PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ БЛИЗКИХ К ВЫПУКЛЫМ ФУНКЦИЙ

ГЕОРГИ М. ДИМКОВ, ВИКТОР В. СТАРКОВ

Определяется семейство регулярных в единичном круге функций при помощи интегрального представления. Для этого семейства строятся вариационные формулы, и с их помощью решаются некоторые экстремальные задачи.

Пусть C — класс близких к выпуклым функций (см. [1]), т. е. регулярных в круге $\Delta=\{z:|z|<1\}$ функций $h(z)$, имеющих представление

$$h(z)=\int_0^z s'(u)p(u)du.$$

Здесь $s(z)$ принадлежит классу K выпуклых функций (регулярных и однолистных в Δ функций $s(z)=z+\ldots$, отображающих Δ на выпуклую область); $p(z)=1+b_1(z)+\ldots$ — регулярная в Δ функция, такая, что $\operatorname{Re}\{e^{i\gamma}p(z)\}>0$ для некоторого $\gamma\in(-\pi/2,\ \pi/2)$.

Обозначим U_α^* $(\alpha\geqq 1)$ множество регулярных в Δ функций $f(z)$, таких, что

$$f'(z)=s'(z)\exp\left[-2\int_0^{2\pi}\log\frac{1-\omega(z)e^{-it}}{1-\omega(0)e^{-it}}d\mu(t)\right], \tag{1}$$

где $\omega(z)$ — любая регулярная в Δ функция, $|\omega(z)|<1$; $s\in K$; $\mu(t)$ — комплекснозначная функция ограниченной вариации, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^{2\pi}d\mu(t)=0,\quad \int_0^{2\pi}|d\mu(t)|\leqq\alpha-1. \tag{2}$$

Очевидно, $C\subset U_\alpha^*$; при $\alpha=k/2$ U_α^* является расширением V_k — класса функций с ограниченным граничным вращением (см. [2]).

Поммеренке [3] дал следующее определение линейно-инвариантного семейства функций. Класс функций $f(z)=z+\ldots$, регулярных и локально однолистных в Δ, называется линейно-инвариантным семейством, если для любого конформного автоморфизма $\Phi(z)$ круга Δ функция

$$\Lambda_\Phi[f](z)=\frac{f(\Phi(z))-f(\Phi(0))}{f'(\Phi(0))\Phi'(0)}=z+\ldots$$

также принадлежит этому классу.

PLISKA Studia mathematica bulgarica. Vol. 10, 1989, p. 62–76.

Порядком линейно-инвариантного семейства M называется число пор $M = \sup\limits_{f\in M} |f''(0)|/2$. Поммеренке [3] показал, что

$$\text{пор}\, M = \sup_{z\in\Delta,\, f\in M} \left| -\bar{z} + \frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)} \right|.$$

Обозначим через I_α^* класс всех комплекснозначных функций ограниченной вариации, удовлетворяющих условию (2).

Рассмотрим G_α — класс функций вида

$$\varphi(z) = \int_0^{2\pi} g(z,\ t)\,d\mu(t), \quad \mu\in I_\alpha^*,$$

где $g(z,\ t)$ регулярна в Δ по z, 2π-периодична и непрерывно дифференцируема по t.

С помощью теоремы Э. Хелли легко показать, что G_α компактен в топологии равномерной сходимости внутри Δ.

Пусть F — дифференцируемый по Фреше функционал. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\max_{\varphi\in G_\alpha} \operatorname{Re}\{F[\varphi]\}, \quad \alpha\in[1,\ \infty), \tag{3}$$

и пусть $\varphi_0(z) = \int_0^{2\pi} g(z,\ t)\,d\mu_0(t)$ — экстремальная функция в этой задаче (может быть не единственная).

Обозначим через $I_\alpha^*(n)$ подкласс I_α^* кусочно-постоянных функций, имеющих не более чем n разрывов на отрезке $[0,\ 2\pi]$,

$$G_\alpha(n) = \{\varphi\in G_\alpha : \varphi(z) = \int_0^{2\pi} g(z,\ t)\,d\mu(t), \quad \mu\in I_\alpha^*(n)\}.$$

Класс $G_\alpha(n)$ также компактен в топологии равномерной сходимости внутри Δ, так как из любой последовательности n-ступенчатых функций (n — фиксировано) из I_α^* можно выделить подпоследовательность, поточечно сходящуюся к n-ступенчатой функции из I_α^*. Наряду с задачей (3) рассмотрим также экстремальную задачу

$$\max_{\varphi\in G_\alpha(n)} \operatorname{Re}\{F[\varphi]\}, \quad \alpha\in[1,\ \infty), \tag{4}$$

n — фиксированное натуральное число.

Пусть максимум в (4) достигается на функции

$$\varphi_n(z) = \int_0^{2\pi} g(z,\ t)\,d\mu_n(t).$$

Из последовательности $\varphi_n(z)$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри Δ к $\varphi^{(0)} \in G_\alpha$, причем $\varphi^{(0)}(z)$ дает решение экстремальной задачи (3). Однако решения задачи (3), вообще говоря, могут получаться не только как равномерный предел решений (4).

