PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

ОБ УГЛОВЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ НОРМАЛЬНЫХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

САМВЕЛ Л. БЕРБЕРЯН

Исследуются угловые граничные значения оператора Римана—Лиувилля $r^{-\alpha}D^{-\alpha}\{u(z)\}$, где $u(z)$ нормальная субгармоническая функция и $0 \leqq \alpha < \infty$. Приведем некоторые определения и результаты, необходимые для дальнейшего.

Как известно, оператор Римана—Лиувилля $D^{-\alpha}\varphi(x)$ при $0<\alpha<\infty$ определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha}\varphi(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt, \quad x \in (0,\ 1),$$

причем для $\varphi(x) \in L(0,\ 1)$ правая часть существует почти всюду; в случае $\alpha=0$ полагают, что

$$D^0\varphi(x)=\varphi(x), \quad x \in (0,\ 1).$$

Обозначим $D_+^{-\alpha}\varphi(x)=\max\{D^{-\alpha}\varphi(x),\ 0\}$.

Следуя Джрбашяну [1], обозначим через U_α $(0<\alpha<+\infty)$ класс субгармонических в круге $D:|z|<1$ функций $u(z)$, для которых конечна величина

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int_0^{2\pi} U_\alpha^{(+)}(re^{i\theta})\,d\theta\right\} < +\infty,$$

где

$$U_\alpha^{(+)}(re^{i\theta})=\max\{0,\ r^{-\alpha}D^{-\alpha}u(re^{i\theta})\}.$$

Интерпретируя единичный круг D как модель плоскости в геометрии Лобачевского, обозначим через $\sigma(z_1,\ z_2)$ неевклидовое расстояние между точками z_1 и z_2 из круга D:

$$\sigma(z_1,\ z_2)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}, \quad u=\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|.$$

Говорят, что субгармоническая в D функция $u(z)$ нормальна, если порождаемое ею семейство $\Phi:\{u(S(z))\,;\,S(z)\in \mathrm{Aut}(D)\}$, нормальное в D в смысле Монтеля, т.е. из любой последовательности семейства Φ можно извлечь

PLISKA Studia mathematica bulgarica, Vol. 10, 1989, p. 50—55.

подпоследовательность, равномерно сходящуюся к субгармонической функции или равномерно расходящуюся к $+\infty$ или $-\infty$ на любом компакте в D. Нам понадобится лемма, доказательство которой будет опубликовано позднее.

Лемма 1. *Допустим, что нормальная субгармоническая функция $u(z)$, определенная в D, имеет предел $\lim_{n\to\infty} u(z_n)=c$ по некоторой последовательности точек $\{z_n\}$, $z_n \in D$, $z_n \to z_0$, где $z_0 \in D$ или $z_0 \in \Gamma: |z|=1$. Если $\{z'_n\}$ — произвольная последовательность точек в D, для которой $\sigma(z_n, z'_n)\to 0$ при $n\to\infty$, то и $\lim_{n\to\infty} u(z'_n)=c$.*

Сформулируем основной результат настоящей статьи.

Теорема 1. *Пусть нормальная субгармоническая в D функция $u(z)$ принадлежит классу $U_\alpha (0 \leqq \alpha < \infty)$. Тогда на Γ можно указать такое множество E, $\operatorname{mes} E=0$, что в каждой точке $\zeta=e^{i\theta}\in \Pi E$ функция $V_\alpha(re^{i\theta})=r^{-\alpha}D^{-\alpha}\{u(re^{i\theta})\}$ имеет конечный угловой предел.*

Вначале докажем теорему, представляющую и самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Любая нормальная субгармоническая в D функция $u(z)$ является непрерывной функцией.*

Доказательство теоремы 2 основано на следующей лемме.

Лемма 2. *Пусть нормальная субгармоническая в D функция $u(z)$ не равна тождественно $-\infty$. Тогда на любом компакте функция $u(z)$ ограничена.*

