СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

СЕКЦИЯ "ИВАН САЛАБАШЕВ" - СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир "Иван Салабашев"

29 ноември 2003 г.

Тема за 8-9 клас

(време за работа 120 минути)

След всяка задача има 5 отговора, само един от които е верен. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. За посочен верен отговор се присъжда по 1 точка. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници в Турнира може да намерите на адрес www.math.bas.bg

Журито Ви пожелава приятна работа.

1. Медта в една сплав е 75%. Колко грама чиста мед трябва да се добави към 800 г. от тази сплав, за да се повиши медното съдържание до 80%.

А) 100; **Б)** 200; **В)** 300; **Г)** 400; **Д)** 500.

2. Страните на правоъгълник са намалени с 40%. Лицето му се намалява с:

А) 20%; **Б)** 36%; **В)** 40%; **Г)** 64%; **Д)** 80%.

3. Хърмаяни Грейнджър има всевъзможните 24 блокчета от два материала (дърво и пластмаса), три цвята (син, зелен и червен) и 4 форми (триъгълник, четириъгълник, петоъгълник и кръг). Чрез вълшебната дума "иняамрърх" тя отделила блокчетата, които са различни точно по два признака от дървения син триъгълник. Колко са отделените блокчета?

А) 24; **Б)** 5; **В)** 6; **Г)** 10; **Д)** 11.

4. Последната цифра на числото $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \cdots + 2001.2002.2003$ е:

А) 0; **Б)** 2; **В)** 4; **Г)** 6; **Д)** 8.

5. В остроъгълен триъгълник ъгълът между височините през върховете A и B е 140°. Колко градуса е ъгълът между ъглополовящите на ъгъл A и ъгъл B?

А) 90; **Б)** 100; **В)** 110; **Г)** 120; **Д)** 130.

Отг В

6. Ако $xyz = 1$, $x + \dfrac{1}{y} = 2$ и $y + \dfrac{1}{z} = 3$, то $z^2 + \dfrac{1}{x^2}$ е:

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4; **Д)** 6.

7. Нека G е медицентърът на $\triangle ABC$ с лице 1. Точките P и Q разделят отсечката AG на три равни части. Ако M е средата на страната AB, то лицето на $\triangle MPQ$ е:

А) $\dfrac{1}{3}$; **Б)** $\dfrac{1}{6}$; **В)** $\dfrac{1}{9}$; **Г)** $\dfrac{1}{12}$; **Д)** $\dfrac{1}{18}$.

8. Най-малкото естествено число n, за което съществува цяло число m така, че $0,33 < \dfrac{m}{n} < 0,(3)$, е:

А) 100; **Б)** 101; **В)** 102; **Г)** 103; **Д)** 104.

9. За коя стойност на параметъра a уравнението $|x+1| - |2x-1| = 3x + a$ има безбройно много решения:

А) -2; **Б)** -1; **В)** 0; **Г)** 1; **Д)** 2.

10. В годината, в която съм се родил, 300-ят ден е бил понеделник, а на следващата година 200-ят ден също е бил понеделник. Кой ден от седмицата е бил 100-ят ден в годината, преди да се родя ?

А) понеделник; **Б)** вторник; **В)** сряда; **Г)** четвъртък; **Д)** петък.

11. В турнир по футбол участват четири отбора, които играят всеки срещу всеки. За победа се присъждат 3 т., за равен - 1 т., а за загуба - 0 т. Ако в крайното класиране отборите имат различен брой точки, то максималният брой точки, които може да има последният, е:

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3; **Д)** 4.

12. Ако сумата на няколко последователни естествени числа е 2003, то техният брой е:

А) 2; **Б)** 4; **В)** 6; **Г)** 8; **Д)** 10.

13. Сумата от последните две цифри на числото 6^{2003} е:

А) 1; **Б)** 3; **В)** 5; **Г)** 7; **Д)** 9.

14. Нека M е средата на страната BC на правоъгълник $ABCD$. Ако точка K върху страната CD е такава, че $\sphericalangle BAM = \sphericalangle KAM$, то $\sphericalangle AMK$ е:

А) 30°; **Б)** 45°; **В)** 60°; **Г)** 75°; **Д)** 90°.

