СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ "ИВАН САЛАБАШЕВ" - СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир "Иван Салабашев"

29 ноември 2003 г.

Тема за 7 клас

(време за работа 120 минути)

След всяка задача има 5 отговора, само един от които е верен. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. За посочен верен отговор се присъжда по 1 точка. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници в Турнира може да намерите на адрес www.math.bas.bg

Журито Ви пожелава приятна работа.

1. Стойността на израза $\dfrac{10^6.15^3.(-8)^4.9^7}{125^3(-6)^2 3^{15} 4^{10}}$ е:

А) -4; **Б)** $\frac{1}{8}$; **В)** $\frac{1}{16}$; **Г)** $-\frac{3}{4}$; **Д)** $\frac{1}{5}$.

2. Стойността на израза $\dfrac{55^2+2.55.45+45^2}{55^2-45^2}$ е:

А) $0,1$; **Б)** 100; **В)** 10; **Г)** 1; **Д)** $0,2$.

3. Коефициентите пред x^2 и x в нормалния вид на многочлена $(x-2)^3+(x-1)^3+x^3+(x+1)^3+(x+2)^3$ са съответно:

А) 30 и 0; **Б)** 6 и 6; **В)** 4 и 30; **Г)** 4 и 0; **Д)** 0 и 30.

4. Ако числото $\overline{bc1}$ се дели на 3, числото $\overline{1bc}$ се дели на 4, а числото $\overline{c1b}$ се дели на 5, то c е равно на:

А) 2; **Б)** 3; **В)** 5; **Г)** 9; **Д)** 6.

5. Решението на уравнението $\dfrac{x}{4}+\dfrac{x-1}{3}=x$ е:

А) $-\frac{4}{5}$; **Б)** 0; **В)** -1; **Г)** -2; **Д)** $\frac{2}{3}$.

6. Какъв остатък дава число при деление на 60, ако при делението на това число с 6 се получава остатък 4, при деление с 10 - остатък 8 и при деление с 12 - остатък 10?

А) 4; **Б)** 8; **В)** 12; **Г)** 20; **Д)** 58.

7. Най-голямото цяло решение на неравенството $\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3}<12$ е:

А) 71; **Б)** 72; **В)** 70; **Г)** -70; **Д)** 10.

8. За рождения си ден госпожица Рог направила огромна торта. Тортата и Дребосъчето тежали толкова, колкото Карлсон и госпожица Рог заедно. След като тортата е била изядена от тримата, Карлсон тежал колкото госпожица Рог и Дребосъчето. Парчето торта, изядено от Карлсон, е тежало колкото:

А) госпожица Рог преди рождения ден; **Б)** половината от теглото на госпожица Рог преди рождения ден; **В)** Дребосъчето след рождения ден; **Г)** Карлсон преди рождения ден; **Д)** Дребосъчето преди рождения ден.

9. Кои от посочените числа едновременно са решения на неравенството $(x-1)^2+(x-2)^2>2(x+1)^2$:

А) -1 и $\frac{1}{2}$; **Б)** 1 и $-\frac{1}{2}$; **В)** $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{2}$; **Г)** $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$; **Д)** $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{5}$.

10. Проверете кое от посочените числа не е решение на неравенството $2|5x-3|+3<|15x-9|$!

А) $-\frac{1}{5}$; **Б)** $\frac{3}{5}$; **В)** 2; **Г)** $-\frac{3}{5}$; **Д)** -1.

11. Ученик трябвало да реши определен брой задачи за 4 дни. През първия ден той решил 5 задачи, през втория $20\frac{20}{39}\%$ от всички задачи, през третия с 3 повече от втория и през четвъртия 3 пъти повече от първия. Колко задачи е решил ученикът?

А) 40; **Б)** 39; **В)** 38; **Г)** 41; **Д)** 30.

12. Сума от 2000 лв. е внесена на срочен влог за една година при лихва 5%. След 2 години сумата е:

А) 2100 лв.; **Б)** 2200 лв.; **В)** 3000 лв.; **Г)** 2210 лв.; **Д)** 2205 лв..

