PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

L'EVOLUTION DE LA DERIVEE AREOLAIRE EN ANALYSE HYPERCOMPLEXE

GHEORGHI GHEORGHIEV

Y. Tagamlitzki — In memoriam

1. Introduction. La notion de dérivée aréolaire d'une fonction de variable complexe a été introduite en 1912 par Dimitrie Pompeiu [6]. Par la suite diverses extensions et généralisations de cette notion furent obtenues — en particulier dans le cas de fonctions quaternioniques. Dans [1, 3] nous avions étudié les opérateurs généralisés de Pompeiu, notés par D et Δ_p($-DD^*$ et qui est l'extension du Laplacien associé à D), lorsqu'ils sont appliqués à des fonctions hypercomplexes $u(x)$. Nous nous proposons de signaler ici quelques éléments nouveaux. Ainsi, on étudie comment agit D appliqué au produit de deux fonctions (§ 4). On établit en particulier que la formule de Leibnitz n'a lieu que pour les fonctions définies sur des algèbres de Lie. On déduit des représentations intégrales pour Du et $\Delta_p u$ qui concernent aussi le cas où u est p-holomorphe ou p-harmonique (§ 5). On donne de même des interprétations cinématiques pour Du et $\Delta_p u$ (§ 6). On obtient aussi une formule pour l'opérateur D appliqué à des fonctions définies sur des algèbres doubles (§ 7). La théorie est appliquée à l'étude des structures quaternioniques (Q) et tétranioniques (τ), [4] (§ 8).

2. Préliminaires algébriques. Soit A une algèbre linéaire réelle dont l'unité principale est notée e_0. On a alors la décomposition $A=A_0+\bar{A}$, où A_0 est une sous-algèbre unitaire et $\bar{A}$ un sous-espace vectoriel de codimension 1, ainsi que l'involution $A\to A^*=A_0-\bar{A}$ qui associe à élément $x=x_0+\bar{x}$, l'élément $x^*=x_0-\bar{x}$. On suppose que l'algèbre A est flexible, c'est-à-dire que $(x_1, x_2, x_1)=0$, où on a utilisé la notation (x_1, x_2, x_3) pour l'opérateur $(x_1x_2)x_3-x_1(x_2x_3)$. On sait que $\exp A$ sera un groupoïde ayant des propriétés similaires. Choisissons une base $e_\alpha(\alpha=0, 1, \ldots, n=\dim \bar{A})$ et soit $C^\gamma_{\alpha\beta}$ son tenseur de structure. On a alors $e_\alpha e_\beta=C^\gamma_{\alpha\beta}e_\gamma$, $C^\gamma_{0\beta}=C^\gamma_{\beta 0}=\delta^\gamma_\beta$. Supposons enfin que l'algèbre A soit munie d'une métrique régulière $g(g_{\alpha\beta}=C^0_{\alpha\beta})$, c'est-à-dire que $\langle x, y\rangle=(xy^*)^0$ si la base e_α est orthonormée. Il résulte alors que tout produit dans l'algèbre A munie d'une métrique (pseudo) euclidienne peut être écrit sous la forme

$$xy=\langle x, y\rangle e_0+x^0\bar{y}+\bar{x}y^0+\sigma(\bar{x}, \bar{y})+\alpha(\bar{x}, \bar{y}), \tag{1}$$

où

$$\sigma(x, y)=C^k_{(ij)}x^iy^je_k,\quad \alpha(\bar{x}, \bar{y})=C^k_{[ij]}x^iy^je_k,\quad i, j, k=1, \ldots, n,$$

sont respectivement le produit symétrique et antisymétrique des $\bar{x}, \bar{y}\in\bar{A}$. Si A est une algèbre commutative, alors $\alpha(\bar{x}, \bar{y})=0$ et la réciproque est vraie. Si A est anticommutative à unité, alors $\sigma(\bar{x}, \bar{y})=0$ pour tous les $\bar{x}, \bar{y}$ de $\bar{A}$ et la réciproque est aussi vraie. En particulier, si A est l'algèbre des quaternions ou des octaves, alors on a $\sigma(\bar{x}, \bar{y})=0$ et $\alpha(\bar{x}, \bar{y})$ est précisément le produit vectoriel $\bar{x}\wedge\bar{y}$ des vecteurs $\bar{x}, \bar{y}\in\bar{A}$, [2].