15. Броят на тройките (x, y, z) от естествени числа, за които $xy + yz + zx = xyz + 2$, е:

А) 2; **Б)** 4; **В)** 6; **Г)** 7; **Д)** 9.

16. Броят на стойностите на параметъра a, за които неравенството $\dfrac{2x + a^2 + 1}{x - a} \le 1$ няма решение, е:

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3; **Д)** 4.

17. Едно трицифрено число с различни ненулеви цифри ще наричаме "лошо", ако сумата му с останалите пет трицифрени числа, имащи същите цифри, е точен квадрат. Броят на "лошите" числа е:

А) 0; **Б)** 6; **В)** 12; **Г)** 18; **Д)** 24.

18. Редицата $2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, \ldots$ съдържа естествените числа, които не са точни квадрати или кубове. Числото, записано на 500-то място, е:

А) 524; **Б)** 525; **В)** 526; **Г)** 527; **Д)** 528.

19. Броят на целите числа n, за които $n^4 + 4$ е просто число, е:

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3; **Д)** 4.

20. Във всяка клетка на таблица 5×5 е написано 0 или 1 така, че в клетките на всеки квадрат 2×2 има точно три равни числа. Сумата на числата от таблицата може да бъде най-много:

А) 15; **Б)** 17; **В)** 19; **Г)** 21; **Д)** 23.

21. Едно естествено число ще наричаме "добро", ако неговите цифри са измежду 3, 5 и 7, а тяхната сума се дели на 3, 5 и 7. Броят на цифрите на най-малкото "добро" число е:

А) 3; **Б)** 5; **В)** 7; **Г)** 15; **Д)** 21.

22. На колко най-много е равно частното на най-големия общ делител на $a+b$, $b+c$ и $c+a$ и най-големия общ делител на a, b и c, където a, b и c са естествени числа?

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4; **Д)** 6.

23. Броят на естествените числа n, по-малки от 20, за които $n+1$ дели произведението на числата от 1 до n, е:

А) 6; **Б)** 7; **В)** 8; **Г)** 9; **Д)** 10.

24. По колко начина дробта $\frac{1}{2003}$ може да се представи като сума от реципрочните на две естествени числа?

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 4; **Д)** 5.

25. Кое от посочените по-долу числа принадлежи на редицата $3, 18, 53, 116, \ldots$?

А) 2003; **Б)** 2013; **В)** 2023; **Г)** 2033; **Д)** 2043.

26. Броят на петцифрените числа, записани с цифрите $0, 1, 1, 2, 3$, е:

А) 24; **Б)** 36; **В)** 48; **Г)** 60; **Д)** 72.

27. Две конфигурации от по четири прави в равнината ще наричаме нееквивалентни, ако броят на различните пресечни точки на правите от първата конфигурация не е равен на този от втората. Максималният брой на две по две нееквивалентни коннфигурации от по четири прави е:

А) 3; **Б)** 4; **В)** 5; **Г)** 6; **Д)** 7.

28. Колко прави съдържа множеството от точки с координати (x, y), за които $|x^2 - y^2| = x + y$?

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3; **Д)** безбройно много.

29. Ако точките K и L съответно върху страните AB и BC на $\triangle ABC$ са такива, че $AK = 3BK$, $BK = KL = LC$ и $\sphericalangle BKL = 2 \sphericalangle BAC$, то $\sphericalangle BAC$ е:

А) 15°; **Б)** 30°; **В)** 45°; **Г)** 60°; **Д)** 75°.

30. Броят на двойките (x, y) от цели числа, за които $x^2 - y^2 = 100^2$, е:

А) 15; **Б)** 16; **В)** 28; **Г)** 30; **Д)** 32.

Математически турнир "Иван Салабашев"

29 ноември 2003 г.

Решения на задачите от темата за 8-9 клас

1. Отговор: (Б). Ако търсеното количество е x г., то $\frac{75}{100}.800 + x = \frac{80}{100}(800 + x)$, откъдето $x = 200$.