13. Басейн се пълни от две тръби, като поотделно напълват половината от басейна съответно за 2 и 3 часа. За колко време двете тръби заедно ще напълнят басейна?

А) 3 ч.; **Б)** 4 ч.; **В)** 2 ч. 24 мин.; **Г)** 2 ч. 12 мин.; **Д)** 2 ч. 30 мин..

14. Медта в една сплав е 75%. Колко грама чиста мед трябва да се добави към 800 г. от тази сплав, за да се повиши медното съдържание до 80%.

А) 100; **Б)** 200; **В)** 300; **Г)** 400; **Д)** 500.

15. Десет мъже пренасят товар на разстояние 3 км за общо 120 лв. След първия километър двама си тръгнали, а след втория километър се отказали още трима. По колко трябва да се плати на всеки от останалите петима?

А) 12; **Б)** 17; **В)** 18; **Г)** 20; **Д)** 24.

16. Всеки от три поредни месеца има по 4 недели. Кой от изброените месеци на годината със сигурност не е между тези три?

А) януари; **Б)** февруари; **В)** март; **Г)** април; **Д)** ноември.

17. Колко са на брой трицифрените числа с равни цифри на единиците и десетиците?

А) 81; **Б)** 90; **В)** 72; **Г)** 88; **Д)** 99.

18. Последната цифра на числото 3^{2003} е:

А) 2; **Б)** 9; **В)** 7; **Г)** 3; **Д)** 1.

19. Хърмаяни Грейнджър има всевъзможните 24 блокчета от два материала (дърво и пластмаса), три цвята (син, зелен и червен) и 4 форми (триъгълник, четириъгълник, петоъгълник и кръг). Чрез вълшебната дума "иняамрърх" тя отделила блокчетата, които са различни точно по два признака от дървения син триъгълник. Колко са отделените блокчета?

А) 24; **Б)** 5; **В)** 6; **Г)** 10; **Д)** 11.

20. Сбора от двете числа във всяка от четирите двойки $(1, 1)$, $(-1, 1)$,$(1, -1)$ и $(-1, -1)$ се вдига на квадрат. Колко е сумата на получените четири квадрата?

А) 4; **Б)** 16; **В)** 0; **Г)** 8; **Д)** 10.

21. Броят на футболните мачове в група от 16 отбора (всеки срещу всеки по един мач) е:

А) 125; **Б)** 256; **В)** 200; **Г)** 120; **Д)** 240.

22. По колко начина могат да се изберат две от числата $1, 2, 3, 4, 5$ така, че да не са поредни?

А) 3; **Б)** 4; **В)** 5; **Г)** 6; **Д)** 7.

23. По колко начина може да се избере тричленна комисия измежду 6 души?

А) 21; **Б)** 20; **В)** 9; **Г)** 18; **Д)** 11.

24. Ако за ъглите α, β и γ на един триъгълник е известно, че $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$, то разликата между γ и α е:

А) 45°; **Б)** 50°; **В)** 60°; **Г)** 30°; **Д)** 40°.

25. Точките A, B и C лежат на една права, като B е между A и C. Ако $AC = 24$ сантиметра и $AB : BC = 1 : 2$, то разстоянието между средите на AB и AC в сантиметри е:

А) 8; **Б)** 12; **В)** 16; **Г)** 2; **Д)** 15.

26. В триъгълник с ъгъл 144° един от ъглите е три пъти по-голям от друг. Най-малкият ъгъл е:

А) 9°; **Б)** 30°; **В)** 48°; **Г)** 12°; **Д)** 16°.

27. Том Сойер разполага с бяла, зелена и червена боя. По колко начина той може да боядиса седемте дъски от оградата на леля си така, че всяка дъска да е боядисана в един от тези цветове и никои две съседни дъски да не са едноцветни?

А) 21; **Б)** 343; **В)** 128; **Г)** 192; **Д)** 2187.

28. В $\triangle ABC$ с лице 24 върху медианата AM е взета вътрешна точка P така, че $AP : PM = 1 : 3$. Лицето на $\triangle BMP$ е:

А) 6; **Б)** 7; **В)** 8; **Г)** 9; **Д)** 12.

