PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ОБОБЩЕННОМ БИАКСИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ $P_4^{1,2}$

РУМЯНА Т. КОЖУХАРОВА

В четырехмерном проективном пространстве группа коллинеаций, сохраняющих прямую и скрещенную с ней плоскость, определяет обобщенное биаксиальное пространство $P_4^{1,2}$. В $P_4^{1,2}$ рассматривается поверхность самого общего класса. С каждой ее точкой связан инвариантный репер, причем максимально использована основная особенность пространства. Получены основные формулы дифференциальной геометрии поверхностей.

1. Пусть в вещественном четырехмерном проективном пространстве P_4 фиксированы одна вещественная прямая j и скрещенная с ней вещественная плоскость k, Каждую неособенную вещественную коллинеацию в P_4, сохраняющую j и k, будем называть B-коллинеацией. Все B-коллинеации образуют 12-параметрическую подгруппу $G_4^{1,2}$ группы вещественных коллинеаций в P_4. Геометрию Клейна, основной группой которой является $G_4^{1,2}$, будем называть геометрией обобщенного биаксиального пространства $P_4^{1,2}$. Будем рассматривать в P_4 только вещественные точки, прямые, вообще линейные подпространства, вещественные проективные координатные системы, вещественные коллинеации и др. Будем пользоваться тем аппаратом исследования, каким пользовались в [1—4; 6—10]. Терминология такая же, как и в [8—11].

Прямую j будем называть абсолютной прямой пространства $P_4^{1,2}$, а плоскость k — абсолютной плоскостью пространства $P_4^{1,2}$. Каждую точку из j или k будем называть бесконечной точкой соответственно первой или второй системы, а каждую гиперплоскость, содержащую j или k — бесконечной гиперплоскостью первой или второй системы. Остальные точки и гиперплоскости будем называть конечными.

Каждая прямая (соотв. плоскость), отличная от j (соотв. k), является прямой (соотв. плоскостью) одного и только одного из следующих типов прямых (соотв. плоскостей): а) первый тип — прямые (соотв. плоскости), неинцидентные с бесконечными точками (соотв. гиперплоскостями); б) второй тип — прямые (соотв. плоскости), инцидентные с по одной бесконечной точкой (соотв. гиперплоскостью) из каждой системы; в) третий тип — прямые (соотв. плоскости) инцидентные с одной и только с одной бесконечной точкой (соотв. гиперплоскостью), и она из первой (соотв. второй) системы; г) четвертый тип — прямые (соотв. плоскости), инцидентные с одной и только с одной бесконечной точкой (соотв. гиперплоскостью), и она из второй (соотв. первой) системы; д) пятый тип — прямые (соотв. плоскости), инцидентные только с бесконечными точками (соотв. гиперплоскостями), и они из второй (соотв. первой) системы. Через каждую конечную точку проходит одна и только одна прямая второго типа. Общие точки этой прямой с j и k будем называть соответственно первой и второй проекцией конечной точки.

Если $x_l=(x_l^1, x_l^2)$ и $y_\lambda=(y_\lambda^1, y_\lambda^2, y_\lambda^3)$ — соответственно две упорядоченные пары и три упорядоченные тройки, будем использовать обозначения

(1) $$x_1x_2:=\det(x_l^m),\quad y_1y_2y_3:=\det(y_\lambda^\mu).$$

Во всем изложении для индексов $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ предполагаем: $l, m, n\in\{1, 2\}$, $\lambda, \mu, \nu\in\{1; 2; 3\}$.

Каждую проективную координатную систему $(A_1, A_2; B_1, B_2, B_3)$ в P_4, для которой первые ее две вершины A_1 и A_2 — бесконечные точки из первой системы, а остальные три вершины B_1, B_2, B_3 — бесконечные точки из второй системы, будем называть B-репером и будем обозначать $(A; B)$. Ясно, что единичная точка на $(A; B)$ — конечная. Семейство B-реперов в P_4 зависит от 12 независимых параметров. В наших рассмотрениях в дальнейшем будем использовать только B-реперы. Обозначим через $(x; y)=(x^1, x^2; y^1, y^2, y^3)$ координаты произвольной точки в P_4 относительно одного B-репера $(A; B)$. Произвольная B-коллинеация имеет по отношению к $(A; B)$ представление

(2) $$\rho\bar{x}^l=\alpha_m^l x^m,\quad \rho\bar{y}^\lambda=\beta_\mu^\lambda y^\mu,$$

где $\rho\neq0$, $\det(\alpha_m^l)\neq0$, $\det(\beta_\mu^\lambda)\neq0$. Конечно, (2) являются формулами замены B-репера $(A; B)$ новым B-репером $(\bar{A}; \bar{B})$. Участвующий в (2) множитель пропорциональности можем считать включенным в координатах точки $(\bar{x}; \bar{y})$. Тогда (2) принимают вид

(3) $$\bar{x}^l=\alpha_m^l x^m,\quad \bar{y}^\lambda=\beta_\mu^\lambda y^\mu$$

при $\det(\alpha_m^l)\neq0$, $\det(\beta_\mu^\lambda)\neq0$. Будем говорить, что (3) определяют B-замену в $P_4^{1,2}$.

2. Пусть даны пять вещественнозначных функций

(4) $$x^l=x^l(u, v),\quad y^\lambda=y^\lambda(u, v)$$

вещественных независимых переменных u и v, изменяющихся в одной вещественной области U. Для этих функций предполагаем существование в U непрерывных частных производных для каждой пары $(u, v)\in U$ до необходимого порядка в зависимости от характера рассматриваемых вопросов.

По отношению к фиксированному B-реперу $(A^0; B^0)$ рассматриваем точку M с координатами

(5) $$(x(u, v); y(u, v))=(x^1(u, v), x^2(u, v); y^1(u, v), y^2(u, v), y^3(u, v)).$$

Предполагаем, что точка (5) — конечная для каждой пары $(u, v)\in U$, т. е. для $(u, v)\in U$ выполнены неравенства

(6) $$x(u, v)\neq0,\quad y(u, v)\neq0.$$

Когда u и v меняются в U, точка (5) опишет двумерную поверхность S, состоящую из конечных точек.

