PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ n-ТКАНЕЙ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВЕЙЛЯ

БИСТРА ЦАРЕВА

В настоящей работе найдено необходимое и достаточное условие, чтобы линейная комбинация сумм геодезических и чебышевских векторов всех сетей произвольной n-ткани в двумерном пространстве Вейля равнялась нулю. Доказывается, что всякая связность Вейля двух измерений может быть единственным способом преобразована конформно так, чтобы после этого преобразования данная n-ткань стала n-тканью, для которой линейная комбинация сумм геодезических и чебышевских векторов всех ее сетей равнялась нулю. Вводятся конформно-геодезический и конформно-чебышевский векторы n-ткани в двумерном пространстве Вейля.

Задание n различных однопараметрических семейств линий $(\underset{1}{v})$, $(\underset{2}{v})$, $(\underset{3}{v}), \dots, (\underset{n}{v})$ определяет n-ткань $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \dots, \underset{n}{v})$. Когда $n=2$, n-ткань называется сетью, а когда $n=3$ — три-тканью [1].

Пусть в двумерном пространстве Вейля W_2 с основным тензором g_{is} и дополнительным вектором T_k дана n-ткань $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \dots, \underset{n}{v})$. Рассмотрим все ее сети $(\underset{k}{v}, \underset{l}{v})$, $k, l=1, 2, \dots, n$, $k<l$. Обозначим геодезические кривизны линий $(\underset{i}{v})$ через $\underset{i}{г}$, чебышевские кривизны линий $(\underset{k}{v})$ сетей $(\underset{k}{v}, \underset{l}{v})$ через $\underset{k,l}{r}$. Об углах, геодезических и чебышевских векторах сетей $(\underset{k}{v}, \underset{l}{v})$ вводим соответственно обозначения $\underset{k,l}{\omega}$, $\underset{k,l}{\alpha_s}$, $\underset{k,l}{a_s}$, где $k, l=1, 2, \dots, n$ и $k<l$.

Согласно [2, 3], геодезические и чебышевские векторы сетей $(\underset{k}{v}, \underset{l}{v})$ имеют вид

$$\text{(1)} \qquad \underset{k,l}{\alpha_s}=\frac{\underset{k}{q}\,\underset{k}{v_s}+\underset{l}{г}\,\underset{l}{v_s}}{\sin^2\underset{k,l}{\omega}}, \quad \underset{k,l}{a_s}=\frac{\underset{k,l}{r}\,\underset{k}{v_s}+\underset{l,k}{r}\,\underset{l}{v_s}}{\sin^2\underset{k,l}{\omega}}.$$

Принимаем следующие обозначения :

$$\text{(2)} \qquad \begin{gathered}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{l=2\\ l>k}}^{n}\underset{k,l}{\alpha_s}=\alpha_s, \quad \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{l=2\\ l>k}}^{n}\underset{k,l}{a_s}=A_s,\\ \sum_{\substack{q=1\\ q\neq p}}^{n}\frac{1}{\sin^2\underset{p,q}{\omega}}=\underset{p}{\zeta}, \quad \sum_{\substack{q=1\\ q\neq p}}^{n}\frac{\underset{p,q}{r}}{\sin^2\underset{p,q}{\omega}}=\underset{p}{\rho}.\end{gathered}$$

Учитывая, что

$$\text{(3)} \qquad \underset{k}{v_s}=-\frac{\sin\underset{2,k}{\omega}}{\sin\underset{1,2}{\omega}}\underset{1}{v_s}+\frac{\sin\underset{1,k}{\omega}}{\sin\underset{1,2}{\omega}}\underset{2}{v_s}$$

ПЛИСКА Български математически студии. Том 9, 1987, с. 61—65.

и имея в виду (1) и (2), для сумм геодезических и чебышевских векторов всех сетей n-ткани $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \dots, \underset{n}{v})$ находим

$$\alpha_s = \sum_{p=1}^{n} \underset{p}{\text{г}}\, \underset{p}{v_s}\, \underset{p}{\zeta}, \quad A_s = \sum_{p=1}^{n} \underset{p}{v_s}\, \underset{p}{\rho}. \tag{4}$$