3. Préliminaires analytiques. On considère une C^{ω}-application

$$u:\ \Omega\subset A\to A,\quad x\dashrightarrow u(x)=u^{\alpha}(x)e_{\alpha},\ x=x^{\alpha}e_{\alpha},$$

où Ω est un ouvert de l'espace vectoriel topologique A. Les composantes $u^{\alpha}(x)$ sont des fonctions analytiques de $n+1$ arguments réels. Désignons par $X(\Omega)$ toutes les C^{ω}-applications, appelées fonctions ou champs hypercomplexes. Maintenant on peut définir l'opérateur différentiel D comme suit:

$$D:\ X(\Omega)\to X(\Omega),\ D=e_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}};\ Du=(e_{\alpha}\partial_{\alpha})(u^{\beta}e_{\beta})=C^{\gamma}_{\alpha\beta}u^{\beta}_{,\alpha}e_{\gamma},\ (u^{\beta}_{,\alpha}=\frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}). \tag{2}$$

D'une manière analogue on a l'opérateur

$$D^{*}u=(u^{\alpha}_{,0}-C^{\alpha}_{i\beta}u^{\beta}_{,i})e_{\alpha},\quad \alpha,\ \beta=0,\ 1,\dots,n,\quad i=1,\dots,n. \tag{2'}$$

On remarque facilement que D et D* sont des opérateurs internes ayant leurs valeurs en $D\Omega$. De même, il résulte que

$$Du=[C\frac{du}{dx}]e,\quad D^{*}u=[C^{*}\frac{du}{dx}]e, \tag{3}$$

où $\frac{du}{dx}$ est la dérivée de Fréchet, donnée par la matrice $[\frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}]$.

L'opérateur de Laplace—Pompeiu $DD^{*}=D^{*}D=\Delta_{p}$ sera alors

$$\Delta_{p}u=C^{*}(\frac{dDu}{dx})e=C^{*}C\frac{d}{dx}(\frac{du}{dx})e, \tag{4}$$

d'où la formule

$$\Delta_{p}u=(\frac{\partial^{2}u^{\alpha}}{\partial x^{0}\partial x^{0}}-C^{\alpha}_{i\beta}C^{\beta}_{j\lambda}\frac{\partial^{2}u^{\lambda}}{\partial x^{i}\partial x^{j}})e_{\alpha}. \tag{4'}$$

L'annulation de ces opérateurs, c'est-à-dire les équations $Du=0$ ou $\Delta_{p}u=0$ conduisent aux fonctions p-holomorphes ou p-harmoniques. On remarque facilement qu'une fonction p-holomorphe est en même temps une fonction p-harmonique. Des informations plus précises sur l'existence et la généralité des solutions de chacun de ces problèmes se trouvent en [3].

4. Sur l'expression $D(uv)$. Puisque l'opérateur D est un élément de l'algèbre A, une étude s'impose: celle de considérer des expressions ternaires comme le sont l'associateur $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ ou le Jacobien $J(x_1,\ x_2,\ x_3)$ dans le cas des algèbres anticommutatives. Nous aurons alors

$$(D,\ u,\ v)=(Du)v-D(uv),$$

$$J(D,\ u,\ v)=[D,\ [u,\ v]]-[[D,\ u],\ v]-[u,\ [D,\ v]].$$

Si A est une algèbre associative, on trouvera donc

$$D(uv)=(Du)v. \tag{5}$$

Si on considère un cadre un peu plus général, par exemple celui où A est une algèbre symétrique à gauche [3], ou bien celui d'une algèbre alternative on aura alors $(x_1,\ x_2,\ x_3)=\pm(x_1,\ x_2,\ x_3)$ ce qui conduit aux formules

