots, \eta_t$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\eta_j = \pm 1$, такой, что*

$$e \notin Q(g_1^{\varepsilon_1} h_{11}, g_1^{\varepsilon_1} h_{12}, \dots, g_2^{\varepsilon_2} h_{21}, \dots, g_s^{\varepsilon_s} h_{s1}, \dots, a_1^{\eta_1}, \dots, a_t^{\eta_t}).$$

Здесь Q — полугруппа, порожденная элементами в скобках.

Отметим, что при $H=\{e\}$ получаем условие для принадлежности группы к классу RO, состоящему из групп, допускающих правый порядок. Это условие мы обозначим теоремой А.

Оно является модификацией условия Фукса [3, с. 53, теорема 1] для продолжимости частичного порядка до линейного.

Определение 1. *Будем говорить, что n-торка $(c_1, \dots, c_n)$, $c_i \neq e$, $c_i \in G$ — относительно односторонняя, если существует правый порядок группы G, при котором все элементы n-торки являются положительными (отрицательными).*

Непосредственно из теоремы А получаем следующее утверждение:

Лемма. *Пусть $c_i, i=1, \dots, n$ — нееденичные элементы группы G. n-торка $(c_1, \dots, c_n)$ тогда и только тогда будет относительно односторонней, когда при каждом выборе $g_i \in G$, $g_i \neq e$, $i=1, \dots, m$, можно найти ε_i, $\varepsilon_i = \pm 1$, такие, что*

$$e \notin Q(c_1, \ldots, c_n, g_1^{\varepsilon_1}, \ldots, g_m^{\varepsilon_m}).$$

При формулировке полугруппового критерия для того, чтобы данная группа G имела конечное число правых линейных порядков, мы воспользуемся определением 1.

Теорема 1. *Группа G имеет в точности k правых линейных порядков тогда и только тогда, когда для произвольных неединичных элементов $a_1, \ldots, a_n$ группы $G (n \geqq C_k^2+1)$, r n-торок вида $(a_1, a_2^{\varepsilon_2}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n})$, $\varepsilon_i = \pm 1$ являются относительно односторонними $(1 \leq r \leq k)$, и существуют неединичные элементы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ группы G, для которых в точности k n-торок вида $(b_1, b_2^{\varepsilon_2}, \ldots, b_n^{\varepsilon_n})$, $\varepsilon_i = \pm 1$, являются относительно односторонними.*

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть группа G имеет в точности k правых порядков и P_s — один из них. Для произвольных элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G \setminus \{e\}$ выбираем $\varepsilon_i = \pm 1$, $2 \leqq i \leqq n$, так, что

$$a_2^{\varepsilon_2}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n} \in P_s, \quad \text{если} \quad a_1 \in P_s$$

или

$$a_2^{\varepsilon_2}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n} \in P_s^{-1}, \quad \text{если} \quad a_1 \in P_s^{-1}.$$

Ясно, что для так полученного набора $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ n-торка $(a_1, a_2^{\varepsilon_2}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n})$ будет относительно односторонней. Если $\nu_2, \ldots, \nu_n$ — другой набор из чисел ± 1, то хотя бы для одного t, $t=2, \ldots, n$, выполняется $\varepsilon_t \neq \nu_t$. Это означает, что $a_t^{\nu_t} \notin P_s (P_s^{-1})$ и, следовательно, n-торка $(a_1, a_2^{\nu_2}, \ldots, a_n^{\nu_n})$ не будет односторонней относительно порядка P_s. Иными словами, фиксированным n элементам $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G \setminus \{e\}$ соответствует один и только один набор $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, $\varepsilon_i = \pm 1$, при котором n-торка $(a_1, a_2^{\varepsilon_2}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n})$ будет односторонней относительно порядка P_s. Так как группа G имеет k правых порядков, то самое большое для k таких наборов (некоторые из них могут совпадать) соответствующие n-торки будут относительно односторонними.

Покажем, че существуют неединичные элементы $b_1, b_2, \ldots, b_n \in G$, такие, что, если $b_1, b_2^{\varepsilon_2}, \ldots, b_n^{\varepsilon_n} \in P_i$, $\varepsilon_s = \pm 1$, и $b_1, b_2^{\eta_2}, \ldots, b_n^{\eta_n} \in P_j$, $\eta_s = \pm 1$, где $i \neq j$, то $\varepsilon_t \neq \eta_t$ для некоторого t, $2 \leqq t \leqq n$.