Все геометрические объекты (точки, прямые, плоскости, линии и др.), величины, свойства и др., которые будем связывать с поверхностью, будем выражать посредством функций (4) и их частных производных. Для того, чтобы объекты, величины, свойства и др. принадлежали рассматриваемой биаксиальной геометрии, они должны обладать инвариантностью всех следующих трех видов:

А) B-инвариантност относительно произвольной B-замены (3);

Б) D-инвариантность относительно D-замены координат текущей точки поверхности S новыми координатами $(\bar{x}(u, v); \bar{y}(u, v))$ следующим образом:

(7) $$\bar{x}=\alpha x,\quad \bar{y}=\alpha y,$$

где $\alpha=\alpha(u, v)$ — ненулевая гладкая (до необходимого порядка) функция $(u, v)\in U$;

В) P-инвариантность относительно P-замены параметров u и v новым параметрами $\bar{u}$ и $\bar{v}$:

(8) $$u = u(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = v(\bar{u}, \bar{v}),$$

где $u(\bar{u}, \bar{v})$ и $v(\bar{u}, \bar{v})$ — функции, определенные в области $\bar{U} \subset R^2$ при обычных предположениях, в частности, когда функциональный определитель $\partial(u, v)/\partial(\bar{u}, \bar{v}) = u_{\bar{u}} v_{\bar{v}} - v_{\bar{u}} u_{\bar{v}} \neq 0$ для $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{U}$.

3. С каждой точкой поверхности S свяжем произвольный B-репер $(A; B)$. Будем называть его подвижным репером для S. Он зависить от $p \leq 14$ параметров — параметров u и v, которые называются главными параметрами, и параметров семейства B-реперов, которые называются вторичными параметрами.

Пусть $(A^0; B^0)$ — фиксированный B-репер. Координаты вершин A_l и B_λ подвижного A-репера $(A; B)$ для S обозначим соответственно через $(x_l(u, v); 0)$ и $(0; y_\lambda(u, v))$. Частные производные функций x_l и y_λ по u и v вследствие выбора $(A; B)$ можем записать в виде

(9) $$x_{lu} = a_l^m x_m, \quad x_{lv} = b_l^m x_m, \quad y_{\lambda u} = c_\lambda^\mu y_\mu, \quad y_{\lambda v} = d_\lambda^\mu y_\mu,$$

где

(10) $$a_l^m = a_l^m(u, v), \; b_l^m = b_l^m(u, v), \; c_\lambda^\mu = c_\lambda^\mu(u, v), \; d_\lambda^\mu = d_\lambda^\mu(u, v)$$

являются гладкими функциями главных параметров в области U. Для них находим выражения

$$a_1^1 = \frac{x_{1u} x_2}{x_1 x_2}, \quad a_1^2 = \frac{x_1 x_{1u}}{x_1 x_2},$$

$$a_2^1 = \frac{x_{2u} x_2}{x_1 x_2}, \quad a_2^2 = \frac{x_1 x_{2u}}{x_1 x_2},$$

$$b_1^1 = \frac{x_{1v} x_2}{x_1 x_2}, \quad b_1^2 = \frac{x_1 x_{1v}}{x_1 x_2},$$

$$b_2^1 = \frac{x_{2v} x_2}{x_1 x_2}, \quad b_2^2 = \frac{x_1 x_{2v}}{x_1 x_2},$$

(11) $$c_1^1 = \frac{y_{1u} y_2 y_3}{y_1 y_2 y_3}, \quad c_1^2 = -\frac{y_{1u} y_1 y_3}{y_1 y_2 y_3}, \quad c_1^3 = \frac{y_{1u} y_1 y_2}{y_1 y_2 y_3},$$

$$c_2^1 = \frac{y_{2u} y_2 y_3}{y_1 y_2 y_3}, \quad c_2^2 = -\frac{y_{2u} y_1 y_3}{y_1 y_2 y_3}, \quad c_2^3 = \frac{y_{2u} y_1 y_2}{y_1 y_2 y_3},$$

$$c_3^1 = \frac{y_{3u} y_2 y_3}{y_1 y_2 y_3}, \quad c_3^2 = -\frac{y_{3u} y_1 y_3}{y_1 y_2 y_3}, \quad c_3^3 = \frac{y_{3u} y_1 y_2}{y_1 y_2 y_3},$$

$$d_1^1 = \frac{y_{1v} y_2 y_3}{y_1 y_2 y_3}, \quad d_1^2 = -\frac{y_{1v} y_1 y_3}{y_1 y_2 y_3}, \quad d_1^3 = \frac{y_{1v} y_1 y_2}{y_1 y_2 y_3},$$

$$d_2^1 = \frac{y_{2v} y_2 y_3}{y_1 y_2 y_3}, \quad d_2^2 = -\frac{y_{2v} y_1 y_3}{y_1 y_2 y_3}, \quad d_2^3 = \frac{y_{2v} y_1 y_2}{y_1 y_2 y_3},$$

$$d_3^1 = \frac{y_{3v} y_2 y_3}{y_1 y_2 y_3}, \quad d_3^2 = -\frac{y_{3v} y_1 y_3}{y_1 y_2 y_3}, \quad d_3^3 = \frac{y_{3v} y_1 y_2}{y_1 y_2 y_3}.$$

Из равенств

$$x_{luv}=x_{lvu},\quad y_{\lambda uv}=y_{\lambda vu}, \tag{12}$$

которые выполняются для любой $(u, v)\in U$, имея в виду (9) и линейную независимость как пары функций x_1, x_2, так и тройки функций y_1, y_2, y_3, которая выражается неравенствами

$$x_1x_2\neq 0,\quad y_1y_2y_3\neq 0, \tag{13}$$

получаем следующую систему частных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
a^1_{1v}-b^1_{1u}&=a^1_2b^2_1-a^2_1b^1_2,\\
a^2_{1v}-b^2_{1u}&=a^2_1(b^1_1-b^2_2)+b^2_1(a^2_2-a^1_1),\\
a^1_{2v}-b^1_{2u}&=a^1_2(b^2_2-b^1_1)+b^1_2(a^1_1-a^2_2),\\
a^2_{2v}-b^2_{2u}&=b^1_2a^2_1-a^1_2b^2_1,\\
c^1_{1v}-d^1_{1u}&=d^2_1c^1_2-c^2_1d^1_2+d^3_1c^1_3-c^3_1d^1_3,\\
c^2_{1v}-d^2_{1u}&=c^2_1(d^1_1-d^2_2)+d^2_1(c^2_2-c^1_1)+d^3_1c^2_3-c^3_1d^2_3,\\
c^3_{1v}-d^3_{1u}&=c^3_1(d^1_1-d^3_3)+d^3_1(c^3_3-c^1_1)+d^2_1c^3_2-c^2_1d^3_2,\\
c^1_{2v}-d^1_{2u}&=c^1_2(d^2_2-d^1_1)+d^1_2(c^1_1-c^2_2)+d^3_2c^1_3-c^3_2d^1_3,\\
c^2_{2v}-d^2_{2u}&=d^1_2c^2_1-c^1_2d^2_1+d^3_2c^2_3-c^3_2d^2_3,\\
c^3_{2v}-d^3_{2u}&=d^3_2(c^3_3-c^2_2)+c^3_2(d^2_2-d^3_3)+d^1_2c^3_1-c^1_2d^3_1,\\
c^1_{3v}-d^1_{3u}&=d^1_3(c^1_1-c^3_3)+c^1_3(d^3_3-d^1_1)+d^2_3c^1_2-c^2_3d^1_2,\\
c^2_{3v}-d^2_{3u}&=d^2_3(c^2_2-c^3_3)+c^2_3(d^3_3-d^2_2)+d^1_3c^2_1-c^1_3d^2_1,\\
c^3_{3v}-d^3_{3u}&=d^1_3c^3_1-c^1_3d^3_1+d^2_3c^3_2-c^2_3d^3_2.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Система (14) дает условия интегрируемости производных. Функции, участвующие в ней, определяют однозначно поверхность в $P^{1,2}_4$ до B-коллинеации.