$$D(uv)=(Du)v\pm uDv\mp(uD)v. \tag{6}$$

Dans le premier cas, si u est une fonction p-holomorphe à droite, on déduit la règle de Leibniz. Par contre, si A est une algèbre de Lie caractérisée par par $J(x_1, x_2, x_3)=0$, on obtiendra

$$[D, [u, v]]=[[D, u], v]+[u, [D, v]], \tag{7}$$

qui n'est autre que la formule de Leibniz pour le crochet.

Remarque. On associe habituellement [3] à une algèbre A des algèbres $A^{(+)}$-commutative et $A^{(-)}$-anticommutative. Si $A^{(+)}$ est une algèbre de Lie, on dit alors que A est une algèbre de Lie admissible [3]. Telles sont, par exemple, les algèbres de Lie unitaires, les algèbres associatives ou symétriques à gauche. Si A est une algèbre de Lie admissible, $A^{(-)}$ est une algèbre de Lie ayant le même support vectoriel, on peut alors lui associer par l'exp un noyau du groupe G. Ainsi on a la possibilité d'étendre l'action des opérateurs D et Δ_p sur G. En général, $A^{(-)}$ étant une algèbre anticommutative, on peut lui associer par l'exp un noyau du "loop" analytique [7].

5. Les formules intégrales. Dans ce qui suit on suppose que A est associative et munie d'une métrique régulière g, tandis que $\Sigma\subset\Omega$ est un domaine simplement connexe, fermé et dont la frontière est équipée d'un champs de normales. A l'aide de l'opérateur $*$, [2] on peut écrire la suite d'applications $u \xrightarrow{g} \omega_u \xrightarrow{*} *\omega_u \xrightarrow{d} d[*\omega_u]=DudV$, où $gu=\omega_u$, $*\omega_u=gud\sigma$, $d\sigma=(-1)^{\alpha}e_{\alpha}dx^0\wedge \cdots \wedge d\widehat{x^{\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx^n$, $dV=\sqrt{|\det g|}\,dx^0\wedge\cdots\wedge dx^n$ sont les éléments d'aire et de volume associés à cette métrique. En particulier, si on prend $\xi=D^*u$, alors on a $d(*\omega_\xi)=\Delta_p u dV$. Puisque le domaine Σ satisfait aux exigences demandées par la formule de Stokes, nous pouvons écrire les relations

$$\int_{\partial\Sigma} gud\sigma=\int_{\Sigma}(Du)dV; \quad \int_{\partial\Sigma'} gD^*ud\sigma=\int_{\Sigma}\Delta_p udV. \tag{8}$$

Si on suppose que le domaine $\Sigma'\to x\in\Omega$, en passant à la limite on aura

$$Du(x)=\lim_{\Sigma\to x}\frac{\int_{\partial\Sigma'} gud\sigma}{\int_{\Sigma'} dV}, \quad \Delta_p u(x)=\lim_{\Sigma\to x}\frac{\int_{\partial\Sigma}(gD^*u)d\sigma}{\int_{\Sigma'} dV}, \tag{9}$$

ce qui peut constituer une nouvelle définition des opérateurs D et Δ_p. D'autre part, si u est une fonction p-holomorphe ou p-harmonique, on déduit les formules remarquables

$$\int_{\partial\Sigma'} gud\sigma=0, \quad \text{ou} \quad \int_{\partial\Sigma'} gD^*ud\sigma=0. \tag{10}$$