Если b_1 — произвольный неединичный элемент группы G и P_i — какой-нибудь порядок G, то из линейности порядка P_i следует, что $b_1 \in P_i$ или $b_1 \in P_i^{-1}$.

Поэтому мы можем считать, что

$$b_1 \in \bigcap_{1 \leqq i \leqq k} P_i,$$

где P_i — разные, с точностью до противоположности правые порядки группы G. Остальные элементы $b_2, \ldots, b_n$ выбираем так, что хотя бы один из них принадлежал множеству $P_s \setminus P_t$, где $s=1, \ldots, k-1$, $t=2, \ldots, k$ и $s<t$. Такой выбор возможен, так как по условию $n \geqq C_k^2+1$.

Пусть теперь $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ и $\eta_2, \ldots, \eta_n$ — такие наборы из чисел ± 1, для которых $b_1, b_2^{\varepsilon_2}, \ldots, b_n^{\varepsilon_n} \in P_i$ и $b_1, b_2^{\eta_2}, \ldots, b_n^{\eta_n} \in P_j$, где $i \neq j$ (для определенности $i<j$). Согласно нашему выбору среди элементов $b_2, \ldots, b_n$ есть элемент $b_t \in P_i \setminus P_j$. Следовательно, $\varepsilon_t = 1$, а $\eta_t = -1$, т. е. $\varepsilon_t \neq \eta_t$. Это означает,

что невозможно чтобы n-торка $b_1, b_2^{\varepsilon_2}, \ldots, b_n^{\varepsilon_n}$ была односторонней относительно двух порядков при одном и том же наборе $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, $\varepsilon_i = \pm 1$.

Следовательно, для элементов $b_1, b_2^{\varepsilon_2}, \ldots, b_n^{\varepsilon_n}$ в точности k n-торок вида $(b_1, b_2^{\varepsilon_2}, \ldots, b_n^{\varepsilon_n})$ будут относительно односторонними.

2. Достаточность. Пусть для произвольных элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G \setminus \{e\}$ r n-торок вида $(a_1, a_2^{\varepsilon_2}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n})$, $\varepsilon_i = \pm 1$ — относительно односторонние $(1 \leq r \leq k)$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — такие неединичные элементы группы G, для которых в точности k n-торок вида $(b_1, b_2^{\varepsilon_2}, \ldots, b_n^{\varepsilon_n})$, $\varepsilon_i = \pm 1$ — относительно односторонние. Согласно Лемме, полугруппу, порожденную какой-нибудь односторонней n-торкой, можно продолжить до правого линейного порядка группы G. Ясно, что полугруппы, порожденные двумя разными n-торками вида $(b_1, b_2^{\varepsilon_2}, \ldots, b_n^{\varepsilon_n})$ продолжаются до разных правых линейных порядков группы G. Так как $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — элементы, для которых k n-торок указанного вида относительно односторонние, то мы получаем k разных правых порядков группы G. Если допустим, что G имеет больше, чем k правых порядков, то как и выше, можно найти неединичные элементы группы G $c_1, c_2, \ldots, c_n$, для которых больше, чем k n-торок вида $(c_1, c_2^{\varepsilon_2}, \ldots, c_n^{\varepsilon_n})$, будут относительно односторонними, а это противоречит условию.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Аналогичным способом можно рассматривать односторонние n-торки относительно двухсторонних линейных порядков. Без существенных различий доказывается следующая теорема:

Теорема 2. *Группа G имеет в точности k двухсторонних линейных порядков тогда и только тогда, когда для произвольных неединичных элементов $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq C_k^2 + 1)$ группы G r n-торок вида $(a_1, a_2^{\varepsilon_2}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n})$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 2, \ldots, n$, являются относительно односторонними $(1 \leq r \leq k)$ и существуют неединичные элементы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ группы G, для которых в точности k n-торок вида $(b_1, b_2^{\varepsilon_2}, \ldots, b_n^{\varepsilon_n})$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 2, \ldots, n$, будут относительно односторонними.*

Оказывается, что для правоупорядоченных групп существует зависимость между мощностью множества относительно выпуклых подгрупп и мощностью порядков. Для двусторонне упорядочиваемых групп это утверждать нельзя ввиду инвариантности порядка.