Остановимся на том, как изменятся функции (10) при B-, D- и P-заменах.

А) B-замена. При этой замене функции $x^m_l(u, v)$, $y^\mu_\lambda(u, v)$ заменяются новыми $\overline{x}^m_l(u, v)$, $\overline{y}^\lambda_\mu(u, v)$ переменных $(u, v)\in U$, причем выполняются

$$\overline{x}^l_n=\alpha^l_m x^m_n,\quad \overline{y}^\lambda_\nu=\beta^\lambda_\mu y^\mu_\nu, \tag{15}$$

где α^l_m и β^λ_μ — постоянные, для которых $\det(\alpha^l_m)\neq 0$, $\det(\beta^\lambda_\mu)\neq 0$. При помощи (15) можем найти, как трансформируются произведения x_1x_2, $x_{1u}x_2, \ldots, y_1y_2y_3$, $y_{1u}y_2y_3, \ldots$, фигурирующие в (11) при B-замене. Например,

$$\overline{x}_1\overline{x}_2=\det(\alpha^l_m)\,.\,x_1x_2,\quad \overline{x}_{1u}\overline{x}_2=\det(\alpha^l_m)\,.\,x_{1u}x_2,$$

$$\overline{y}_1\overline{y}_2\overline{y}_3=\det(\beta^\lambda_\mu)\,.\,y_1y_2y_3,\quad \overline{y}_{1u}\overline{y}_2\overline{y}_3=\det(\beta^\lambda_\mu)\,.\,y_{1u}y_2y_3.$$

Тогда

$$\overline{a}^1_1=\frac{\overline{x}_{1u}\overline{x}_2}{\overline{x}_1\overline{x}_2}=\frac{x_{1u}x_2}{x_1x_2}=a^1_1,\quad \overline{c}^1_1=\frac{\overline{y}_{1u}\overline{y}_2\overline{y}_3}{\overline{y}_1\overline{y}_2\overline{y}_3}=\frac{y_{1u}y_2y_3}{y_1y_2y_3}=c^1_1.$$

Аналогичным образом поступаем со всеми функциями из (10). Окончательно получаем

(16) $$\bar{a}_l^m = a_l^m, \quad \bar{b}_l^m = b_l^m, \quad \bar{c}_\lambda^\mu = c_\lambda^\mu, \quad \bar{d}_\mu^\lambda = d_\lambda^\mu,$$

что означает, что функции (10)—B-инвариантные.

Б) D-замена. Теперь функции $x_l(u, v)$, $y_\lambda(u, v)$ заменяются новыми функциями $\bar{x}_l(u, v)$, $\bar{y}_\lambda(u, v)$ переменных $(u, v) \in U$:

(17) $$\bar{x}_l = \rho_l x_l, \quad \bar{y}_\lambda = \sigma_\lambda y_\lambda,$$

где $\rho_l = \rho_l(u, v) \neq 0$, $\sigma_\lambda = \sigma_\lambda(u, v) \neq 0$ — гладкие функции $(u, v) \in U$. При этой замене (9) имеют вид

(18) $$\bar{x}_{lu} = \bar{a}_l^m \bar{x}_m, \quad \bar{x}_{lv} = \bar{b}_l^m \bar{x}_m,$$
$$\bar{y}_{\lambda u} = \bar{c}_\lambda^\mu \bar{y}_\mu, \quad \bar{y}_{\lambda v} = \bar{d}_\lambda^\mu \bar{y}_\mu.$$

Из (17) имеем $\bar{x}_{lu} = \rho_{lu} x_l + \rho_l x_{lu}$. После замены здесь $\bar{x}_{lu}$ из (18), x_{lu} из (9) и используя (17), получаем $\bar{a}_l^m \rho_m x_m = \rho_{lu} x_l + \rho_l a_l^m x_m$. Отсюда при $l=1$, используя (13) находим $\bar{a}_1^1 = a_1^1 + \rho_{1u}/\rho_1$, $\bar{a}_1^2 = a_1^2 \rho_1/\rho_2$. Аналогично получаем представления всех функций (10) при D-замене:

(19)
$$\bar{a}_1^1 = a_1^1 + \frac{\rho_{1u}}{\rho_1}, \quad \bar{a}_1^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} a_1^2,$$
$$\bar{a}_2^1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} a_2^1, \quad \bar{a}_2^2 = a_2^2 + \frac{\rho_{2u}}{\rho_2},$$
$$\bar{b}_1^1 = b_1^1 + \frac{\rho_{1v}}{\rho_1}, \quad \bar{b}_1^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} b_1^2,$$
$$\bar{b}_2^1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} b_2^1, \quad \bar{b}_2^2 = b_2^2 + \frac{\rho_{2v}}{\rho_2},$$
$$\bar{c}_1^1 = c_1^1 + \frac{\sigma_{1u}}{\sigma_1}, \quad \bar{c}_1^2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} c_1^2, \quad \bar{c}_1^3 = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} c_1^3,$$
$$\bar{c}_2^1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} c_2^1, \quad \bar{c}_2^2 = c_2^2 + \frac{\sigma_{2u}}{\sigma_2}, \quad \bar{c}_2^3 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} c_2^3,$$
$$\bar{c}_3^1 = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} c_3^1, \quad \bar{c}_3^2 = \frac{\sigma_3}{\sigma_2} c_3^2, \quad \bar{c}_3^3 = c_3^3 + \frac{\sigma_{3u}}{\sigma_3},$$
$$\bar{d}_1^1 = d_1^1 + \frac{\sigma_{1v}}{\sigma_1}, \quad \bar{d}_1^2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} d_1^2, \quad \bar{d}_1^3 = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} d_1^3,$$
$$\bar{d}_2^1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} d_2^1, \quad \bar{d}_2^2 = d_2^2 + \frac{\sigma_{2v}}{\sigma_2}, \quad \bar{d}_2^3 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} d_2^3,$$
$$\bar{d}_3^1 = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} d_3^1, \quad \bar{d}_3^2 = \frac{\sigma_3}{\sigma_2} d_3^2, \quad \bar{d}_3^3 = d_3^3 + \frac{\sigma_{3v}}{\sigma_3}.$$