Доказательство. Так как любой компакт в D можно вложить в некоторую замкнутую область $F\subset D$, то можно предположить без нарушения общности, что K — некоторая замкнутая область. Для произвольной субгармонической функции $u(z)$ в силу ее полунепрерывности сверху имеет место ограниченность сверху на любом компакте в D. Докажем ограниченность снизу. Допустим, что $u(z)$ не ограничена снизу на K. Тогда существует последовательность $\{z_n\}$, такая, что $u(z_n\}\to -\infty$ при $n\to\infty$. Рассмотрим произвольную точку $q_0\in K$ и докажем, что $u(q_0)=-\infty$. Для этого выберем любую последовательность точек $\{q_n\}$, стремящуюся к q_0, и докажем, что $u(q_n)\to -\infty$. Так как $K\subset D$, то существует неевклидовый круг $Q_1=\{z\in D; |z|\leqq \operatorname{th} M\}$ с центром в точке $z=0$ и радиусом M, такой, что $K\subset Q_1$. Рассмотрим $Q_2=\{z\in D, |z|\leqq \operatorname{th}(2M+1)\}$. Обозначим для произвольного $n=1, 2, \ldots$ отображение S_n из $\operatorname{Aut} D$ по формуле

$$S_n(z)=\frac{z+z_n}{1+\bar z_n z}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

и определим последовательность $\{q'_n\}$ из условия $S_n(q'_n)=q_n$. Из нормальности функции $u(z)$ следует, что существует подпоследовательность $u(S_{n_k}(z))$, равномерно сходящаяся на Q_2 к субгармонической функции или равномерно расходящаяся к $\pm\infty$. Так как

$$u(S_{n_k}(0))=u(z_{n_k})\to -\infty \quad \text{при} \quad n_k\to\infty,$$

то предельная функция $U(z) \equiv -\infty$. Учитывая неравенство треугольника

$$\sigma(z_{n_k}, q_{n_k}) \leqq \sigma(z_{n_k}, 0) + \sigma(0, q_{n_k}) \leqq 2M$$

и инвариантность метрики σ при отображениях $S_n(z)$, получим, что $\{q'_{n_k}\}$ содержится в Q_2 со всеми своими предельными точками и

$$\lim_{k \to \infty} u(q_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} u(S_{n_k}(q'_{nk})) = -\infty. \tag{1}$$

В силу того, что произвольно взятая последовательность $\{q_n\} \to q_0$ содержит последовательность $\{q_{n_k}\}$, для которой имеет место (1), то и

$$\lim_{n \to \infty} u(q_n) = -\infty. \tag{2}$$

Учитывая следующее неравенство, справедливое для любой субгармонической функции $u(z)$

$$u(q_0) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(q_0 + \rho e^{i\alpha})\, d\alpha \tag{3}$$

при достаточно малых значениях радиуса ρ и (2), заключаем, что $u(q_0) = -\infty$. Таким образом, $u(z) \equiv -\infty$ на K и в силу теоремы единственности для субгармонических функций $u(z) \equiv -\infty$ в D, что противоречит условию леммы. Полученное противоречие доказывает лемму 2.

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим произвольную точку $z_0 \in D$. Возьмем некоторую последовательность $\{z'_n\} \to z_0$, для которой существует конечный предел

$$\lim_{n \to \infty} u(z'_n) = c.$$

Рассмотрим любую последовательность $\{z_n\} \to z_0$. Так как $z_0 \in D$, то

$$\lim_{n \to \infty} |z_n - z'_n| = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \to \infty} \sigma(z_n, z'_n) = 0.$$

Из леммы 1 следует, что и $\lim_{n \to \infty} u(z_n) = c$. Отсюда в силу произвольности последовательности $\{z_n\}$ и интегрального неравенства (3) получим, что $u(z_0) = c$. Учитывая произвольность выбора точки z_0, получем и утверждение теоремы 2. Теперь докажем следующую лемму, из которой вытекает утверждение теоремы 1.

Лемма 3. *Пусть $u(z)$ — нормальная субгармоническая функция в D. Тогда оператор Римана — Лиувилля $r^{-\alpha}D^{-\alpha}\{u(z)\}$* при $0 \leqq \alpha < \infty$ *также является нормальной субгармонической функцией.*

Доказательство. Согласно определению оператора Римана — Лиувилля имеем

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}\{u(re^{i\theta})\} = \frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} u(te^{i\varphi})\,dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} u(rxe^{i\varphi})\,dx.$$

Отсюда в силу непрерывности функции $u(z)$ следует, что оператор $r^{-\alpha}D^{-\alpha}\{u(z)\}$ определен всюду в круге D. Рассматривая $r^{-\alpha}D^{-\alpha}\{u(z)\}$ как предел интегральных сумм

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}\{u(z)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} u\left(z, \frac{k}{n}\right), \tag{4}$$

мы заключаем, что и $r^{-\alpha}D^{-\alpha}\{u(z)\}$ является субгармонической функцией в круге D. С другой стороны, рассмотрим

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}\{u(S_n(z))\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} u(S_n(zx))\,dx, \tag{5}$$

где $S_n \in \operatorname{Aut}(D)$.