6. Considérations cinématiques. Dans ce but on peut considérer l'argument x^0 comme le temps, tandis que le champs $\bar{u}(x)=u(x)-u^0(x)e_0$ comme la vitesse du mouvement non stationnaire du milieu continu en Ω. Puisque D, D^* et Δ_p appartiennent à $X(\Omega)$, on peut former les produits de Du, D^*u et $\Delta_p u$. En utilisant alors la formule (1) du produit, on obtient les relations suivantes

$$DD^*u=(u^0_{,0}\mp \operatorname{div}\bar{u})e_0+\bar{u}_{,0}+\nabla u^0\pm\bar{\sigma}(\bar{u})\pm\bar{\alpha}(\bar{u}), \tag{11}$$

où $\operatorname{div}\bar{u}=\sum_i u^i_{,i}$, $\bar{\sigma}(\bar{u})=C^k_{(ij)}u^j_{,i}e_k$, $\bar{\alpha}(\bar{u})=C^k_{[ij]}u^j_{,i}e_k$.

En language cinématique $\bar{\sigma}(\bar{u})$ (resp. $\bar{\alpha}(\bar{u})$) sera la déformation symétrique de dilatation (resp. antisymétrique de rotation) de la vitesse $\bar{u}$. L'évaluation de l'associateur (D, u, D) conduit à la relation

(12) $$(D,\ u,\ D) = 2\,[\operatorname{div}\bar{\alpha}\,(\bar{u})\,e_0 + [\bar{\sigma},\ \bar{\alpha}]\,u - \bar{\alpha}(\bar{\nabla}u^0)],$$

où $[\bar{\sigma},\ \bar{\alpha}] = \bar{\sigma}\,\bar{\alpha} - \bar{\alpha}\,\bar{\sigma}$.

Puisque l'algèbre A est flexible, on aura toujours

(13) $$\operatorname{div}\bar{\alpha}\,(\bar{u}) = 0, \quad [\bar{\sigma},\ \bar{\alpha}]\bar{u} = \bar{\alpha}(\bar{\nabla}u^0).$$

En utilisant les dernières formules, nous arrivons à

(14) $$\Delta_p u(u\Delta_p) = [u^0_{,0,0} + \operatorname{div}\bar{\nabla}u^0 + \operatorname{div}\bar{\sigma}\,(\bar{u})]e_0$$
$$+\bar{u}_{\,0,0} + \bar{\nabla}\operatorname{div}\bar{u} - \bar{\sigma}^2(\bar{u}) - \bar{\alpha}^2(\bar{u}) \mp [\bar{\sigma},\ \bar{\alpha}]\,\bar{u},$$

d'où on obtient immédiatement

(15) $$[\Delta_p,\ u\,] = 2[\bar{\alpha},\ \bar{\sigma}]\,\bar{u}_0.$$

Si on a $\Delta_p u = u\Delta_p$, nous dirons alors que A est une algèbre semi-associative. Elle est caractérisée par les relations

(16) $$[\bar{\alpha},\ \bar{\sigma}]\,\bar{u} = 0, \ \operatorname{div}\bar{\alpha}\,(\bar{u}) = 0, \ \ \bar{\alpha}(\bar{\nabla}u^0) = 0.$$

Telles sont toutes les algèbres commutatives pour lesquelles $\bar{\alpha}\,(\bar{u}) = 0$, ainsi que les algèbres anticommutatives unitaires, ayant $\bar{\sigma}\,(\bar{u}) = 0$ et pour lesquelles sont vérifiées les relations

(16′) $$\operatorname{div}\bar{\alpha}\,(\bar{u}) = 0, \quad \bar{\alpha}(\bar{\nabla}u^0) = 0.$$

Si on ajoute encore l'identité

(17) $$\bar{\nabla}\operatorname{div}\bar{u} - \bar{\alpha}^2(\bar{u}) = \bar{\Delta}\,\bar{u},$$

alors (14) devient

(17′) $$\Delta_p u = (u^0_{,0,0} + \operatorname{div}\bar{\nabla}u^0)\,e_0 + \bar{\Delta}\,\bar{u},$$

ce qui veut dire que l'opérateur Δ_p est alors un (pseudo) Laplacien classique.