Из (19) находим

$$\bar{a}_1^2 \bar{a}_2^1 = a_1^2 a_2^1, \quad \bar{b}_1^2 \bar{b}_2^1 = b_1^2 b_2^1, \quad \bar{c}_1^2 \bar{c}_2^1 = c_1^2 c_2^1,$$
$$\bar{c}_1^3 \bar{c}_3^1 = c_1^3 c_3^1, \quad \bar{c}_2^3 \bar{c}_3^2 = c_2^3 c_3^2, \quad \bar{d}_1^2 \bar{d}_2^1 = d_1^2 d_2^1, \quad \bar{d}_1^3 \bar{d}_3^1 = d_1^3 d_3^1,$$

$$\frac{\overline{b}_1^2}{\overline{a}_1^2}=\frac{b_1^2}{a_1^2},\quad \frac{\overline{d}_1^3}{\overline{c}_1^3}=\frac{d_1^3}{c_1^3},\quad \frac{\overline{c}_1^2}{\overline{d}_1^2}=\frac{c_1^2}{d_1^2},\quad \frac{\overline{c}_2^3}{\overline{d}_2^3}=\frac{c_2^3}{d_2^3},\quad \frac{\overline{a}_2^1}{\overline{b}_2^1}=\frac{a_2^1}{b_2^1},$$

что показывает, что величины

$$(20)\qquad a_1^2a_2^1,\ b_1^2b_2^1,\ c_1^2c_2^1,\ c_1^3c_3^1,\ c_2^3c_3^2,\ d_1^2d_2^1,\ d_1^3d_3^1,\ \frac{b_1^2}{a_1^2},\ \frac{d_1^3}{c_1^3},\ \frac{c_1^2}{d_1^2},\ \frac{c_2^3}{d_2^3},\ \frac{a_2^1}{b_2^1}$$

являются D-инвариантными величинами.

В) P-замена. При этой замене функции $x_l(u, v)$, $y_\lambda(u, v)$ и (10) переменных $(u, v)\in U$ заменяются новыми функциями переменных $(\overline{u}, \overline{v})\in \overline{U}$:

$$\overline{x}_l=\overline{x}_l(\overline{u}, \overline{v})=x_l(u(\overline{u}, \overline{v}),\ v(\overline{u}, \overline{v})),\ \overline{y}_\lambda=\overline{y}_\lambda(\overline{u}, \overline{v})=y_\lambda(u(\overline{u}, \overline{v}),\ v(\overline{u}, \overline{v})),$$

$$(21)\qquad \overline{a}_l^m=\overline{a}_l^m(\overline{u}, \overline{v})=a_l^m(u(\overline{u}, \overline{v}),\ v(\overline{u}, \overline{v})),\quad \overline{b}_l^m=\overline{b}_l^m(\overline{u}, \overline{v})=b_l^m(u(\overline{u}, \overline{v}),\ v(\overline{u}, \overline{v})),$$

$$\overline{c}_\lambda^\mu=\overline{c}_\lambda^\mu(\overline{u}, \overline{v})=c_\lambda^\mu(u(\overline{u}, \overline{v}),\ v(\overline{u}, \overline{v})),\ \overline{d}_\lambda^\mu=\overline{d}_\lambda^\mu(\overline{u}, \overline{v})=d_\lambda^\mu(u(\overline{u}, \overline{v}),\ v(\overline{u}, \overline{v})).$$

Из (21) имеем $\overline{x}_{l\overline{u}}=x_{lu}u_{\overline{u}}+x_{lv}v_{\overline{u}}$. После замены x_{lu}, x_{lv}, $\overline{x}_{l\overline{u}}$ на $a_l^m x_m$, $b_l^m x_m$, $\overline{a}_l^m\overline{x}_m$ и используя (21) и (13), получаем $\overline{a}_l^m=a_l^m u_{\overline{u}}+b_l^m v_{\overline{u}}$. Аналогичным образом находим все формулы трансформации функций (10) при рассматриваемой замене:

$$(22)\qquad \begin{gathered}\overline{a}_l^m=a_l^m u_{\overline{u}}+b_l^m v_{\overline{u}},\quad \overline{b}_l^m=a_l^m u_{\overline{v}}+b_l^m v_{\overline{v}},\\ \overline{c}_\lambda^\mu=c_\lambda^\mu u_{\overline{u}}+d_\lambda^\mu v_{\overline{u}},\quad \overline{d}_\lambda^\mu=c_\lambda^\mu u_{\overline{v}}+d_\lambda^\mu v_{\overline{v}}.\end{gathered}$$

4. В [9] с помощью относительных инвариантов J_i, $i\in\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, множество поверхностей в $P_4^{1,2}$ разбивается на семь непересекающихся B-, D- и P-инвариантных классов поверхностей Σ_s, $s\in\{1;\dots;\ 7\}$. В [10] каждый из этих классов геометрически интерпретирован. Поверхность класса Σ_1 является самой общей поверхностью в $P_4^{1,2}$. В дальнейшем будем рассматривать такую поверхность S. Для нее для $(u, v)\in U$ выполнены неравенства

$$(23)\qquad J_1=(xx_u)^2+(xx_v)^2+(x_ux_v)^2\neq 0,\quad J_2=yy_uy_v\neq 0.$$

Не ограничивая общность, можем предполагать, что для $(u, v)\in U$

$$(24)\qquad x_ux_v\neq 0.$$

Пусть подвижный B-репер $(A;\ B)$, который связываем с произвольной точкой M на поверхности S, таков, что A_1+B_1 — точка M на S. Тогда A_1 — первая, а B_1 — вторая проекция точки M поверхности S, и

$$(25)\qquad x_1=x,\quad y_1=y,\quad \rho_1=\sigma_1.$$

Условие (24) и второе условие (23) после использования (25), (9) и (13) примут вид