Без нарушения общности в качестве компактов в D будем рассматривать замкнутые круги $D_r : |z| \leqq r$, где $0 < r < 1$. Так как $u(S_{n_k}(z)) \rightrightarrows U(z)$, где $U(z)$ — субгармоническая функция, или $u(S_{n_k}(z))$ равномерно расходится к $+\infty$ или $-\infty$ на D_r, то и $u(S_{n_k}(zx)) \rightrightarrows U(zx)$ или $u(S_{n_k}(zx))$ равномерно расходится к $+\infty$ или $-\infty$ при $0 \leqq x \leqq 1$ на D_r. Тогда из (5) непосредственно следует нормальность оператора $r^{-\alpha}D^{-\alpha}\{u(z)\}$. Лемма полностью доказана.

Так как известно (см. [7]), что нормальная субгармоническая функция $u(z)$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})\,d\theta = O(1),$$

имеет конечные угловые пределы почти всюду на Γ, то из леммы 3 непосредственно следует справедливость утверждения теоремы 1.

Отметим, что если $V_\alpha(e^{i\theta})$ — угловое граничное значение оператора $V_\alpha(z) = r^{-\alpha}D^{-\alpha}\{u(z)\}$, где $u(z) \in U_\alpha$, то функция $V_\alpha(e^{i\theta})$ суммируемая, так как в силу леммы Фату

$$\int_0^{2\pi} |V_\alpha(e^{i\theta})|\,d\theta \leqq \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \|V_\alpha(re^{i\theta})|d\theta < +\infty.$$

В заключение приведем теоремы единственности для нормальных субгармонических функций классов U_α при $0 \leqq \alpha < \infty$, связанные с их граничным поведением.

Теорема 3. *Пусть нормальная субгармоническая в D функция $u(z)$ принадлежит классу U_α при $0 \leqq \alpha < \infty$. Если угловые граничные значения $V_\alpha(e^{i\theta})$ оператора $V_\alpha(z)$ таковы, что*

$$\int_0^{2\pi} V_\alpha(e^{i\theta})d\theta = -\infty,$$

то $u(z) \equiv -\infty$.

Доказательство. Предположив, вопреки утверждению, что $u(z) \not\equiv -\infty$, согласно теореме 1 имеем

$$\int_0^{2\pi} V_\alpha(e^{i\theta})d\theta > -\int_0^{2\pi} |V_\alpha(e^{i\theta})|d\theta > -\infty,$$

что противоречит условию теоремы.

Теорема 4. *Если для нормальной субгармонической в D функции $u(z) \in U_\alpha$, где $0 \leqq \alpha < +\infty$, выполняется*

$$\lim_{n\to\infty} V_\alpha(z_n) = -\infty$$

по некоторой последовательности $\{z_n\}$, имеющей более чем одну предельную точку на Γ и для которой $\sigma(z_n, z_{n+1}) < M$ при $n = 1, 2, \ldots$, то $u(z) \equiv -\infty$.

Доказательство этой теоремы с учетом теоремы 1 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3 в работе [9], поэтому мы его не приводим.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Москва, 1966, с. 671.
2. М. М. Джрбашян. Классы функций и их параметрическое представление. Современные проблемы теории аналитических функций. — В: Международная конференция по теории аналитических функций, Ереван, 1965. Москва, 1966, 118—137.
3. М. М. Джрбашян, В. С. Захарян. Граничные свойства мероморфных функций класса N_α. *Изв. АН Арм. ССР, Математика,* **2**, 1967, №5, 275—294.
4. В. С. Захарян. Сегментные изменения потенциала типа Грина. *Доклады АН Арм. ССР,* **66**, 1978, №4, 212—215.

5. Е. Д. Соломенцев. Гармонические и субгармонические функции и их обобщения. — В: Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. Москва, 1962. Итоги науки ВИНИТИ АН СССР. Москва, 1964, 83—100.
6. А. Ловатер. Граничное поведение аналитических функций. *Итоги науки и техники. Математический анализ,* **10**, 1973, 99—260.
7. J. Meek. Subharmonic versions of Fatous Theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **30**, 1971, No 2, 313—317.
8. С. Л. Берберян. О граничных свойствах субгармонических функций, порождающих нормальные семейства на подгруппах автоморфизмов единичного круга. *Изв. АН. Арм. ССР,* **15**, 1980, №4, 395—402.
9. F. Bagemihe, W. Seidel. Sequential and continuous limits of meromorphic functions. *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A,* No 280, 1—17.

Армпединститут им. Х. Абовяна
375019 Ереван СССР

Поступила 12.8.1985