В [4] Лебедев и Александров получили вариационную формулу, которая применима и в рассматриваемом случае. В частности, там было замечено (при принятых предположениях и обозначениях), что для любой кусочно-непрерывной вещественной функции $\psi(t)$

$$\int_0^{2\pi} g(z,\ \psi(t))d\mu(t) \in G_\alpha,$$

если $\mu \in I_\alpha^*$. Полагая $\psi(t) = h\eta(t)$, $\eta(t)$ — кусочно-непрерывная, Лебедев и Александров получили вариационную формулу в G_α:

$$f_h(z) = f(z) + h \int_0^{2\pi} g_t'(z,\ t)\eta(t)d\mu(t) + o(h)$$

($\mu(t)$ из интегрального представления $f(z)$). Очевидно, эта формула верна и в $G_\alpha(n)$.

Далее, действуя по аналогии с [5] (см. также [6]), получим некоторые соотношения для экстремальной функции в задаче (4).

Пусть $\mu_n(t)$ имеет скачок d_0 в точке разрыва t_0, $\eta(t)$ — характеристическая функция отрезка, который содержит только одну точку t_0 разрыва функции $\mu_n(t)$. Получаем вариацию $\varphi_n(z)$:

$$\varphi_{n,*}(z) = \varphi_n(z) + hd_0 g_t'(z,\ t_0) + o(h),$$

$$F[\varphi_{n,*}(z)] = F[\varphi_n(z)] + hd_0 L_{\varphi_n}[g_t'(z,\ t_0)] + \varepsilon(\varphi_n,\ h),$$

где L_{φ_n} — дифференциал F в точке φ_n. Из экстремальности функции φ_n в задаче (4) заключаем:

$$\operatorname{Re}\{d_0 L_{\varphi_n}[g_t'(z,\ t_0)]\} = 0. \tag{5}$$

Пусть t_1, t_2 — две точки разрыва $\mu_n(t): d\mu_n(t_1) = a_0$, $d\mu_n(t_2) = b_0$, $\theta = \arg a_0$, $\psi = \arg b_0$; пусть $\theta \neq \psi$. Если скачки $\mu_n(t)$ в точках t_1 и t_2 заменить соответственно на a_λ и b_λ, такие, что

$$a_\lambda + b_\lambda = a_0 + b_0, \quad |a_\lambda| + |b_\lambda| = |a_0| + |b_0| = l, \tag{6}$$

то функция $\mu_{n,\lambda}(t)$, полученная в результате такой замены, снова будет принадлежать $I_\alpha^*(n)$, а соответствующая ей функция

$$\varphi_{n,\lambda}(z) = \int_0^{2\pi} g(z,\ t)d\mu_{n,\lambda}(t) \in G_\alpha(n).$$

При малых вещественных λ найдем дифференцируемую функцию a_λ, удовлетворяющую (6):

$$a_\lambda = a_0 + a_1\lambda + o(\lambda), \quad a_1 \neq 0,$$

$$b_\lambda = a_0 + b_0 - a_\lambda = b_0 - a_1\lambda + o(\lambda),$$

$$|a_0|\left(1 + 2\lambda \operatorname{Re}\frac{a_1}{a_0} + o(\lambda)\right)^{1/2} + |b_0|\left(1 - 2\lambda \operatorname{Re}\frac{a_1}{b_0} + o(\lambda)\right)^{1/2} = l.$$

Дифференцируя по λ в точке $\lambda = 0$ обе части последнего равенства, получим

$$|a_0| \operatorname{Re}\frac{a_1}{a_0} - |b_0| \operatorname{Re}\frac{a_1}{b_0} = 0,$$

или

(7) $$\operatorname{Re}\{a_1(e^{-i\theta} - e^{-i\psi})\} = 0.$$

Следовательно, $\alpha_\lambda = a_0 + a_1\lambda + 0(\lambda)$, где a_1 удовлетворяет (7).

Функции $\mu_{n,\lambda}(t)$ соответствует функция

$$\varphi_{n,\lambda}(z) = \varphi_n(z) + (a_\lambda - a_0)g(z,\ t_1) + (b_\lambda - b_0)g(z,\ t_2)$$
$$= \varphi_n(z) + a_1\lambda[g(z,\ t_1) - g(z,\ t_2)] + o(\lambda).$$

Из экстремальности $\varphi_n(z)$ в задаче (4) следует

(8) $$\operatorname{Re}\{a_1(L_{\varphi_n}[g(z,\ t_1)] - L_{\varphi_n}[g(z,\ t_2)])\} = 0.$$

Из (7) и (8) получаем

(9) $$\operatorname{Im}\{(e^{-i\theta} - e^{-i\psi})(L_{\varphi_n}[g(z,\ t_1)] - L_{\varphi_n}[g(z,\ t_2)])\} = 0,$$