$$(26)\qquad a_1^1b_1^2-a_1^2b_1^1\neq 0,\quad c_1^2d_1^3-c_1^3d_1^2\neq 0.$$

Рассматриваемая поверхность может иметь кривые только из классов K_i, $i\in\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, [12]. При этом через произвольную точку $M\in S$ существует на S единственная кривая c_1 класса K_2 или K_4 и единственная кривая c_2, соприкасающаяся в M плоскость которой и соприкасающаяся плоскость кривой c_1 в M лежат в одной гиперплоскости [12]. В [11] c_1 и c_2 названы соответственно первой и второй основной линией для S. Дифференциальное уравнение c_1 имеет вид

$$xx_u\,.\,\dot{u}+xx_v\,.\,\dot{v}=0, \tag{27}$$

а кривой c_2 —

$$\begin{aligned} & x\dot{x}\,.\,\ddot{y}\,y'y''-x\,\ddot{x}\,.\,\dot{y}\,y'y''+xx'.\,\dot{y}\,\ddot{y}\,y''-xx''.\,\dot{y}\,\ddot{y}\,y'+\dot{x}\,\ddot{x}\,.\,yy'y'' \\ & -\dot{x}\,x'.\,y\,\ddot{y}\,y''+\dot{x}\,x''.\,y\,\ddot{y}\,y'+\ddot{x}\,x'.\,y\,\dot{y}\,y''-\ddot{x}\,x''.\,y\dot{y}y'+x'x''.\,y\dot{y}\,\ddot{y}=0, \end{aligned} \tag{28}$$

где через „.“ (соотв. „′“) обозначена производная относительно параметра кривой c_1 (соотв. c_2).

В качестве v- и u-линии на поверхности S выбираем соответственно линии c_1 и c_2 на S через $M \in S$. Тогда из (27) и (28) получаем

$$xx_v=0, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} & xx_u\,.\,\dot{y}\,\ddot{y}y_{uu}-xx_{uu}\,.\,\dot{y}\,\ddot{y}y_u-\dot{x}\,x_u\,.\,y\,\ddot{y}y_{uu}+\dot{x}x_{uu}\,.\,y\ddot{y}\,y_u \\ & +\ddot{x}x_u\,.\,y\,\dot{y}\,y_{uu}-\ddot{x}x_{uu}\,.\,y\dot{y}y_u+y\dot{y}\,\ddot{y}\,.\,x_u x_{uu}=0. \end{aligned} \tag{30}$$

Вводим следующие новые обозначения:

$$\begin{gathered} l_1^1:=c_{1u}^1+c_1^1c_1^1+c_1^2c_2^1+c_1^3c_3^1, \quad l_1^2:=c_{1u}^2+c_1^1c_1^2+c_1^2c_2^2+c_1^3c_3^2, \\ l_1^3:=c_{1u}^3+c_1^1c_1^3+c_1^2c_2^3+c_1^3c_3^3, \quad g_1^1:=d_{1v}^1+d_1^1d_1^1+d_1^2d_2^1+d_1^3d_3^1, \\ g_1^2:=d_{1v}^2+d_1^1d_1^2+d_1^2d_2^2+d_1^3d_3^2, \quad g_1^3:=d_{1v}^3+d_1^1d_1^3+d_1^2d_2^3+d_1^3d_3^3, \\ m_1^1:=a_{1u}^1+a_1^1a_1^1+a_1^2a_2^1, \quad m_1^2:=a_{1u}^2+a_1^1a_1^2+a_1^2a_2^2, \\ n_1^1:=b_{1v}^1+b_1^1b_1^1+b_1^2b_2^1, \quad n_1^2:=b_{1v}^1+b_1^1b_1^2+b_1^2b_2^2. \end{gathered} \tag{31}$$

Выражаем произведения, участвующие в (29) и (30), посредством функций (10) и (31) и произведения x_1x_2 или $y_1\,y_2\,y_3$:

$$\begin{aligned} & xx_v=b_1^2\,.\,x_1x_2, \quad \dot{x}x_{uu}=\dot{v}(b_1^1m_1^2-b_1^2m_1^1)\,.\,x_1x_2, \\ & xx_u=a_1^2\,.\,x_1x_2, \quad \ddot{x}x_u=[(a_1^2\,n_1^1-a_1^1n_1^2)\,\dot{v}^2+(a_1^2\,b_1^1-a_1^1\,b_1^2)\,\ddot{v}]\,.\,x_1x_2, \\ & xx_{uu}=m_1^2\,.\,x_1x_2, \quad \ddot{x}x_{uu}=[(m_1^2n_1^1-m_1^1n_1^2)\,\dot{v}^2+(m_1^2\,b_1^1-m_1^1\,b_1^2)\,\ddot{v}]\,.\,x_1x_2, \\ & \dot{x}x_u=\dot{v}(a_1^2\,b_1^1-a_1^1\,b_1^2)\,.\,x_1x_2, \quad x_ux_{uu}=(a_1^1m_1^2-a_1^2m_1^1)\,.\,x_1x_2, \\ & \dot{y}\,\ddot{y}y_{uu}=\dot{v}^3\,[l_1^3\,(d_1^1g_1^2-d_1^2g_1^1)+l_1^2\,(d_1^3g_1^1-d_1^1\,g_1^3)+l_1^1\,(d_1^2g_1^3-d_1^3\,g_1^2)]\,.\,y_1\,y_2\,y_3, \\ & \dot{y}\,\ddot{y}\,y_u=\dot{v}^3\,[c_1^3\,(d_1^1g_1^2-d_1^2g_1^1)+c_1^2\,(d_1^3g_1^1-d_1^1\,g_1^3)+c_1^1\,[d_1^2\,g_1^3-d_1^3\,g_1^2]\,.\,y_1\,y_2\,y_3, \\ & y\ddot{y}y_{uu}=[(l_1^3\,g_1^2-l_1^2\,g_1^3)\,\dot{v}^2+(l_1^3d_1^2-l_1^2d_1^3)\,\ddot{v}]\,.\,y_1\,y_2\,y_3, \\ & y\,\ddot{y}\,y_u=[(c_1^3\,g_1^2-c_1^2g_1^3)\,\dot{v}^2+(c_1^3d_1^2-c_1^2d_1^3)\,\ddot{v}]\,.\,y_1\,y_2\,y_3, \\ & y\,\dot{y}y_{uu}=\dot{v}\,(d_1^2\,l_1^3-d_1^3\,l_1^2)\,.\,y_1\,y_2\,y_3, \quad y\,\dot{y}\,y_u=\dot{v}\,(d_1^2\,c_1^3-d_1^3\,c_1^2)\,.\,y_1\,y_2\,y_3, \\ & y\,\dot{y}\,\ddot{y}=\dot{v}^3\,(d_1^2\,g_1^3-d_1^3\,g_1^2)\,.\,y_1\,y_2\,y_3. \end{aligned} \tag{32}$$