2. Отговор: (Г). Лицето се намалява със $100(1 - (1 - 0,4)^2) = 64$ процента.

3. Отговор: (Д). За разлика по материал имаме единствена възможност, за разлика по цвят имаме две възможности, а за разлика по форма имаме три възможности. Тогава за разлика по материал и цвят има две възможности, за разлика по материал и форма – три възможности, за разлика по цвят и форма – шест възможности. Общо получаваме $2 + 3 + 6 = 11$ блокчета, които се различават точно по два признака от дървения син триъгълник.

4. Отговор: (Г). Очевидно последната цифра на $(n + 10)(n + 11)(n + 12)$ съвпада с последната цифра на $n(n + 1)(n + 2)$ за всяко цяло число n. Последните цифри на първите 10 събираеми са $6, 4, 0, 0, 0, 6, 4, 0, 0, 0$. Следователно сборът на $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \cdots + 2000.2001.2002$ завършва на 0 и следователно търсената цифра е 6.

5.Отговор: (В). Ъгълът между височините през върховете A и B е равен на $\sphericalangle C$ или $180^\circ - \sphericalangle C$. Тъй като триъгълникът е остроъгълен, $\sphericalangle C = 40^\circ$. Тогава ъгълът между ъглополовящите на $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ е равен на $90^\circ + \frac{\sphericalangle C}{2} = 110^\circ$.

6.Отговор: (А). Понеже

$$2 = x + \frac{1}{y} = \frac{1}{yz} + \frac{1}{y} = \frac{1}{y}(3 - y + 1) = \frac{4}{y} - 1,$$

то $y = \frac{4}{3}$ и тогава $x = \frac{5}{4}$, $z = \frac{3}{5}$, $z^2 + \frac{1}{x^2} = 1$.

7.Отговор: (Д). $S_{\triangle MPQ} = \frac{S_{\triangle AMG}}{3} = \frac{S_{\triangle AMC}}{9} = \frac{S_{\triangle ABC}}{18} = \frac{1}{18}$.

8.Отговор: (Г). От първото неравенство следва, че $100m \geq 33n+1$, а от второто - $n \geq 3m+1$, и значи $100m \geq 33(3m + 1) + 1$. Тогава $m \geq 34$, $n \geq 103$, като $0,33 < \frac{34}{103} < 0,(3)$.

9. Отговор: (В). (срв. със Задача 15 за 8-9 клас, 2002 г.) Стойността на $|x+1|-|2x-1|$ е $(x+1)-(2x-1) = -x + 2$ при $x \geq \frac{1}{2}$, $(x + 1) + (2x - 1) = 3x$ при $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ и $-(x + 1) + (2x - 1) = x - 2$. Следователно уравнението има безбройно много решения само когато някой от тези изрази съвпада с $3x+a$, откъдето $a = 0$.

10. Отговор: (В). Ако рождената година не била е високосна, понеже $365-300+200 = 265 \equiv 6 (\text{mod } 7)$, то 200-ят ден от следващата е бил шест дни по-късно от понеделник, т.е. неделя. Значи тази година е била високосна. Тогава предходната не е била високосна и тъй като $365 - 100 + 300 = 565 \equiv 5 (\text{mod } 7)$ и сряда е пет дни по-рано от понеделник, то 100-ят ден от нея е бил сряда.

11. Отговор: (В). Ако последният отбор има поне 3 т., то сумата на всички точки е поне 3+4+5+6=18. Това е максималният възможен брой точки и той се постига, ако няма равни срещи, но тогава точките на всеки отбор се делят на 3. Следователно четвъртият има най-много 2 т. Това може да се реализира само по един начин: първият печели срещу втория, втория срещу четвъртия, а останалите срещи са равни. При това точките в низходящ ред са 5,4,3,2.

12. Отговор: (А). Ако числата са $m + 1, m + 2, \ldots, n$, то тяхната сума е

$$\frac{n(n + 1)}{2} - \frac{m(m + 1)}{2}.$$

Следователно $(n - m)(n + m + 1) = 2.2003$ и понеже 2003 е просто число,а $n - m \geq 2$, то $n - m = 2$.