что может быть также переписанно в виде

(10) $$\operatorname{Re}\{e^{i\frac{\theta+\psi}{2}}(L_{\varphi_n}[g(z,\ t_1)] - L_{\varphi_n}[g(z,\ t_2)])\} = 0.$$

Пусть $\mu_n(t)$ имеет скачки в точках t_1, t_2 и t_3, равные соответственно $|a_1|e^{i\theta_1}$, $|a_2|e^{i\theta_2}$, $|a_3|e^{i\theta_3}$; пусть $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3 > 2\pi - \theta_1$. Для краткости далее будем обозначать

$$L_{\varphi_n}[g(z,\ t_k)] = L_k,\ L_{\varphi_n}[g(z,\ t_k)] = L'_k.$$

Запишем (9) для t_1 и t_3:

$$\operatorname{Im}\{(e^{i\theta_1} - e^{i\theta_3})(L_1 - L_3)\} = 0,$$

т. е.

$$\operatorname{Im}\{(e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2})(L_1-L_2)\}+\operatorname{Im}\{(e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3})(L_2-L_3)\}$$
$$+\operatorname{Im}\{(e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2})(L_2-L_3)\}+\operatorname{Im}(e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3})(L_1-L_2)\}=0.$$

Отсюда, учитывая (9) для t_1 и t_2, t_2 и t_3, а также соотношения

$$e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}=|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}i,\ e^{\theta_2}-e^{i\theta_3}=|e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}|e^{i\frac{\theta_2+\theta_3}{2}}i,$$

получим

$$\operatorname{Im}\{|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}i(L_2-L_3)+|e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}|e^{i\frac{\theta_2+\theta_3}{2}}i(L_1-L_2)\}=0,$$

$$\operatorname{Im}\{|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|e^{i\frac{\theta_1-\theta_3}{2}}(L_2-L_3)\frac{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}}{|e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}|}$$
$$+|e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}|e^{i\frac{\theta_3-\theta_1}{2}}(L_1-L_2)\frac{e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}}{|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|}\}=0.$$

Или, используя (9), запишем

$$\frac{|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|}{|e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}|}(e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3})(L_2-L_3)\sin\frac{\theta_1-\theta_3}{2}$$
$$+\frac{|e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}|}{|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|}(e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2})(L_1-L_2)\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2}=0,$$

т. е.

$$\frac{|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|}{|e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}|}(e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3})(L_2-L_3)=\frac{|e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}|}{|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|}(e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2})(L_1-L_2) \tag{11}$$

вещественны.

Таким образом, если t_j, $j=1, 2,\dots,$ $k\geqq 3$ — точки разрыва $\mu_n(t)$ и им соответствуют $\theta_j=\arg d\mu_n(t_j)$, $2\pi+\theta_k>\theta_1>\dots>\theta_k\geqq 0$, то из (11) следует

$$\frac{|L_1-L_2|}{|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|}=\frac{|L_2-L_3|}{|e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}|}=\dots=\frac{|L_{k-1}-L_k|}{|e^{i\theta_{k-1}}-e^{i\theta_k}|}=s_n>0,$$

$$L_{j-1}-L_j=\pm s_n\overline{(e^{i\theta_{j-1}}-e^{i\theta_j})},\quad j=1,\ 2,\dots,\ k, \tag{12}$$

причем из (11) следует, что здесь знак перед s_n выбирается один для всех j.

Из соотношения (12) очевидно, что точки $L_1, \ldots, L_k$ лежат на окружности радиуса s_n с некоторым центром c_n, причем

$$\frac{L_{j-1} - c_n}{L_j - c_n} = \frac{e^{i\theta_j}}{e^{i\theta_{j-1}}}$$

или

$$(L_1 - c_n)e^{i\theta_1} = (L_2 - c_n)e^{i\theta_2} = \ldots = (L_k - c_n)e^{i\theta_k} = \pm s_n. \tag{13}$$

(Знак перед s_n здесь тот же, что и в (12).) Следовательно,

$$\operatorname{Im}\{(L_j - c_n)e^{i\theta_j}\} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Или, учитывая (5), $\operatorname{Im}\{(L_j - c_n)\overline{L_j'}i\} = 0$, т. е.

$$(|L_j - c_n|^2)_t' = 0.$$

Заметим, что если в рассматриваемом случае двум точкам разрыва t_1 и t_2 функции $\mu_n(t)$ соответствует одно $\theta = \arg d\mu_n(t_1) = \arg d\mu_n(t_2)$, то, взяв в предыдущих рассуждениях в качестве точки разрыва сначала t_1, потом t_2, получаем $L_1 = L_2$.