Exemple. Si A est l'algèbre des quaternions ou des octaves, nous aurons $\bar{\sigma}(\bar{u}) = 0$ et $\bar{\alpha}\,(\alpha(\bar{u}) = \operatorname{rot}\bar{u}$. La formule (16′) devient alors $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{u} = 0, \operatorname{rot}(\bar{\nabla}u^0) = 0$, (17) sera $\bar{\nabla}\operatorname{div}\bar{u} - \operatorname{rot}^2\bar{u} = \bar{\Delta}\,\bar{u}$, d'où il résulte que $\Delta_p = \Delta$, [3]. Nous obtenons ainsi toutes les identités connues de l'analyse vectorielle classique.

7. La duplication de l'algèbre A et ses applications. On sait que les algèbres binaires sont formées soit par les nombres complexes (C), soit par les doubles (D) ou par les duaux (Δ). Elles ont pour base $(e_0,\ e_{0'}$, où $e^2_{0'} = k = -1$, $+1$, 0. La duplication de l'algèbre A de base $\varepsilon = (e_\alpha)$ par C, D ou Δ fournira six nouvelles algèbres $\mathscr{A}_\sigma$ ($\sigma = 1, \ldots, 6$) de base correspondante $\xi = (e,\ e')$, où $e = ee_{0'}$. Le tableau de Cayley de la multipfication sera

	e	e'
e	$ee = Ce$	$ee' = Ce'$
e'	$e'e = (e',\ \delta Ce)$	$e'e' = (ke,\ k\delta(e)$

,

où C est le tenseur de structure de la base (e_α) et $\delta=\pm 1$. Ici, $\delta=-1$ correspond à la duplication de Cayley. Ceci nous conduit aux algèbres $\mathscr{A}_1$ $(k=-1)$, $\mathscr{A}_2(k=1)$, $\mathscr{A}_3(k=0)$. De manière analogue, pour $\delta=1$ on obtient les "algèbres complexifiées" $\mathscr{A}_4=A(\mathsf{C})$, $\mathscr{A}_5=A(D)$ et $\mathscr{A}_6=A(\Delta)$.

Exemples.

1) Si $A=\mathsf{C}$, alors on obtient les algèbres doubles suivantes: $\mathscr{A}_1=Q$ (quaternions), $\mathscr{A}_2=$ anti Q, $\mathscr{A}_3=$ semi Q, $\mathscr{A}_4=\tau$ (tetranions), $\mathscr{A}_5=$ anti τ, $\mathscr{A}_6=$ semi τ.

2) Si $A=Q$, on aura les algèbres doubles suivantes: $\mathscr{A}_1=\sigma$ (octaves), $\mathscr{A}_2=$ anti σ, $\mathscr{A}_3=$ semi σ, $A_4=Q(\mathsf{C})$, $\mathscr{A}_5=Q(D)$, $\mathscr{A}_6=Q(\Delta)$.

3) Si $A=\tau$ (tetranions), les algèbres doubles seront: $A_1=\omega$ (octonions), $A_2=$ anti ω, $A_3=$ semi ω, $A_4=\tau(\mathsf{C})$, $A_5=\tau(D)$, $\mathscr{A}_6=\tau(\Delta)$.

Les tableaux de la multiplication pour toutes les algèbres mentionnées ci-dessus ainsi que d'autres informations se trouvent dans l'"Annexe".