Тогда условия (29) и (30), после принятия во внимание (32), (25) и (13), принимают соответственно вид

$$b_1^2=0, \tag{33}$$

$$\begin{aligned} &a_1^2[l_1^3(d_1^1g_1^2-d_1^2g_1^1)+l_1^2(d_1^3g_1^1-d_1^1g_1^3)+(l_1^1-m_1^1)(d_1^2g_1^3-d_1^3g_1^2)\\ &-m_1^2[c_1^3(d_1^1g_1^2-d_1^2g_1^1)+c_1^2(d_1^3g_1^1-d_1^1g_1^3)+(c_1^1-a_1^1)(d_1^2g_1^3-d_1^3g_1^2)]\\ &+(a_1^1b_1^2-a_1^2b_1^1)(l_1^3g_1^2-l_1^2g_1^3)+(b_1^1m_1^2-b_1^2m_1^1)(c_1^3g_1^2-c_1^2g_1^3)\\ &+(a_1^2n_1^1-a_1^1n_1^2)(d_1^2\,l_1^3-d_1^3\,l_1^2)-(m_1^2n_1^1-m_1^1n_1^2)(d_1^2c_1^3-d_1^3c_1^2)=0. \end{aligned} \tag{34}$$

Касательная плоскость η на поверхности S в ее точке M находится в самом общем положении относительно абсолюта рассматриваемого пространства — она первого типа, т. е. она скрещивается с абсолютной прямой и имеет единственную бесконечную точку из второй системы. Найдем эту точку. Произвольная точка на η имеет координаты

$$(\alpha x+\beta x_u+\gamma x_v\,;\ \alpha y+\beta y_u+\gamma y_v),\quad |\alpha|+|\beta|+|\gamma|\neq 0. \tag{35}$$

Бесконечная точка из второй системы на η получается для значений α, β, γ, удовлетворяющих

$$\alpha x+\beta x_u+\gamma x_v=0. \tag{36}$$

Умножая (36) на x_u и x_v, на основании (24), получаем

$$\alpha\,.\,xx_u+\gamma\,.\,x_vx_u=0,\quad \alpha\,.\,xx_v+\beta\,.\,x_ux_v=0,$$

откуда

$$\alpha=x_ux_v,\quad \beta=x_vx,\quad \gamma=xx_u.$$

Тогда бесконечная точка из второй системы на η имеет относительно фиксированного B-репера $(A^0;\ B^0)$ координаты

$$(0\,;\ x_ux_v\,.\,y+x_vx\,.\,y_u+xx_u\,.\,y_v). \tag{37}$$

Бесконечную точку из второй системы на η на поверхности S в M выбираем координатной вершиной B_2 подвижного B-репера $(A\,;\ B)$ для S. Тогда

$$y_2=x_ux_v\,.\,y+x_vx\,.\,y_u+xx_u\,.\,y_v. \tag{38}$$

Из (38), используя (25), (9), (13), (26), (29) и (33), получаем

$$b_1^1=d_1^1,\quad d_1^3=0. \tag{39}$$

Из представления

$$(A_1+B_1,\ B_2)^{\cdot}\,|_{c_1}=\dot{v}[(b_1^1+d_2^2)(A_1+B_1,\ B_2)+d_2^1(A_1+B_1,\ B_1)+d_2^3(A_1+B_1,\ B_3)]$$

следует, что поверхность S является линейчатой с линейчатыми образующими первых основных линий, проходящими через постоянную бесконечную точку из второй системы тогда и только тогда, когда $d_2^1=d_2^3=0$ для $(u,\ v)\in U$.

Если $\tau_1(c)$ — касательная прямая в M к линии c на S через M, то через нее проходит единственная бесконечная гиперплоскость $\pi(\tau_1(c))$ первой системы. Эту гиперплоскость называем проектирующей гиперплоскостью прямой $\tau_1(c)$. Общую прямую гиперплоскости $\pi(\tau(c))$ и абсолютной плоскости называем проекцией касательной прямой.

Проектирующая гиперплоскость $\pi(\tau_1(c_1))$ касательной прямой $\tau_1(c_1)$ кривой c_1 на S через $M \in S$ постоянна тогда и только тогда, когда проекция B_1B_2 касательной прямой $\tau_1(c_1)$ — постоянная, поскольку тогда $\pi(\tau_1(c))$ определена постоянными скрещенными прямыми j и B_1B_2. Пусть $N = B_1 + \lambda B_2$ — произвольная точка на прямой B_1B_2. Эта прямая постоянная тогда и только тогда, когда N лежит на ней. Для $\dot{N}$ имеем

$$\dot{N} = \dot{v}[(b_1^1 + d_2^1)B_1 + (d_1^2 + \lambda d_2^2 + \lambda_v)B_2 + \lambda d_2^3 . B_3],$$

откуда видно, что $\dot{N} \in B_1B_2$ (для произвольной $N \in B_1B_2$) тогда и только тогда, когда $d_2^3 = 0$. Итак, установили, что проектирующая гиперплоскость $\pi(\tau_1(c_1))$ касательной прямой $\tau_1(c_1)$ первой основной линии c_1 для S через $M \in S$ постоянна для каждой прямой $\tau_1(c_1)$ линейчатой поверхности R, образованной касательными прямыми c_1, тогда и только тогда, когда $d_2^3 = 0$ для $(u, v) \in U$.

При $d_2^3 = 0$ линейчатая поверхность R, образованная касательными первой основной линии для S через $M \in S$, лежит в постоянной гиперплоскости $\pi(\tau_1(c_1))$. При этом в $\pi(\tau_1(c_1))$ скрещенные прямые j и B_1B_2 неподвижны при произвольной B-коллинеации. В таком случае $\pi(\tau_1(c_1))$ является трехмерным биаксиальным пространством $\mathsf{P}_3^{1,1}$ с абсолютом (j, B_1B_2). Кроме того, первые проекции точек на c_1 совпадают с постоянной точкой A_1 на j. Следовательно, плоскость, определенная A_1 и B_1B_2, постоянна в $\mathsf{P}_3^{1,1}$, а линейчатая поверхность R плоска. Тогда ясно, что c_1 принадлежит классу K_4.

Далее, рассматриваем поверхности, для которых

(40)
$$d_2^3 \neq 0$$

для точек на первой основной линии для S через $M \in S$. Тогда несомнено, что бесконечная точка второй системы касательной к кривой c_1 в M описывает линию в абсолютной плоскости, когда M описывает c_1. При этом прямая B_1B_2 не является касательной для этой линии.