Следовательно, если существует не менее трех точек разрыва $\mu_n(t)$, которым соответствуют различные θ_j, то эти точки удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} |L_{\varphi_n}[g(z, t_j)] - c_n|^2 = |L_{\varphi_n}[g(z, t_k)] - c_n|^2 \quad \text{для всех } j, k, \\ (|L_{\varphi_n}[g(z, t_j)] - c_n|^2)_t' = 0 \quad \text{для всех } j. \end{gathered} \tag{14}$$

Пусть теперь для всех точек разрыва функции $\mu_n(t)$ $\arg(d\mu_n(t))$ равен либо θ_1, либо θ_2, $\theta_1 \neq \theta_2$. Именно

$$\arg d\mu_n(t_k) = \theta_1, \quad k = 1, \ldots, k_0,$$

$$\arg d\mu_n(t_j) = \theta_2, \quad j = k_0 + 1, \ldots, k_0 + j_0.$$

При помощи второй вариационной формулы Голузина ([7, с. 504—507]) для классов функций, представимых интегралом Стилтьеса, получим

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}\{e^{i\theta_1}(L_{k_1} - L_{k_2})\} = 0, \quad k_1, k_2 = 1, \ldots, k_0, \\ \operatorname{Re}\{e^{i\theta_2}(L_{j_1} - L_{j_2})\} = 0, \quad j_1, j_2 = k_0 + 1, \ldots, k_0 + j_0. \end{gathered} \tag{15}$$

С другой стороны, из (10) следует

$$\mathrm{Re}\,\{e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}(L_k-L_j)\}=0,\quad k=1,\ldots,\ k_0,\quad j=k_0+1,\ldots,\ k_0+j_0. \tag{16}$$

Из (16) получаем, что все L_k и L_j лежат на одной прямой; из (15) же следует, что это возможно только в случае, если

$$L_k=L_1,\quad k=1,\ldots,\ k_0;\quad L_j=L_{k_0+1},\quad j=k_0+1,\ldots,\ k_0+j_0.$$

Причем, из (9) $\mathrm{Im}\,\{(e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2})(L_1-L_{k_0+1})\}=0$. Из последнего уравнения следует, как и в предыдущем случае (существования трех различных θ_k), что L_1 и L_{k_0+1} на окружности с некоторым центром c_n, радиуса $s_n=|L_1-L_{k_0+1}||e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|^{-1}$, причем c_n можно подобрать так, что

$$\frac{L_1-c_n}{L_{k_0+1}-c_n}=\frac{e^{i\theta_2}}{e^{i\theta_1}},$$

или $(L_1-c_n)e^{i\theta_1}=(L_{k_0+1}-c_n)e^{i\theta_2}=\pm s_n$. Как и в предыдущем случае, учитывая (5), получим $\mathrm{Re}\,\{(L_1-c_n)\overline{L_1'}\}=\mathrm{Re}\,\{(L_{k_0+1}-c_n)\,\overline{L}'_{k_0+1}\}=0$, т.е.

$$(|L_1-c_n|^2)'_t=(|L_{k_0+1}-c_n|^2)'_t=0.$$

Следовательно, точки разрыва μ_n удовлетворяют системе уравнений (14) с некоторым c_n, причем, если нескольким точкам разрыва μ_n соответствует одно и то же θ, то значения $L_{\varphi_n}[g(z,\ t)]$ в этих точках совпадают.

Условия (14) дают возможность в ряде случаев получить информацию об экстремальной функции $\varphi_n(z)$ в задаче (4), а при $n\to\infty$ — информацию и об экстремальной функции $\varphi^{(0)}(z)$ в задаче (3) (например, найти число точек разрыва $\mu_0(t)$, соответствующей функции $\varphi^{(0)}(z)$ в ее интегральном представлении).

Рассмотрим несколько примеров применения изложенного вариационного метода.

1. Будем решать задачу нахождения

$$\max_{f\in \overset{*}{U}\alpha}\mathrm{Re}\left\{\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)}\right\} \tag{17}$$

при фиксированном z_0 из Δ.

В силу интегрального представления (1), решение задачи (17) будем искать, решая следующие две задачи: найти

(18) $$\max_{s\in K} \operatorname{Re}\left\{\frac{z_0 s''(z_0)}{s'(z_0)}\right\}$$

и

(19) $$M=\max_{\mu\in \overset{*}{I}\alpha} \operatorname{Re}\left\{\int_0^{2\pi} \frac{2z_0\omega'(z_0)e^{-it}}{1-\omega(z_0)e^{-it}}\, d\mu(t)\right\}.$$

Конечно, максимум в задаче (19) надо искать еще и по всем регулярным функциям $\omega(z)$, $|\omega(z)|<1$, $z\in\Delta$.

В (19) ставится задача типа (3), для которой $g(z, t)=2z\omega'(z)e^{-it} \times[1-\omega(z)e^{-it}]^{-1}$ и $F[\varphi(z)]=\varphi(z_0)$. Переходя к рассмотрению экстремальной задачи (4) с этим $g(z, t)$ и F, т.е. к задаче нахождения

(20) $$\max_{\mu\in \overset{*}{I}\alpha} \operatorname{Re}\left\{\int_0^{2\pi} \frac{2z_0\omega'(z_0)e^{-it}}{1-\omega(z_0)e^{-it}}\, d\mu(t)\right\},$$

надо учитывать, что в (14) $L_{\varphi_n}=F$, так как F — линейный функционал.