Désignons par $\xi=(x, x')$ l'argument d'une algèbre doulble $\mathscr{A}$ de A et soit $\eta(\xi)=(U(\xi), U'(\xi))$ la fonction hypercomplexe correspondante. La dérivée de Fréchet $\frac{d\eta}{d\xi}$ sur $\mathscr{A}$ peut être decomposée comme suit:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\begin{bmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dx'} \\ \frac{du'}{dx} & \frac{du'}{dx'} \end{bmatrix}.$$

Ainsi, le p-opérateur $\mathscr{D}=(D, D')$ appliqué à la fonction $\eta(\xi)$ sera évidemment

$$\mathscr{D}\eta(\xi)=(K\frac{d\eta}{d\xi})\mathscr{E}=(C\frac{du}{dx})e+(C\frac{du}{dx'})e'+\delta(C\frac{du'}{dx})\,e'+\delta_k(C\frac{du'}{dx'})e,$$

où on a noté par K le tenseur de structure de l'algèbre double $\mathscr{A}$. Enfin on arrive à la formule

$$\mathscr{D}\eta=C(\frac{du}{dx}+\delta_k\frac{du'}{dx'})\,e+C(\frac{du}{dx'}+\delta\frac{du'}{dx})e'. \tag{18}$$

On peut établir une formule analogue pour $\Delta_p\eta(\xi)$.

8. Sur les Q et τ-structures. On sait que l'algèbre Q (resp. τ) est simple, à division et associative (resp. commutative). Son espace vectoriel de support est l'espace R_4 d'Euclide (resp. $\mathsf{R}_4^{(1)}$ de Minkowski). Sur Q agit l'opérateur $\sigma(\bar{x}, \bar{y})=0$ (sur τ on a l'opérateur $\alpha(\bar{x}, \bar{y})=0$). En ce qui concerne les fonctions $u(x)$, leur "dérivée volumétrique" [5] sera donnée par la formule

$$\begin{aligned} Du=&[u^0_{,0}-u^1_{,1}-u^2_{,2}\mp u^3_{,3}]e_0+[u^0_{,1}+u^1_{,0}-u^2_{,3}\pm u^3_{,2}]e_1\\ &+[u^0_{,2}+u^2_{,0}\pm u^1_{,3}+u^3_{,1}]\,e_2+[u^0_{,3}+u^3_{,0}\mp u^1_{,2}+u^2_{,1}]\,e_3. \end{aligned} \tag{19}$$

En utilisant (12), (19) et l'Annexe, on peut évaluer $\Delta_p u$. Ainsi, dans le cas des Q-fonctions, nous aurons

$$\Delta_p u=\sum_\alpha{}'\,(u^\alpha_{,1,1}+u^\alpha_{,0,0}+u^\alpha_{,2,2}+u^\alpha_{,3,3})e_\alpha=\Delta u, \tag{20}$$

tandis que pour les τ-fonctions, il vient

$$\begin{aligned}\Delta_p u=&\Delta^{(1)}(\bar{u})+\operatorname{div}\bar{\sigma}(\bar{u})\,e_0=\bar{\sigma}^2(\bar{u})+(u^2_{,2}-u^3_{,3})e^1_{,1}\\ &+(u^1_{,1}-u^3_{,3})_{,2}\,e_2+(u^1_{,1}+u^2_{,2})_{,3}\,e_3.\end{aligned} \tag{21}$$

où $\Delta^{(1)}u = \sum_{\alpha}' (u^{\alpha}_{,0,0} + u^{\alpha}_{,1,1} + u^{\alpha}_{,2,2} - u^{\alpha}_{,3,3})\, e_{\alpha}$.