29. В остроъгълен триъгълник ъгълът между височините през върховете A и B е 140°. Колко градуса е ъгълът между ъглополовящите на ъгъл A и ъгъл B?

А) 90; **Б)** 100; **В)** 110; **Г)** 120; **Д)** 130.

30. В $\triangle ABC$ с лице 144 върху страната AB са взети вътрешни точки D и E (D е между A и E) така, че $AD : DE = BE : AE = 1 : 2$. Лицето на $\triangle CDE$ е:

А) 64; **Б)** 72; **В)** 108; **Г)** 36; **Д)** 44.

Математически турнир "Иван Салабашев"

29 ноември 2003 г.

Решения на задачите от темата за 7 клас

1. Отговор: В. $\dfrac{10^6.15^3.(-8)^4.9^7}{125^3(-6)^2 3^{15} 4^{10}} = \dfrac{2^6.5^6.3^3.5^3.2^{12}.3^{14}}{5^9.2^2.3^2.3^{15}.2^{20}} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$.

2. Отговор: В. Използваме формулите за съкратено умножение и съкращаваме:
$\dfrac{55^2+2.55.45+45^2}{55^2-45^2} = \dfrac{(55+45)^2}{(55+45)(55-45)} = 10.$

3. Отговор: Д. Коефициентът пред x^2 е $-6-3+3+6=0$, а този пред x е $12+3+3+12=30$.

4. Отговор: Д. От условието $\overline{c1b}$ се дели на 5 следва, че $b=0$ или $b=5$. Първото е невъзможно тъй като $\overline{bc1}$ не може да започва с 0 и следователно $b=5$. От условието $\overline{15c}$ се дели на 4 следва, че $c=2$ или $c=6$, а от условието $\overline{5c1}$ се дели на 3 следва, че c се дели на 3.Следователно $c=6$

5. Отговор: А. Освобождаваме се от знаменател и получаваме $3x+4(x-1)=12x \iff 5x=-4$ с решение $x=-\dfrac{4}{5}$.

6. Отговор: Д. Ако прибавим 2 към числото, то ще се дели на 6, 10 и 12. Следователно числото плюс две се дели на $\text{НОК}(6,10,12)=60$, откъдето следва, че остатъкът при деление с 60 е $60-2=58$.

7. Отговор: В. Освобождаваме се от знаменател и получаваме $3(x-1)-2(x-2)=72 \iff x<71$, т.е. най-голямото цяло решение е 70.

8.Отговор: А. След рождения ден,

гладен Карлсон + неговото парче = гладни г-ца Рог и Дребосъче + останалата част от тортата.

Следователно,

гладен Карлсон + 2. неговото парче = гладни г-ца Рог и Дребосъче + цялата торта.

Тъй като в началото

цялата торта + гладното Дребосъче = гладни Карлсон и г-ца Рог,

получаваме, че

гладен Карлсон + 2 . неговото парче = гладен Карлсон и две гладни г-ци Рог.

Оттук лесно следва, че изяденото от Карлсон парче тежи колкото госпожица Рог преди рождения ден.

9. Отговор: Г. Решенията на неравенството са $x<\dfrac{1}{3}$, като само числата $\dfrac{1}{4}$ и $\dfrac{1}{6}$ измежду посочените двойки удовлетворяват едновременно това неравенство.

10. Отговор: Б. Проверката показва, че $\dfrac{3}{5}$ не е решение.

11. Отговор: Б. Ако задачите са x, то $5+\frac{8x}{39}+\frac{8x}{39}+3+15=x$, откъдето $x=39$.

12. Отговор: Д. След една година сумата е $1.05\times 2000=2100$, а след две години $1.05\times 2100=2205$.

13. Отговор: В. За един час тръбите пълнят съответно по $1/4$ и $1/6$ от басейна. Ако търсеното време е t, то $t/4+t/6=1$, откъдето $t=2\frac{2}{5}$.

14. Отговор: Б. Ако търсеното количество е x г., то $\dfrac{75}{100}.800+x=\dfrac{80}{100}(800+x)$, откъдето $x=200$.