Пусть μ_n — экстремальная в (20) и $\int_0^{2\pi}|d\mu_n(t)|=\alpha_n-1$. Так как $\int_0^{2\pi} d\mu_n(t)=0$, то точки разрыва μ_n удовлетворяют системе (14), т.е. точки

$$L_{\varphi_n}[g(z, t_k)]=2z_0\omega'(z_0)e^{-it_k}[1-\omega(z_0)e^{-it_k}]$$

расположены на окружности с центром c_n; причем, второе условие в (14) — условие касания кривой $w(t)=2z_0\omega'(z_0)e^{-it}[1-\omega(z_0)e^{-it}]^{-1}$ окружности, на которой лежат точки $L_{\varphi_n}[g(z, t_k)]$, $k\geqq 2$. Поэтому окружность, на которой лежат эти точки, имеет уравнение

$$w(t)=\frac{2z_0\omega'(z_0)e^{-it}}{1-\omega(z_0)e^{-it}}, \quad t\in[0, 2\pi].$$

Эта окружность имеет для всех n центр

$$c_n=2z_0\omega'(z_0)\overline{\omega(z_0)}\,[1-|\omega(z_0)|^2]^{-1}$$

и радиус

$$s_n=2|z_0|\,|\omega'(z_0)|\,[1-|\omega(z_0)|^2]^{-1}.$$

Обозначим $a_k=|a_k|e^{i\theta_k}=d\mu_n(t_k)$. Из (13) получаем

$$(L_k-c_n)a_k=\pm\frac{2|z_0|\,|\omega'(z_0)|}{1-|\omega(z_0)|^2}|a_k|$$

(в прежних обозначениях). Так как $\int_0^{2\pi} d\mu_n(t)=0$ и $\int_0^{2\pi}|d\mu_n(t)|=\alpha_n-1$, то в нашем случае

$$F\left[\int_0^{2\pi} g(z,\ t)d\mu_n(t)\right]=\sum_k \alpha_k L_k=c_n\sum_k a_k\pm\frac{2|z_0||\omega'(z_0)|}{1-|\omega(z_0)|^2}\sum_k|a_k|$$

$$=\pm\frac{2|z_0||\omega'(z_0)|}{1-|\omega(z_0)|^2}(\alpha_n-1).$$

То есть, максимум в (20) равен

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_k a_k L_k\right\}=\pm\frac{2|z_0||\omega'(z_0)|}{1-|\omega(z_0)|^2}(\alpha_n-1).$$

Теперь ясно, что в последнем выражении должен быть выбран знак „+“, а α_n должень быть равен α.

По обобщенной лемме Шварца

$$|\omega'(z)|\leqq\frac{1-|\omega(z)|^2}{1-|z|^2}$$

с возможным равенством только для функции

$$\omega_0(z)=e^{i\theta}\frac{z+a}{1+\bar{a}z},\ |a|<1,$$

где θ — вещественное число. Следовательно, в (19)

$$M=\frac{2|z_0||\omega'(z_0)|}{1-|\omega(z_0)|^2}(\alpha-1)=\frac{2(\alpha-1)|z_0|}{1-|z_0|}.$$

Перепишем (5) в виде

$$e^{i\theta_k}=\pm i\frac{|L'_k|}{L'_k}. \tag{21}$$

Так как в (13) выбрали знак „+“, то в выражении (21) надо взять знак „−“. Поэтому

$$e^{i\theta_k}=\frac{|z_0|}{z_0}\ \frac{(1+\bar{a}z_0)^2}{|1+\bar{a}z_0|^2}\ \frac{\left(1-e^{i\theta}\dfrac{z_0+a}{1+\bar{a}z_0}e^{-it_k}\right)^2}{\left|1-e^{i\theta}\dfrac{z_0+a}{1+\bar{a}z_0}e^{-it_k}\right|^2}\ \frac{1}{e^{i\theta}e^{it_k}}.$$

Следовательно, в качестве $\mu_n(t)$ можно взять любую n-ступенчатую функцию с разрывами в точках $t_1, \ldots, t_n$, такую, что

$$\int_0^{2\pi} d\mu_n(t)=0, \quad \int_0^{2\pi} |d\mu_n(t)|=\alpha-1,$$

$$d\mu_n(t)=\frac{|z_0|}{z_0}\frac{(1+\bar{a}z_0)^2}{|1+\bar{a}z_0|^2}\frac{\left(1-e^{i\theta}\dfrac{z_0+a}{1+\bar{a}z_0}e^{-it}\right)^2}{\left|1-e^{i\theta}\dfrac{z_0+a}{1+\bar{a}z_0}e^{-it}\right|^2}\frac{|d\mu_n(t)|}{e^{i\theta}e^{-it}}=\sigma(z_0,\ a,\ \theta,\ t)|d\mu_n(t)|,$$

$$|\sigma(z_0,\ a,\ \theta,\ t)|=1.$$

Масимум в (18) (см. [7, с. 508–510]) равен $2|z_0|/(1-|z_0|)$ и достигается на функции $s_0(z)=z(1-e^{-i\arg z_0}z)^{-1}$.