Используя (3), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{n} \underset{p}{\text{г}}\, \underset{p}{v_s}\, \underset{p}{\zeta} &= \frac{1}{\sin \underset{1,2}{\omega}} (P \underset{1}{v_s} + Q \underset{2}{v_s}), \\ \sum_{p=1}^{n} \underset{p}{v_s}\, \underset{p}{\rho} &= \frac{1}{\sin \underset{1,2}{\omega}} (E \underset{1}{v_s} + F \underset{2}{v_s}), \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} P &= -\sum_{p=1}^{n} \underset{p}{\text{г}}\, \underset{p}{\zeta} \sin \underset{2,p}{\omega}, \quad Q = \sum_{p=2}^{n} \underset{p}{\text{г}}\, \underset{p}{\zeta} \sin \underset{1,p}{\omega}, \\ E &= -\sum_{p=1}^{n} \underset{p}{\rho} \sin \underset{2,p}{\omega}, \quad F = \sum_{p=2}^{n} \underset{p}{\rho} \sin \underset{1,p}{\omega}. \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть λ и μ — произвольные функции. Согласно (4), (5) и (6), имеем

$$\lambda \alpha_s + \mu A_s = \frac{1}{\sin \underset{1,2}{\omega}} [(\lambda P + \mu E) \underset{1}{v_s} + (\lambda Q + \mu F) \underset{2}{v_s}], \tag{7}$$

откуда следует справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Если λ и μ — произвольные функции, то линейная комбинация сумм геодезических и чебышевских векторов $\lambda\alpha_s + \mu A_s$ равна нулю тогда и только тогда, когда углы, геодезические и чебышевские кривизны линий всех сетей n-ткани удовлетворяют равенствам*

$$\lambda P + \mu E = 0 \quad \text{и} \quad \lambda Q + \mu F = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим вектор

$$G_a = \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^{n} \underset{i}{\tilde{v}_a}\, \underset{i}{v^s}\, \underset{i}{\zeta} (\lambda \alpha_s + \mu A_s), \tag{9}$$

где

$$\eta = \sum_{j=1}^{n-1} \underset{j}{\zeta} \sum_{\substack{h=2 \\ h>j}}^{n} \underset{h}{\zeta} \sin^2 \underset{j,h}{\omega}. \tag{10}$$

С помощью (3) устанавливаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} \underset{i}{\tilde{v}_a}\, \underset{i}{v^s}\, \underset{i}{\zeta} = \frac{1}{\sin \underset{1,2}{\omega}} \Big(-\underset{1}{v_s} \sum_{i=1}^{n} \underset{i}{\tilde{v}_a}\, \underset{i}{\zeta} \sin \underset{2,i}{\omega} + \underset{2}{v_s} \sum_{i=2}^{n} \underset{i}{\tilde{v}_a}\, \underset{i}{\zeta} \sin \underset{1,i}{\omega}\Big). \tag{11}$$

Из (7), (9) и (11) вытекает следующее представление для вектора G_a:

$$G_a = \frac{1}{\eta \sin \underset{1,2}{\omega}} \Big[(\lambda P + \mu E) \sum_{i=2}^{n} \underset{i}{\tilde{v}_a}\, \underset{i}{\zeta} \sin \underset{1,i}{\omega} + (\lambda Q + \mu F) \sum_{i=1}^{n} \underset{i}{\tilde{v}_a}\, \underset{i}{\zeta} \sin \underset{2,i}{\omega}\Big]. \tag{12}$$

Учитывая (3), (12) и равенства $g_a^m \underset{i}{v}_m = \underset{i}{v}_a$, получаем

(13)
$$G_a = \{[-(\lambda P+\mu E) \sum_{i=3}^{n} \underset{i}{\zeta} \sin \underset{1,i}{\omega} \sin \underset{2,i}{\omega} - (\lambda Q + \mu F) \sum_{i=1}^{n} \underset{i}{\xi} \sin^2 \underset{2,i}{\omega}] \underset{1}{\tilde{v}}_a$$
$$+[(\lambda P+\mu E) \sum_{i=2}^{n} \underset{i}{\zeta} \sin^2 \underset{1,i}{\omega} + (\lambda Q+\mu F) \sum_{i=3}^{n} \underset{i}{\zeta} \sin \underset{1,i}{\omega} \sin \underset{2,i}{\omega}] \underset{2}{\tilde{v}}_a\} \frac{1}{\eta \sin^2 \underset{1,2}{\omega}}.$$

Лемма 2. *Вектор G_a равен нулю тогда и только тогда, когда углы, геодезические и чебышевские кривизны линий всех сетей n-ткани удовлетворяют равенства* (8).