15.Отговор: Б. За пренасяне на товара на един километър се плащат 40 лв. Всеки от десетимата мъже ще получи от пренасянето на първия километър по $40:10=4$ лв. Всеки от осемте мъже ще получи от пренасянето на втория километър по $40:8=5$ лв. Всеки от петимата, донесли товара до края, ще получи от пренасянето на третия километър по $40:5=8$ лв; общо $4+5+8=17$ лв.

16. Отговор: Д. Ако между месеците не се среща февруари, дните на трите поредни месеца са общо поне 91. Но 91:7=13 и следователно неделите са 13. Измежду посочените месеци само ноември не е достатъчно близък съсед на февруари.

17.Отговор: Б. За равните втора и трета цифра имаме 10 възможности, а за първата цифра 9 възможности. Следователно търсеният брой е $9.10=90$.

18. Отговор: В. Последните цифри на степените на 3 се повтарят циклично през четири. Тъй като $2002 = 4.500 + 3$, последната цифра на 3^{2003} е същата, както и последната цифра на 3^3, т.е. 7.

19. Отговор: Д. За разлика по материал имаме единствена възможност, за разлика по цвят имаме две възможности, а за разлика по форма имаме три възможности. Тогава за разлика по материал и цвят има две възможности, за разлика по материал и форма – три възможности, за разлика по цвят и форма – шест възможности. Общо получаваме $2 + 3 + 6 = 11$ блокчета, които се различават точно по два признака от дървения син триъгълник.

20.Отговор: Г. Сборовете са $2, 0, 0, -2$, а квадратите са съответно $4, 0, 0, 4$. Следователно търсената сума е $4 + 0 + 0 + 4 = 8$.

21. Отговор: Г. Всеки от 16-те отбора изиграва по 15 срещи, като по този начин броим всяка среща по два пъти. Следователно търсеният брой е $\dfrac{16.15}{2} = 120$.

22. Отговор: Г. Двойките непоредни числа са $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$ и $(3, 5)$.

23. Отговор: Б. Първият член може да се избере по 6 начина, вторият по 5, третия по 4, като така всяка комисия се брои по шест пъти. Следователно търсеният брой начини е $\dfrac{6.5.4}{3.2} = 20$.

24. Отговор: Д. Ако $\alpha = 2x$, то $\beta = 3x$ и $\gamma = 4x$. Тогава $2x + 3x + 4x = 180°$, откъдето $x = 20°$. Следователно $\gamma - \alpha = 40°$.

25. Отговор: А. Тъй като $AB = 8$ и $BC = 16$, средата на AB се намира на 4 см от A, а средата AC на 12 см от A. Разстоянието между тези среди е $12 - 4 = 8$ см.

26. Отговор: А. Лесно се съобразява, че ъглите на триъгълника са x, $3x$ и $144°$, откъдето следва, че $4x = 180° - 144° = 36°$, т.е. най-малкият ъгъл е $x = 9°$.

27. Отговор: Г. За първата дъска има 3 възможности, а цветът на всяка следваща се избира измежду двата цвята, различни от цвета на предната дъска. Следователно различните боядисвания са $3.2^6 = 192$.

28. Отговор: Г. Имаме $S_{ABM} = S_{ABC}/2 = 12$. Триъгълниците ABM и BMP имат обща височина от върха B, а съответните на тази височина страни AM и MP се отнасят както $4 : 3$. Следователно $S_{BMP} = 3S_{ABM}/4 = 9$.

29. Отговор: В. Ъгълът между височините през върховете A и B е равен на $\sphericalangle C$ или $180° - \sphericalangle C$. Тъй като триъгълникът е остроъгълен, $\sphericalangle C = 40°$. Тогава ъгълът между ъглополовящите на $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ е равен на $90° + \dfrac{\sphericalangle C}{2} = 110°$.

30.Отговор: А. Ако означим $BE = x$ и $AD = y$, то $AE = 2x$ и $DE = 2y$, откъдето $2x = AE = AD + DE = 3y$. Тогава

$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = \frac{DE}{AB} = \frac{2y}{3x} = \frac{4}{9}.$$

Следователно $S_{CDE} = 4S_{ABC}/9 = 64$.

Задачите от тази тема са предложени от Петър Бойваленков.