Таким образом, в исходной задаче (17)

$$\max_{f\in U_\alpha^*}\operatorname{Re}\left\{\frac{z_0f''(z_0)}{f'(z_0)}\right\}=\frac{2|z_0|(\alpha+|z_0|)}{1-|z_0|^2}$$

и достигается на функциях $f(z)$, таких, что

$$f'(z)=\frac{1}{(1-ze^{-i\arg z_0})^2}\exp\left[-2\int_0^{2\pi}\log\frac{1-e^{i\theta}\dfrac{a+z}{1+\bar{a}z}e^{-it}}{1-e^{i\theta}ae^{-it}}\sigma(z_0,\ a,\ \theta,\ t)d\beta(t)\right],$$

где $\beta(t)$ любая неубывающая на интервале $[0,\ 2\pi]$ функция с полной вариацией $\alpha-1$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{2\pi}\sigma(z_0,\ a,\ \theta,\ t)d\beta(t)=0. \tag{22}$$

Таким же образом можно получить

$$\min_{f\in U_\alpha^*}\operatorname{Re}\left\{\frac{z_0f''(z_0)}{f'(z_0)}\right\}=-\frac{2|z_0|(\alpha-|z_0|)}{1-|z_0|^2}.$$

Экстремум достигается на функциях $f\in U_\alpha^*$, таких, что

$$f'(z)=\frac{1}{(1-ze^{-i\arg z_0})^2}\exp\left[2\int_0^{2\pi}\log\frac{1-e^{i\theta}\dfrac{a+z}{1+\bar{a}z}e^{-it}}{1-e^{i\theta}ae^{-it}}\sigma(z_0,\ a,\ \theta,\ t)d\beta(t)\right].$$

Следовательно,

$$-\frac{2|z_0|(\alpha-|z_0|)}{1-|z_0|^2} \leqq \operatorname{Re}\left\{\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)}\right\} \leqq \frac{2|z_0|(\alpha+|z_0|)}{1-|z_0|^2}.$$

Интегрируя это неравенство, получим оценку

$$\frac{(1-|z_0|)^{\alpha-1}}{(1+|z_0|)^{\alpha+1}} \leqq |f'(z_0)| \leqq \frac{(1+|z_0|)^{\alpha-1}}{(1-|z_0|)^{\alpha+1}}, \tag{23}$$

известную (см. [3]) для линейно-инвариантных семейств порядка α. В дальнейшем (теорема 1) будет показано, что U_α^* — линейно-инвариантное семейство порядка α.

Максимум в (22) достигается для функции

$$\int_0^z \frac{(1+u)^{\alpha-1}}{(1-u)^{\alpha+1}}\, du,$$

которая принадлежит U_α^*.

2. Совершенно аналогично может быть рассмотрена задача отыскания

$$\max_{f\in U_\alpha^*} \operatorname{Im}\left\{\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)}\right\} \tag{24}$$

при фиксированном z_0 из Δ.

С помощью интегрального представления (1), как и в предыдущем случае, задача (24) сведется к двум задачам: найти

$$\max_{s\in K} \operatorname{Im}\left\{\frac{z_0 s''(z_0)}{s'(z_0)}\right\} \tag{25}$$

и

$$\max_{\mu\in I_\alpha^*} \operatorname{Im}\left\{\int_0^{2\pi} \frac{2z_0\omega'(z_0)e^{-it}}{1-\omega(z_0)e^{-it}}\, d\mu(t)\right\}. \tag{26}$$

Используя вариационный метод Голузина для классов функций, представимых интегралом Стилтьеса, получаем, что в задаче (25) максимум равен $2|z_0|/(1-|z_0|^2)$ и достигается на функции $z(1-ze^{i\gamma})^{-1}$, где

$$e^{i\gamma} = e^{-i\arg z_0}\,\frac{|z_0|+i}{1+i|z_0|}.$$

Для получения значения максимума в (26) заметим, что $\mu_1(t) = i\mu_0(t) \in I_\alpha^*$, если $\mu_0(t) \in I_\alpha^*$. Если $\mu_0(t)$ — экстремальная в задаче (19), то $\mu_1(t)$ будет экстремальной в (26). При этом, максимумы в (19) и (26) будут совпадать.