13. Отговор: (Г). (срв. със Задача 18 за 7-8 клас, 2001 г.) Стойността на функцията на Ойлер за числото 25 е 20. Следователно $6^{20} \equiv 1(25)$, откъдето $6^{2003} \equiv 6^3(25) \equiv 16(25)$. От друга страна, $6^{2003} \equiv 0(4) \equiv 16(4)$ и значи последните две цифри на числото 6^{63} са 1 и 6.

14. Отговор: (Д). Ако $L = AM \cap CD$, то $\sphericalangle KAL = \sphericalangle BAM = \sphericalangle KLA$. От друга страна, $\triangle ABM \cong \triangle LCM$ по втори признак и значи $AM = LM$. И така, KM е медиана към основата на равнобедрения $\triangle ALK$, откъдето следва, че $\sphericalangle AMK = 90°$.

15. Отговор: (Г). Нека $x \leq y \leq z$. Ако $x = 1$, то $y + z = 2$, откъдето $y = z = 1$. Ако $x = 2$, следва, че $(y-2)(z-2) = 2$, т.е. $y = 3, z = 4$. Остава да забележим, че при $x \geq 3$ имаме $xyz \geq 3xy$, $xyz \geq 3yz$, $xyz \geq 3zx$ и значи $xyz \geq xy + yz + zx$.

16. Отговор: (Б). Имаме, че $\dfrac{2x + a^2 + 1}{x - a} - 1 = \dfrac{(x + a^2 + a + 1)}{(x - a)}$. Следователно даденото неравенство няма решение само когато $a^2 + a + 1 = -a$, откъдето $(a+1)^2 = 0$, т.е. $a = -1$.

17.Отговор: (А). Ако $\overline{abc}$ е "лошо" число, то

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bca} + \overline{bac} + \overline{cab} + \overline{cba} = 2(10^2 + 10 + 1)(a + b + c) = 2.3.37(a + b + c)$$

е точен квадрат и значи 37 дели $a + b + c$. Понеже тази сума е положителна и не надминава $7 + 8 + 9 = 24 < 37$, следва, че не съществуват "лоши" числа.

18. Отговор: (Д). Между 1 и 500 има $[\sqrt{500}] = 22$ точни квадрата и $[\sqrt[3]{500}] = 7$ точни. Два пъти са броени точните шести степени: 1 и 64. Следователно 500-22-7+2=473 числа между 1 и 500 са членове на дадената редица. Значи трябва да добавим още 27 числа. Понеже от числата 501,502,...,527 не можем да изпозваме само $512 = 8^3$, то 500-то число е 528.

19. Отговор: (В). Имаме, че $n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$ и ако това число е просто, то $n^2 - 2n + 2 = \pm 1$ или $n^2 + 2n + 2 = \pm 1$. Оттук следва, че $(n-1)^2 = 0$, $(n-1)^2 = -2$, $(n+1)^2 = 1$ или $(n+1)^2 = -2$. Значи $n = \pm 1$, като тогава $n^4 + 4 = 5$.

20. Отговор: (Г). Ако разбием квадрата 4×4 горния ляв ъгъл на таблицата на четири непресичащи се квадрата 2×2, от условието следва, че сумата на числата в него не надминава $4.3 = 12$. Значи сумата на числата от таблицата не надминава 21. Това число може да се реализира, като напишем нули в клетките (2,2), (2,4), (4,2) и (4,4), а на останалите места попълним единици.

21. Отговор: (Г). Сумата от цифрите на всяко "добро" число се дели на 105 и понеже най-голямата му цифра не надминава 7, то има поне 105:7=15 цифри. Този брой се реализира само ако всичките 15 цифри са 7.

22. Отговор: (Б). Имаме, че НОД$(a + b, b + c, c + a)$ дели $a + b - b - c + c + a = 2a$ и аналогично дели $2b, 2c$. От друга страна, НОД$(2a, 2b, 2c) = 2$НОД(a, b, c) и следователно разглежданото цяло число може да бъде най-много 2. Това се реализира, ако например $a = b = c$.