Когда точка $M \in S$ описывает вторую основную линию c_2 для S, ее вторая проекция описывает линию в k, касательная прямая t которой в B_1 имеет параметрическое уравнение

$$t:\quad T = (0;\ \alpha . y_1 + \beta . y_{1u}),\quad |\alpha| + |\beta| \neq 0.$$

Касательная прямая $\bar{t}$ в B_2 к линии, которую описывает бесконечная точка второй системы касательной прямой первой основной линии для S в $M \in S$, имеет параметрическое уравнение

$$\bar{t}:\quad \bar{T} = (0;\ \bar{\alpha} . y_2 + \bar{\beta} . y_{2v}),\quad |\bar{\alpha}| + |\bar{\beta}| \neq 0.$$

Тогда общая точка t и $\bar{t}$ имеет следующие координаты относительно $(A^0;\ B^0)$:

(41)
$$(0;\quad y_{2v}\, y_2\, y_{1u} . y + y_1\, y_2\, y_{2v} . y_u).$$

В качестве координатной вершины B_3 подвижного B-репера $(A;\ B)$ для S выбираем точку $t \cap \bar{t}$ с координатами (41). Тогда

(42)
$$y_3 = y_{2v}\, y_2\, y_{1u} . y + y_1\, y_2\, y_{2v} . y_u.$$

Из (42), учитывая (9), (25), (26) и (39), получаем

(43)
$$d_2^1 = 0,\quad c_1^2 = 0.$$

Обозначим через $\varkappa$ гиперплоскость, определенную касательной плоскостью η на S и касательной прямой к линии, описываемой бесконечной точкой второй системы касательной прямой к $c_1 \subset S$. Поскольку $\varkappa$ — конечная [8], то она имеет единственную бесконечную точку первой системы. Теперь переходим к ее нахождению. Произвольная точка на $\varkappa$ имеет координаты

$$(44) \qquad (\alpha x_1+\beta x_{1u};\ \alpha y_1+\beta y_{1u}+\gamma y_2+\delta y_{2v}), \quad |\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|\neq 0.$$

Бесконечная точка первой системы на $\varkappa$ получается для значений α, β, γ, δ, для которых

$$(45) \qquad \alpha y_1+\beta y_{1u}+\gamma y_2+\delta y_{2v}=0.$$

Умножаем (45) на $y_1 y_{1u}$, $y_1 y_2$ и на $y_2 y_{2v}$ и получаем соответственно

$$\gamma\cdot y_2 y_1 y_{1u}+\delta\cdot y_{2v} y_1 y_{1u}=0,$$
$$\beta\cdot y_{1u} y_1 y_2+\delta\cdot y_{2v} y_1 y_2=0,$$
$$\alpha\cdot y_1 y_2 y_{2v}+\beta\cdot y_{1u} y_2 y_{2v}=0,$$

откуда

$$\alpha=-y_{1u} y_2 y_{2v}, \quad \beta=y_{2v} y_1 y_2, \quad \gamma=-y_{2v} y_1 y_{1u}, \quad \delta=y_2 y_1 y_{1u}.$$

Тогда бесконечная точка первой системы на $\varkappa$ имеет относительно (A^0; B^0) координаты

$$(46) \qquad (-y_{1u} y_2 y_{2v}\cdot x_1+y_{2v} y_1 y_2\cdot x_{1u};\ 0).$$

Бесконечную точку первой системы на гиперплоскости $\varkappa$ выбираем в качестве координатной вершины A_2 подвижного B-репера (A; B) для S. Тогда

$$(47) \qquad x_2=-y_{1u} y_2 y_{2v}\cdot x_1+y_{2v} y_1 y_2\cdot x_{1u}.$$

Используя (9), находим

$$(48) \qquad y_{1u} y_2 y_{2v}=(c_1^1 d_2^3-c_1^3 d_2^1)\cdot y_1 y_2 y_3, \quad y_{2v} y_1 y_2=d_2^3\cdot y_1 y_2 y_3.$$

Из (47), учитывая (48), (9), (13), получаем

$$(49) \qquad c_1^3 d_2^1+d_2^3(a_1^1-c_1^1)=0.$$

Все полученные зависимости для функций (10), после переработки, принимают вид

$$(50) \qquad \begin{gathered} b_1^2=c_1^2=d_1^3=d_2^1=0, \quad a_1^1=c_1^1, \quad b_1^1=d_1^1, \\ c_1^3 c_3^1=a_1^2 a_2^1, \quad a_1^2 b_1^1 c_1^3 d_1^2 d_2^3\neq 0. \end{gathered}$$

Теперь D-инвариантные величины (20) имеют соответственно вид

$$a_1^2 a_2^1,\ 0,\ 0,\ a_1^2 a_2^1,\ c_2^3 c_3^2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{c_2^3}{d_2^3},\ \frac{a_2^1}{b_2^1}.$$

При допустимых P-замен получаем

$$(51) \qquad \bar a_1^2\,\bar a_2^1=a_1^2\,a_2^1(U_{\bar u})^2, \quad \bar c_2^3\,\bar c_3^2=c_2^3\,c_3^2(U_{\bar u})^2, \quad \frac{\bar c_2^3}{\bar d_2^3}=\frac{c_2^3}{d_2^3}\cdot\frac{U_{\bar u}}{V_{\bar v}}, \quad \frac{\bar a_2^1}{\bar b_2^1}=\frac{a_2^1}{b_2^1}\cdot\frac{U_{\bar u}}{V_{\bar v}}.$$

Тогда легко видно, что

$$(52) \qquad \frac{a_1^2\,a_2^1}{c_2^3\,c_3^2}, \quad \frac{a_2^1\,d_2^3}{b_2^1\,c_2^3}$$

являются B-, D- и P-инвариантными, т. е. они — абсолютные инварианты для поверхности.