Таким образом, в задаче (24) максимум равен $2\alpha|z_0|/(1-|z_0|)$ и достигается на функциях $f(z)$, таких, что

$$f'(z)=\frac{1}{(1-ze^{i\gamma})^2}\exp\left[-2\int\limits_0^{2\pi}\log\frac{1-e^{i\theta}\dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}e^{-it}}{1-e^{i\theta}ae^{-it}}\,\sigma(z_0,\ a,\ \theta,\ t)id\beta(t)\right],$$

где $\beta(t)$ — любая неубывающая на интервале $[0,\ 2\pi]$ функция с полной вариацией $\alpha-1$, удовлетворяющая условию (22); $e^{i\gamma}=(|z_0|+i)e^{-i\arg z_0}/(1+|z_0|i)$.

3. Рассмотрим еще вопрос об оценке $\arg f'(z_0)$, т. е. задачу о нахождении

$$\max_{f\in U_\alpha^*}\operatorname{Im}\{\log f'(z_0)\}. \tag{27}$$

Не умаляя общности, можно считать $z_0=r>0$.

Задача (27) распадается на следующие две: найти

$$\max_{s\in K}\operatorname{Im}\{\log s'(z_0)\}$$

и

$$\max_{\mu,\omega}\operatorname{Im}\left\{-2\int\limits_0^{2\pi}\log\frac{1-\omega(z_0)e^{-it}}{1-\omega(0)e^{-it}}\,d\mu(t)\right\}. \tag{28}$$

Покажем, что в (28) максимум по $\omega(z)$, $|\omega(z)|<1$, $\omega(0)$ — фиксировано, достигается для

$$\omega_0(z)=\frac{ze^{i\eta}+\omega(0)}{1+ze^{i\eta}\overline{\omega(0)}},$$

η — вещественное.

Действительно, обозначим $\varphi(z)=[z+\omega(0)]\,[1+z\overline{\omega(0)}]^{-1}$, $\psi(z)=\varphi^{-1}[\omega(z)]$. Тогда $\psi(z)$ удовлетворяет лемме Шварца и $\varphi^{-1}[\omega(z)]\prec ze^{i\eta}$, η — любое вещественное число. При этом образ круга $|z|\leqq r_0$ при отображении $\varphi^{-1}[\omega(z)]$ лежит строго внутри этого круга, если $\varphi^{-1}[\omega(z)]\neq ze^{i\eta}$ для некоторого вещественного η. Следовательно, $\omega(z)\prec\varphi(ze^{i\eta})$. Отсюда $1-\omega(z)\prec 1-\varphi(ze^{i\eta})e^{it}$. Поэтому максимум в (28) достигается для

$$\omega_0(z)=\varphi(ze^{i\eta})=\frac{ze^{i\eta}-\omega(0)}{1+ze^{i\eta}\overline{\omega(0)}}.$$

Тогда в (28)

$$\max_{\mu}\operatorname{Im}\left\{-2\int\limits_0^{2\pi}\log\frac{1-\dfrac{ze^{i\eta}-\omega(0)}{1+ze^{i\eta}\overline{\omega(0)}}e^{-it}}{1-\omega(0)e^{-it}}\,d\mu(t)\right\}$$

$$=\max_{\mu}\operatorname{Im}\left\{-2\int\limits_0^{2\pi}\log\left[1-ze^{i\eta}\frac{e^{-it}-\overline{\omega(0)}}{1-\omega(0)e^{-it}}\right]d\mu(t)\right\}$$

$$=\max_{\mu\in I_\alpha^*}\operatorname{Im}\left\{-2\int\limits_0^{2\pi}\log(1-ze^{-it})\,d\mu(t)\right\}.$$

В силу (23)

$$\max_{f\in U_\alpha^*} \operatorname{Re}\left\{\log f'(z)\right\} = (\alpha-1)\log\frac{1+r}{1-r} - 2\log(1-r) = \max_{s\in K}\operatorname{Re}\left\{\log s'(r)\right\}$$

$$+\max_{\mu}\operatorname{Re}\left\{-2\int_0^{2\pi}\log\frac{1-\omega(r)e^{-it}}{1-\omega(0)e^{-it}}d\mu(t)\right\}.$$

Как показал Голузин [7, с. 508—510],

$$\max_{s\in K}\operatorname{Re}\{\log s'(r)\} = -2\log(1-r), \quad \max_{s\in K}\operatorname{Im}\{\log s'(r)\} = 2\arcsin r.$$

Поэтому,

$$\max_{\mu}\operatorname{Re}\left\{-2\int_0^{2\pi}\log(1-re^{-it})d\mu(t)\right\} = (\alpha-1)\log\frac{1+r}{1-r}.$$

Так как

$$\operatorname{Im}\left\{-2\int_0^{2\pi}\log(1-re^{-it})d\mu(t)\right\} = \operatorname{Re}\left\{-2\int_0^{2\pi}\log(1-re^{-it})d\mu_1(t)\right\},$$

где $\mu_1(t) = -i\mu(t) \in I_\alpha^*$, то максимум в (28) равен $(\alpha-1)\log(1+r)/(1-r)$. Таким образом,

$$\max_{f\in U_\alpha^*}\arg f'(r) = (\alpha-1)\log\frac{1+r}{1-r} + 2\arcsin r$$