Следствие 1. *Число правых порядков ro-группы G больше числа относительно выпуклых подгрупп линейно упорядоченных по включению.*

Доказательство. Пусть $H_0, H_1, \ldots, H_s, H_{s+1}$ — относительно выпуклые подгруппы ro-группы G, такие, что

$$E = H_0 < H_1 < \cdots < H_s < H_{s+1} = G.$$

Элементы $a_1, a_2, \ldots, a_{s+1}$ выбираем так, что $a_i \in H_i \setminus H_{i-1}$, $i = 1, \ldots, s+1$. Для произвольных неединичных элементов $b_1, \ldots, b_t \in G$ выбираем $\eta_1, \ldots, \eta_t$, $\eta_j = \pm 1$, $j = 1, \ldots, t$, так, что, если $b_j \in H_k \setminus H_{k-1}$, то $b_j^{\eta_j}$ и $a_k^{\varepsilon_k}$, $\varepsilon_k = \pm 1$, были бы одновременно положительными или отрицательными относительно того порядка, при котором H_k — выпуклая подгруппа.

Тогда из теоремы 1 следует, что для каждого набора $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{s+1}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 2, \ldots, s+1$, существует набор $\eta_1, \ldots, \eta_t$, $\eta_j = \pm 1$, такой, что

$$e \notin Q(a_1, a_2^{\varepsilon_2}, \ldots, a_{s+1}^{\varepsilon_{s+1}}, b_1^{\eta_1}, \ldots, b_t^{\eta_t}).$$

Согласно лемме, это означает, что для каждого набора $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{s+1}$, $\varepsilon_i = \pm 1$ элементы $a_1, a_2^{\varepsilon_2}, \ldots, a_{s+1}^{\varepsilon_{s+1}}, b_1^{\eta_1}, \ldots, b_t^{\eta_t}$ будут относительно односторонними. Отсюда и из теоремы 1 следует, что группа G имеет хотя бы 2^s разных правых порядков.

Следствие 2. *Число правых порядков ro-группы G больше числа ее относительно выпуклых подгрупп.*

Доказательство базируется на следствии 1 и том факте, что если две относительно выпуклые подгруппы не являются упорядоченными по включению, то они не могут быть выпуклыми при одном и том же порядке группы G.

Непосредственным выводом из следствия 2 является:

Следствие 3. *ro-группа, у которой бесконечно много относительно выпуклых подгрупп, имеет бесконечно много правых порядков.*

В [4] Блудов сконструировал некоммутативную группу, которая имеет единственный двусторонний порядок. Так как эта группа имеет бесконечно много относительно выпуклых подгрупп, то по следствию 3, она имеет бесконечно много правых порядков. По тем же причинам и группа из примера Горчакова [1] имеет бесконечно много правых порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Кокорин, В. М. Копытов. Линейно упорядоченные группы. Москва, 1972.
2. L. Fuchs. Note on ordered groups and rings. *Fundam. Math.*, **46**, 1957, 167—174.
3. Л. Фукс. Частично упорядоченные алгебраические системы. Москва, 1965.
4. В. В. Блудов. Группы, упорядочиваемые единственным способом. *Алгебра и логика*, **13**, 1974, № 6, 603—634.
5. С. А. Тодоринов. Относително изпъкнали подгрупи на дясно наредими групи. *Год. ВТУЗ, Приложна мат.*, **18**, 1982, № 2.
6. С. А. Тодоринов, П. И. Георгиева. О группах, допускающих единственный максимальный ω-порядок. *Сиб. мат. ж.*, **XIX**, 1978, № 2, 406—411.
7. С. А. Тодоринов, Н. Л. Петрова. Групи, допускащи единствена дясна наредба. *Год. ВТУЗ*, **16**, 1980, № 4.
8. Коуровская тетрадь. Новосибирск, 1982.

Высший институт пищевой промышленности
Пловдив

Поступила 16. 3. 1984