Après des calculs, on arrive enfin à

$$\Delta_p u = \Delta^{(1)}u + 2[-(u^1_{,2,3} + u^2_{,0,1} + u^3_{,1,2})\, e_0 + (u^2_{,2} - u^3_{,3})_{,1} e_1 + (u^1_{,1} - u^3_{,3})_{,2}\, e_2 + (u^1_{,1} + u^2_{,2})_{,3}\, e_3]. \tag{21'}$$

Maintenant nous sommes en mesure d'esquisser l'étude d'une variété M_4 C^{ω}-différentiable, modelée par l'algèbre Q (resp. τ). On sait qu'une variété complexe $M_{2p}\,(p \geqq 1)$, ayant comme modèle C^p admet des atlas holomorphes [2]. De la même manière, une Q-variété (resp τ-variété) peut être édifiée par des atlas p-holomorphes. Considérons deux cartes locales (Ω, x^{α}) et (Δ, u^{β}) où $\Omega, \Delta \subset M_4$ sont des ouverts tels que $\Omega \cap \Delta \neq \emptyset$. Alors la transition de ces cartes sera donnée par les fonctions hypercomplexes de transition $u^{\alpha} = u^{\alpha}(x^{\beta})$ vérifiant les équations de p-holomorphie $Du = 0$ données par (19). Les variétés M_4 équipées d'atlas équivalents p-holomorphes sont munies de la Q-structure du groupe GL(1, Q) (resp. de la τ-structure du groupe GL(1, τ), sous-groupe clos du groupe général bicomplexe GL (2, C). Grâce à l'Annexe, on voit que M_4 peut être doté naturellement d'une métrique riemannienne (resp. hyperbolique normale), ce qui réduit la généralité du groupe structurel à son intersection avec $O\,(4, \mathrm{R})$ (resp. $O^1\,(4, \mathrm{R})$).

Si on considère une connexion compatible avec la Q-structure (resp. la τ-structure), nous aurons sur M_4 la dérivation covariante hypercomplexe à l'aide de laquelle on peut définir les opérateurs D et Δ_p sur M_4.

R e m a r q u e. Les opérateurs D et Δ_p ont été adaptés en vue d'être appliqués aux fonctions définies sur les espaces vectoriels hypercomplexes $A^p\,(p \geqq 1)$, où A est une algèbre associative [1, 3], et, en particulier sur $Q^p\,(\tau^p)$. En procédant comme ci-dessus, on peut définir par des atlas p-holomorphes les C^{ω}-variétés M_{4p} munies de la Q-structure (τ-structure). Si la Q-structure peut être considérée aujourd'hui comme classique, par contre la structure tétranionique est encore inconnue. Donc les tétranions introduits jadis par Emanouil Ivanov [4] ont maintenant la perspective de devenir une nouvelle structure mathématique capable d'être utilisée en relativité.

Enfin, toutes les structures algébriques de l'Annexe méritent d'être plus profondément étudiées puisqu'elles se prêtent aussi aux applications en physique.

Métrique : Déf.: $\langle x, y \rangle = (x, y^*)^0 e_0$;

$$\langle x, x \rangle = \| x \|^2 = (xx^*)\, e_0.$$

E x e m p l e. $A = \mathrm{C}$, $\mathscr{A}_{\sigma}$ $\| x \|^2 = (x^0)^2 + (x^1)^2 + k(x^2)^2 + k\delta(x^3)^2$

$A = \mathrm{Q}$, $\mathscr{A}_{\sigma}$

$$\| x \|^2 = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 \pm (x^3)^2 + k[(x^4)^2 + \delta(x^5)^2 + \delta(x^6)^2 \pm \delta(x^7)^2].$$

$A \to \mathscr{A}_{\sigma}$-groupe d'invariance $A^p \to \mathscr{A}^p \approx A^{2p}$, $p \geqq 1$.

$$\mathrm{GL}(p, \mathscr{A}) \to \mathrm{GL}(p, \mathscr{A}_{\sigma}) \subset \mathrm{GL}\,(2p, \mathscr{A}) \subset \mathrm{GL}(2p \dim \mathscr{A}, \mathrm{R})$$

E x e m p l e. $\mathrm{GL}(p, Q(\tau)) \subset \mathrm{GL}(2p, \mathrm{C}) \subset \mathrm{GL}(4p, \mathrm{R})$,

$$\mathrm{GL}(p, \mathscr{A}(\omega)) \subset \mathrm{GL}(2p, Q(\tau)) \subset \mathrm{GL}(4p, \mathrm{C}) \subset \mathrm{GL}(8p, \mathrm{R}).$$