и достигается для функции $f_0 \in U_\alpha^*$, такой, что

$$f_0'(z) = \frac{1}{(1-ze^{i\arccos r})^2}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{i(\alpha-1)}.$$

В заключении докажем следующий результат:

Теорема 1. *Семейство U_α^* является линейно-инвариантным порядка α.*

Доказательство. Пусть $f\in U_\alpha^*$ и $\Phi(z) = e^{i\theta}(z+\xi)/(1+\bar\xi z)$, где $\xi\in\Delta$, $\theta\in[0, 2\pi]$ — фиксированы. Тогда

$$(\Lambda_\Phi[f])'(z) = \frac{f'\left(e^{i\theta}\dfrac{z+\xi}{1+\bar\xi z}\right)}{f'(e^{i\theta}\xi)(1+\bar\xi z)^2} = \frac{s'\left(e^{i\theta}\dfrac{z+\xi}{1+\bar\xi z}\right)}{s'(e^{i\theta}\xi)(1+\bar\xi z)^2}$$

$$\times \exp\left[-2\int_0^{2\pi} \log \frac{1-\omega\left(e^{i\theta}\dfrac{z+\xi}{1+\bar{\xi}z}\right)e^{-it}}{1-\omega(e^{i\theta}\xi)e^{-it}}\, d\mu(t)\right]$$

$$= s_1(z)\exp\left[-2\int_0^{2\pi} \log \frac{1-\omega_1(z)e^{-it}}{1-\omega_1(0)e^{-it}}\, d\mu(t)\right],$$

где $\omega_1(z)=\omega(e^{i\theta}(z+\xi)/(1+\bar{\xi}z)$. Функция

$$s_1(z)=\int_0^z \frac{s'\left(e^{i\theta}\dfrac{u+\xi}{1+\bar{\xi}u}\right)}{s'(e^{i\theta}\xi)(1+\bar{\xi}u)^2}\, du = \Lambda_\Phi[s](z)\in K,$$

так как класс выпуклых функций K — линейно-инвариантное семейство порядка 1 (см. [3]). Следовательно, $\Lambda_\Phi[f]\in U_\alpha^*$ и U_α^* образует линейно-инвариантное семейство.

Покажем, что пор $U_\alpha^*=\alpha$. Так как функция

$$f_0(z)=\int_0^z \frac{(1+u)^{\alpha-1}}{(1-u)^{\alpha+1}}\, du \in U_\alpha^*,$$

причем $|f_0''(0)/2|=\alpha$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что для каждой функции $f\in U_\alpha^*$ и любого $z\in\Delta$

$$\left|-\bar{z}+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\leqq\alpha. \tag{29}$$

Учитывая (1), получаем, что левая часть (29) не превосходит

$$\left|-\bar{z}+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{s''(z)}{s'(z)}\right|+\frac{1-|z|^2}{2}\left|\int_0^{2\pi}\frac{2\omega'(z)e^{-it}}{1-\omega(z)e^{-it}}\, d\mu(t)\right|. \tag{30}$$

Так как максимум в задаче (19) равен $2|z_0|(\alpha-1)[1-|z_0|]^{-2}$, то

$$\left|\int_0^{2\pi}\frac{2\omega'(z)e^{-it}}{1-\omega(z)e^{-it}}\, d\mu(t)\right|\leqq\frac{2(\alpha-1)}{1-|z_0|^2}.$$

Поэтому левая часть (30) не превосходит α, т.е. пор $U_\alpha^*=\alpha$.

Теорема доказана.

Эта работа является результатом стажировки второго из авторов на Факультете математики Софийского университета им. Климента Охридского в период 1983—1984 гг.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Kaplan. Close-to-convex schlicht functions. *Michigan Math. J.*, **1**, 1952, 169–185.
2. V. Paatero. Über die konforme Abbildungen von Gebieten, deren Ränder von beschränkter Drehung sind. *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A.* I, **33**, 1931.
3. Chr. Pommerenke. Linear-invariante Familien analytischer Funktionen. I. *Math. Ann.*, **155**, 1964, No 2, 108–154.
4. Н. А. Лебедев, И. А. Александров. К методу вариаций в классах функций, представимых с помощью интеграла Стилтьеса. *Труды МИАН, CXIV*, 1968, 79–89.
5. В. В. Старков. О некоторых подклассах линейно-инвариантных семейств, имеющих интегральное представление. (ВИНИТИ 08.07.81, №3341-81 Деп.)
6. В. В. Старков. О некоторых линейно-инвариантных семействах функций, имеющих интегральное представление. *Изв. ВУЗ, Математика*, **5**, 1983, 82–85.
7. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Москва, 1966.

Институт математики с Вычислительным центром
1090 София Болгария

Петрозаводский университет
Физико-математический факультет
185018 Петрозаводск СССР

Поступила 11. 10. 1985