Доказательство. Из (13) следует что $G_a = 0$ тогда и только тогда, когда выполнены равенства

(14)
$$-(\lambda P+\mu E) \sum_{i=3}^{n} \underset{i}{\zeta} \sin \underset{1,i}{\omega} \sin \underset{2,i}{\omega} - (\lambda Q+\mu F) \sum_{i=1}^{n} \underset{i}{\zeta} \sin^2 \underset{2,i}{\omega} = 0;$$
$$(\lambda P+\mu E) \sum_{i=1}^{n} \underset{i}{\zeta} \sin^2 \underset{1,i}{\omega} + (\lambda Q+\mu F) \sum_{i=3}^{n} \underset{i}{\zeta} \sin \underset{1,i}{\omega} \sin \underset{2,i}{\omega} = 0.$$

Необходимость. Пусть $G_a = 0$. Следовательно, равенства (14) выполнены. Определитель системы (14) имеет вид

(15)
$$\Delta = \sin^2 \underset{1,2}{\omega} (\underset{1}{\zeta} \sum_{i=2}^{n} \underset{i}{\zeta} \sin^2 \underset{1,i}{\omega} + \underset{2}{\zeta} \sum_{i=3}^{n} \underset{i}{\zeta} \sin^2 \underset{2,i}{\omega})$$
$$+ \sum_{k=3}^{n-1} \underset{k}{\zeta} \sum_{\substack{l=4\\ l>k}}^{n} \underset{l}{\zeta} (\sin \underset{1,k}{\omega} \sin \underset{2,l}{\omega} - \sin \underset{2,k}{\omega} \sin \underset{1,l}{\omega})^2.$$

Так как $0 < \underset{k,l}{\omega} < \pi$, то из (2) и (15) видно, что всегда $\Delta \neq 0$ (даже $\Delta > 0$). Тогда единственное решение системы (14):

$$\lambda P + \mu E = 0, \quad \lambda Q + \mu F = 0.$$

Достаточность. Пусть равенства (8) выполнены. Из (13) очевидно, что $G_a = 0$. В силу доказанных лемм получаем, что имеет место

Теорема 1. *Если λ и μ — произвольные функции, то линейная комбинация $\lambda a_s + \mu A_s$ сумм геодезических и чебышевских векторов всех сетей n-ткани равна нулю тогда и только тогда, когда вектор G_a равен нулю.*

Согласно [4], преобразование связности Вейле, при котором основной тензор g_{is} остается неизменным, а дополнительный вектор T_k изменяется, называется конформным.

Пусть σ — конформное преобразование W_2, после которого произвольная n-ткань $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ переходит в $(\underset{1}{\overset{*}{v}}, \underset{2}{\overset{*}{v}}, \ldots, \underset{n}{\overset{*}{v}})$ с геодезическими кривизнами линий $(\underset{i}{\overset{*}{v}})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — $\underset{i}{\overset{*}{z}}$, с чебышевскими кривизнами линий $(\underset{k}{\overset{*}{v}})$ сетей $(\underset{k}{\overset{*}{v}}, \underset{l}{\overset{*}{v}})$, $k, l = 1, 2, \ldots n$, $k < l$, — $\underset{k,l}{\overset{*}{r}}$, с геодезическими и чебышевскими векторами сетей $(\underset{k}{\overset{*}{v}}, \underset{l}{\overset{*}{v}})$, соответственно $\underset{k,l}{\overset{*}{\alpha}}_s$, $\underset{k,l}{\overset{*}{a}}_s$.

Из [5] известно, что

$$\overset{*}{\underset{i}{r}} = \underset{i}{r} - \widetilde{p}_k \underset{i}{v}^k, \quad \overset{*}{\underset{k,l}{r}} = \underset{k,l}{r} - \widetilde{p}_s \underset{k}{v}^s, \tag{16}$$

где $p_s = \overset{*}{T}_s - T_s$ — вектор конформного преобразования σ. На основании (1), (4) (16), получаем

$$\lambda \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=2\\ l>k}}^{n} \overset{*}{\underset{k,l}{\alpha_s}} + \mu \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=2\\ l>k}}^{k} \overset{*}{\underset{k,l}{\alpha_s}} = \lambda \sum_{l=1}^{n} (\underset{l}{r} - \widetilde{p}_i \underset{l}{v}^i) \underset{l}{v_s} \underset{l}{\zeta} \tag{17}$$

$$+ \mu \sum_{l=1}^{n} \underset{l}{v_s} \sum_{m=1}^{n} \frac{\underset{l,m}{r} - \widetilde{p}_i \underset{l}{v}^i}{\sin^2 \underset{l,m}{\omega}} = \lambda \alpha_s + \mu A_s - (\lambda+\mu) \widetilde{p}_i \sum_{l=1}^{n} \underset{l}{v}^i \underset{l}{v_s} \underset{l}{\zeta}.$$

Согласно [5], (9) и (16), находим следующий вид вектора $\overset{*}{G}_a = \sigma(G_a)$:

$$\overset{*}{G}_a = G_a - \frac{(\lambda+\mu)p^m}{\eta} \sum_{i=1}^{n} \underset{i}{\widetilde{v}_a} \underset{i}{v}^s \underset{i}{\zeta} \sum_{l=1}^{n} \underset{l}{\widetilde{v}_m} \underset{l}{v_s} \underset{l}{\zeta}.$$