Annexe. La duplication des algèbres $A=\mathbf{C}$, Q et τ à l'aide de $\mathbf{C}$, D et Δ

$A=R$, $A=\mathbf{C}$, D, Δ

	e_0	e_0'
e_0	e_0	e_0'
e	e_0'	$k\ e_0$

$$k=\begin{cases} -1 : \mathbf{C} \\ 1 : D \\ 0 : \Delta \end{cases}$$

$A=\mathbf{C}$, $A=Q$, τ, etc . . .

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	δe_3	$k\ e_0$	$k\ \delta e_1$
e_3	e_3	δe_2	$k\ e_1$	$-k\ \delta e_0$

$$\delta=\begin{cases} -1 : \text{Cayley} \\ +1 : \text{“complexification“} \end{cases}$$

Q	τ
$++++$	$+++-$
$++--$	$++-+$
$++\circ\circ$	$++\circ\circ$
$++\circ\circ$	$++\circ\circ$

Q — quaternions
τ — tetranions

	$\delta=-1$	$\delta=+1$
$k=-1$	Q	τ
$k=1$	anti Q	anti τ
$k=0$	semi Q	semi τ

$A=Q$, τ $A=\sigma$, ω, etc . . .

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	e_7	$-e_6$
e_2	e_2	$\pm e_3$	$-e_0$	$\pm e_1$	e_6	$\pm e_7$	$-e_4$	$\pm e_5$
e_3	e_3	$\pm e_2$	$-e_1$	$\pm e_0$	e_7	$\pm e_6$	$-e_5$	$\pm e_4$
e_4	e_4	δe_5	δe_6	δe_7	$k\ e_0$	$\delta k e_1$	$\delta k e_2$	$\delta k e_3$
e_5	e_5	$-e_4$	δe_7	$-\delta e_6$	$k\ e_1$	$-\delta k e_0$	$\delta k e_3$	$-\delta k e_2$
e_6	e_6	$\pm\delta_7$	δe_4	$\pm\delta e_5$	$k\ e_2$	$\pm\delta k e_3$	$-\delta k e_0$	$\pm\delta k e_1$
e_7	e_7	$\pm\delta_6$	$-\delta e_5$	$\pm\delta e_4$	$k\ e_3$	$\pm\delta k e_2$	$-\delta k e_1$	$+\delta k e_0$

σ	ω
anti σ	anti ω
semi σ	semi ω
Q (C)	τ (C)
Q (D)	τ (D)
Q (Δ)	τ (Δ)

ω — octonions
σ — octaves

REFERENCES

1. A. Bejancu, Gh. Gheorgiev. *Memoriile secț. șt. Acad. Rom.*, **5**, 1982, 37-52.
2. Gh. Gheorghiev, V. Oproiu. Varietăți diferențiabile. București, 1976-1979.
3. Gh. Gheorghiev. *Memoriile secț. șț. Acad. Rom.*, **2**, 1979, 7-39; **5**, 1982, 27-36; *Conf. Geom. Top.*, Piantra Neamt., 1983, 86-93; *Conf. Geom. Top.*, Timișoara, 1984, 84-92.
4. Em. Ivanov. *Annuaire de l'Université de Sofia*, **2**, 1905-1906.
5. Gr. Moisil. *Bull. Sci. Math.*, **15**, 1931, 169-174; *Extraits du 64-ème Congrès des Sociétés savantes*. Clermond-Ferrant, 1931, 129-138.
6. D. Pompeiu. *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo*, **33**, 1912, 108-113.
7. A. Sagle. *Canadian Math., J.*, **17**, 1965, 556-568.

Str. Flamura Roșie 8, sc. D
6600 Iași, România

Received 27. 9. 1986