Из (51) следует, что могут быть образованы следующие квадратические формы для поверхности:

$$a_1^2 a_2^1 du^2, \quad c_2^3 c_3^2 du^2.$$

Пусть теперь

(53) $$\rho_2 := \rho_1 a_1^2, \quad \sigma_2 := \sigma_1 d_1^2, \quad \sigma_3 := \sigma_1 c_1^3.$$

Тогда из (19) получаем равенства $\overline{a}_1^2 = \overline{c}_1^3 = \overline{d}_1^2 = 1$ и потом, обозначая $\overline{a}_1^2$, $\overline{c}_1^3$, $\overline{d}_1^2$ снова через a_1^2, c_1^3, d_1^2, имеем

(54) $$a_1^2 = c_1^3 = d_1^2 = 1.$$

Формулы (17) примут вид

(55) $$\overline{x}_i = \rho_1 x_i, \quad \overline{y}_\lambda = \rho_1 y_\lambda.$$

Из (55) находим следующую связь между определителем Δ координат вершин B-репера $(A; B)$ и определителем $\overline{\Delta}$ координат вершин B-репера, полученного из $(A; B)$ после допустимой D-замены (55):

(56) $$\overline{\Delta} = (\rho_1)^5 . \Delta.$$

Полагаем $\rho_1 := 1/\sqrt[5]{\Delta}$. Тогда $\overline{\Delta} = 1$, и обозначая $\overline{\Delta}$, снова через Δ имеем

(57) $$\Delta = x_1 x_2 . y_1 y_2 y_3 = 1.$$

Дифференцируем (57) по u:

$$(x_{1u} x_2 + x_1 x_{2u}) . y_1 y_2 y_3 + x_1 x_2 . (y_{1u} y_2 y_3 + y_1 y_{2u} y_3 + y_1 y_2 y_{3u}) = 0.$$

Из этого равенства, используя (9), получаем

(58) $$a_1^1 + a_2^2 + c_1^1 + c_2^2 + c_3^3 = 0.$$

Аналогично, дифференцируя (57) по v и используя (9), получаем

(59) $$b_1^1 + b_2^2 + d_1^1 + d_2^2 + d_3^3 = 0.$$

Из условий интегрируемости (14), используя (50) и (54), находим следующие связи:

(60) $$b_1^1 = b_2^2, \quad c_2^3 = d_3^3 - b_1^1, \quad d_3^1 = b_2^1 + c_2^1, \quad d_3^2 = c_2^2 - a_1^1.$$

Окончательно, все полученные зависимости для функций (10) записаны в (50), (54), (58), (59), (60). Из (9), имея в виду перечисленные выше равенства, получаем основные формулы дифференциальной геометрии поверхностей в $P_4^{1,2}$:

$$x_{1u} = a_1^1 x_1 + x_2, \quad x_{1v} = b_1^1 x_1,$$

$$x_{2u} = a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2, \quad x_{2v} = b_2^1 x_1 + b_1^1 x_1,$$

$$y_{1u} = a_1^1 y_1 + v_3, \quad y_{1v} = b_1^1 y_1 + y_2,$$

$$y_{2u} = c_2^1 y_1 + c_2^2 y_2 - (4b_1^1 + d_2^2) . y_3, \quad y_{2v} = d_2^2 y_2 + d_2^3 y_3,$$

$$y_{3u} = a_2^1 y_1 + c_3^2 y_2 - (2a_1^1 + a_2^2 + c_2^2) y_3,$$

$$y_{3v} = (b_2^1 + c_2^1) y_1 + (c_2^2 - a_1^1) y_2 - (3b_1^1 + d_2^2) y_3.$$

Коэффициенты, фигурирующие здесь, связаны между собой следующими зависимостями:

$$a^1_{1v}-b^1_{1u}=-b^1_2,\quad a^1_{2v}-b^1_{2u}=b^1_2(a^1_1-a^2_2),\quad a^2_{2v}-b^1_{1u}=b^1_2,$$

$$c^1_{2v}=c^1_2(d^2_2-b^1_1)+d^3_2a^1_2+(4b^1_1+d^2_2)(b^1_2+c^1_2),$$

$$c^2_{2v}-d^2_{2u}=d^3_2c^2_3+(4b^1_1+d^2_2)(c^2_2-a^1_1)-c^1_2,$$

$$(4b^1_1+d^2_2)_v+d^3_{2u}=d^3_2(2a^1_1+a^2_2+2c^2_2)+(4b^1_1+d^2_2)(2d^2_2+3b^1_1),$$

$$a^1_{2v}-(b^1_2+c^1_2)_u=a^1_2(-4b^1_1-d^2_2)+(b^1_2+c^1_2)(3a^1_1+a^2_2+c^2_2)+(c^2_2-a^1_1)c^1_2,$$

$$c^2_{3v}+(a^1_1-c^2_2)_u=(c^2_2-a^1_1)(2a^1_1+a^2_2+2c^2_2)-c^2_3(3b^1_1+2d^2_2)-a^1_2,$$

$$(2a^1_1+a^2_2+c^2_2)_v-(3b^1_1+d^2_2)_u=(c^2_2-a^1_1)(4b^1_1+d^2_2)+c^2_3d^3_2-b^1_2-c^1_2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Петканчин. Хиперболични роеве прави в двуосната геометрия. *Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак.*, 48, 1953/1954, кн. 1, ч. I, 33—65.
2. Б. Петканчин. Параболични роеве прави в двуосната геометрия. *Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак.*, 49, 1954/1955, кн. 1, ч. I, 49—84.
3. Б. Петканчин. Върху елиптичните роеве прави в двуосната геометрия. *Изв. Мат. инст. БАН*, II, 1957, кн. 2, 135—161.
4. Б. Петканчин. Върху един аналог в нечетномерно проективно пространство на двуосната геометрия. *Год. Соф. унив., Мат. фак.*, 60, 1965/1966, 33—60.
5. Б. Петканчин. Диференциална геометрия. София, Наука и изкуство, 1960.
6. И. Иванов. Диференциална геометрия на повърхнините в хиперболичното двуосно пространство. Канд. дисертация, София, 1965.
7. Д. Г. Мекеров. Однопараметрические системы n-мерных линейных подпространств в четномерном обобщенном биаксиальном пространстве $P^{n,n+1}_{2(n+1)}$. *Докл. БАН*, 34, 1981, № 8, 1069—1072.
8. Д. Г. Мекеров, Р. Т. Кожухарова. Об одной классификации кривых в четырехмерном обобщенном биаксиальном пространстве. *Плиска, Бълг. мат студии*, 9, 1985.
9. Р. Т. Кожухарова, Д. Г. Мекеров. Инвариантные равенства для поверхности в одном обобщенном биаксиальном пространстве. *Докл. БАН*, 37, 1984, № 11.
10. Р. Т. Кожухарова, Д. Г. Мекеров. Геометрическая характеристика одной классификации поверхностей в обобщенном биаксиальном пространстве $\mathbf{P}^{1,2}_4$. *Докл. БАН*, 38, 1985, № 1.
11. R. T. Kozhuharova. Surfaces in a generalized biaxial space. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 35, 1985. No 11, 1463—1466.
12. Р. Т. Кожухарова, Д. Г. Мекеров. Линии на поверхности в обобщенном биаксиальном пространстве $\mathbf{P}^{1,2}_4$. *Докл. БАН*, 38, 1985.

Пловдивский университет
4000 Пловдив Болгария

Поступила 24. IV. 1984