23. Отговор: (Д). Ако $n + 1$ е просто число, ясно е, че $n + 1$ не дели $n!$, а ако $n + 1$ се разлага на произведение от две различни числа, по-големи от 1, то очевидно $n + 1$ дели $n!$. Остава да разгледаме случая, когато $n + 1$ е квадрат на просто число p. Тогава $n + 1$ дели $n!$ само ако $2p \leq n$, т.е. $2p \leq p^2 - 1$ или все едно $p \neq 2$. И така, $n + 1$ дели $n!$ точно когато $n + 1$ е съставно число, различно от 4.

24. Отговор: (В). Равенството $\dfrac{1}{2003} = \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}$, $m \geq n$, записваме във вида $(m - 2003)(n - 2003) = 2003^2$. Понеже 2003 е просто числа, следва, че $m - 2003 = n - 2003 = 2003$ или $m - 2003 = 2003^2,\ n - 2003 = 1$, т.е. $m = n = 4006$ или $m = 2003.2004,\ n = 2004$.

25. Отговор: (Б). Лесно се съобразява, че n-ят член на редицата е

$$S_n = 1.3 + 3.5 + \ldots + (2n-1)(2n+1) = 2^2 - 1 + 4^2 - 1 + \ldots + (2n)^2 - 1$$

$$= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n = \frac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}$$

и тогава $S_{10} = 1520,\ S_{11} = 2013,\ S_{12} = 2588$.

26. Отговор: (В). Числата, започващи с 1, съответстват на пермутациите на 0,1,2,3, т.е. са 4!=24. Числата с първа цифра 2 съответстват на половината пермутации на четири елемента, т.е. са 12. Същото важи за числата, започващи с 3 и следователно отговорът е 24+12+12=48.

27. Отговор: (Г). Трябва да намерим колко могат да бъдат пресечните точки на четири прави. Лесно се съобразява, че те не може да са 2. От друга страна, те са не повече от 6. За всяко от числата 0,1,3,4,5,6 ще посочим конфигурация от четири прави с толкова пресечни точки: 0 - четири успоредни прави, 1 - четири прави през една точка, 3 - три прави през една точка и четвърта, успоредна на една от тях, 4 - две двойки успоредни прави, като четирите не са успоредни, 5 - три две по две пресичащи се прави и четвърта, успоредна на една от тях, но неминаваща през пресечната точка на другите две, 6 - четири две по две пресичащи се прави.

28. Отговор: (Б). Имаме, че $|x-y|.|x+y| = x+y$. Следователно $x+y \geq 0$ и даденото множество се състои от правата $x+y=0$ и лъчите $x-y=1, x+y \geq 0$ и $y-x=1, x+y \geq 0$. В частност, то съдържа само една права.

29.Отговор: (Б). Понеже $BK = KL$, то $180^\circ - 2\sphericalangle KBL = \sphericalangle BKL = 2\sphericalangle BAC$, откъдето $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Ако правата през L, успоредна на AC, пресича страната AB в точка T, то $\sphericalangle KLT = \sphericalangle BLT - \sphericalangle BLK = 90^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle CAB = \sphericalangle LTK$. Следователно $TK = LK$ и значи $TK = BK$. Сега от $AK = 3BK$ следва, че $AT = BT$, т.е. TM е средна отсечка в $\triangle ABC$. Значи $LB = LC (= BK = KL)$ и следователно $\triangle BLK$ е равностранен. В частност, $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ и тогава $\sphericalangle BAC = 30^\circ$.

30. Отговор: (Г). Първо ще разгледаме положителните решения на уравнението. Понеже $(x-y)(x+y)$ е четно число, то $x-y$ и $x+y$ са четни числа. Ако $x-y=2m$ и $x+y=2n$ следва, че $mn = 50^2 = 2^2.5^4$, като $1 \leq m < n$. Последното число има (2+1)(4+1)=15 делителя. Следователно има [15:2]=7 възможности за (m,n), а значи и толкова за положителните решения на даденото уравнение. Понеже решенията с поне една нулева компонента са (100,0) и (-100,0), отговорът е 2+4.7=30.

Задачите от тази тема са предложени от Николай Николов.