Используя известное из [1] равенство $P_{is\cdot}^{\cdot\cdot} - P_{si\cdot}^{\cdot\cdot} = \varepsilon_{is} P_{k\cdot\cdot}^{\cdot k\cdot}$ и учитывая, что $\underset{l}{\widetilde{v}_k} \underset{i}{\widetilde{v}}^k = \sin \underset{l,i}{\omega}$, устанавливаем

$$\overset{*}{G}_a = G_a - (\lambda+\mu) p^m \varepsilon_{ma} = G_a - (\lambda+\mu) p_a. \tag{18}$$

Дискриминантный бивектор ε_{is} ($\varepsilon_{12} = \sqrt{g}$) и его взаимный ε^{is} мы использовали в качестве вектора.

Из теоремы 1 и равенства (18) следует

Теорема 2. *Всякая связность Вейля двух измерений может быть единственным способом преобразована конформно так, чтобы после этого конформного преобразования данная n-ткань стала n-тканью, для которой линейная комбинация сумм геодезических и чебышевских векторов всех ее сетей равна нулю. Вектором этого конформного преобразования служит вектор* $p_k = G_k$.

Результаты настоящей работы являются обобщением результатов, полученных в работах [6, § 100; 7—9].

Когда $n=2$, $\lambda=1$ и $\mu=0$ или $n=2$, $\lambda=0$ и $\mu=1$, то из теоремы 2 следуют теоремы Нордена [6, § 100], а из (9) получаются известные конформно-геодезический и конформно-чебышевский векторы сети в W_2, которые введены Норденым [6, § 100]. В нашей работе получается то представление этих же векторов, которое найдено Яфаровым [3]. Это нам позволяет ввести следующие определения:

Определение 1. *Вектор* Γ_a, *которой получается из вектора* G_a *при* $\lambda=1$ *и* $\mu=0$, *т. е.*

$$\Gamma_a = \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^{n} \underset{i}{\widetilde{v}_a} \underset{i}{v}^s \underset{i}{\zeta} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=2\\ l>k}}^{n} \underset{k,l}{\alpha_s}.$$

называем конформно-геодезическим вектором n-ткани $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \dots, \underset{n}{v})$ *в двумерном пространстве Вейля.*

Определение 2. *Вектор* X_a, *который получается из вектора* G_a *при* $\lambda=0$ *и* $\mu=0$, *т. е.*

$$X_a = \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^{n} \underset{i}{\tilde{v}_a} \underset{i}{v^s} \underset{i}{\zeta} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=2 \\ l>k}}^{n} \underset{k,l}{a_s},$$

называем конформно-чебышевский вектор n-ткани $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ *в двумерном пространстве Вейля.*

Когда $n=3$, $\lambda=1$, $\mu=0$ или $n=3$, $\lambda=0$, $\mu=1$, получаются результаты, установленные в [7].

Пусть не рассматриваются все сети n-ткани $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$, а только сети $(\underset{i}{v}, \underset{i+1}{v})$, где индекс i удовлетворяет равенствам

$$i+1 = \begin{cases} i+1, & \text{если } i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\ 1, & \text{если } i = n. \end{cases}$$

При $\lambda=1$ и $\mu=0$ получаются результаты, полученные в [8], а при $\lambda=0$ и $\mu=1$ — результаты из [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Шуликовский. Классическая дифференциальная геометрия. Москва, ГИФМЛ, 1963.
2. Г. З. Златанов. Сети в двумерном пространстве Вейля. *Докл. БАН*, **29**, 1976, № 5, 619—622.
3. Ш. А. Яфаров. О сетях пространства Вейля двух измерений. *Изв. вузов, сер. Матем.*, 1977, № 12, 183—187.
4. А. П. Норден. О структуре связности на многообразии прямых неевклидова пространства. *Изв. вузов, сер. Матем.*, 1972, № 12, 81—94.
5. Г. З. Златанов, Б. Б. Царева. Конформное преобразование сетей в двумерном пространстве Вейля. *Докл. БАН*, **31**, 1978, № 1, 15—17.
6. А. П. Норден. Пространства аффинной связности. Москва, ГРФМЛ, 1976.
7. Б. Б. Царева. Върху конформната геометрия на три-тъканите в двумерно пространство на Вайл. *Научни трудове на Пловдивския университет*, **21**, 1981, кн. 1, Матем.
8. Б. Б. Царева. О конформной геометрии n-тканей в двумерном пространстве Вейля. *Докл. БАН*, **37**, 1984, № 4.
9. В. В. Tcareva. Géométrie conforme de n-tissus dans un espace bilatéral de Weyl. *Proc. of VIII Balc. Congress of Mathem.* (in press).

Пловдивский университет
4000 Пловдив Болгария

Поступила 23. I. 1984