СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ "ИВАН САЛАБАШЕВ" - СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир "Иван Салабашев"

4 декември 2004 г.

Тема за 10-12 клас

(време за работа 120 минути)

След всяка от задачи от 1 до 6 има 4 отговора, само един от които е верен. Решенията на задачи 7 и 8 трябва да бъдат подробно обяснени. За верен отговор на всяка от задачите от 1 до 6 се присъждат по 3 точки. За вярно решение на всяка от задачи 7 и 8 се присъждат по 6 точки. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници в Турнира може да намерите на адрес www.math.bas.bg

Журито Ви пожелава приятна работа.

---

1. Броят на различните решения на системата $\left| \begin{array}{l} |x|+|y|=2 \\ x^2+y^2=3 \end{array} \right.$ е равен на:

А) 2; **Б)** 4; **В)** 6; **Г)** 8.

2. Нека $ABCD$ е квадрат, M е средата на страната CD и P е вътрешна точка на диагонала AC, за която $\sphericalangle BPM = 90^\circ$. Отношението $\dfrac{PC}{PA}$ е равно на:

А) 2; **Б)** 3; **В)** $\dfrac{5}{2}$; **Г)** $\dfrac{13}{4}$.

3. В правоъгълен $\triangle ABC (\sphericalangle C = 90^\circ)$ височината CH и ъглополовящата BM се пресичат в точка K и $CN (N \in AB)$ е ъглополовящата на $\sphericalangle ACH$. Ако $BK = 5$ и $CN = 12$, то дължината на отсечката MK е равна на:

А) 5; **Б)** 8; **В)** 9; **Г)** 12.

4. Нека x и y са реални числа, за които $x^2+y^2 = 14x+6y+6$. Най-голямата стойност на израза $3x+4y$ е равна на:

А) 72; **Б)** 73; **В)** 74; **Г)** 75.

5. За всяко естествено число n означаваме с $d(n)$ броя на всичките му делители (включително 1 и n). Ако $d(2n) = 28$ и $d(3n) = 30$, то $d(6n)$ е равно на:

А) 35; **Б)** 34; **В)** 33; **Г)** 32.

6. Броят на различните двойки от естествени числа (m, n), за които $(m+2)^{n-2} = (m-2)^{n+2}$ е равен на:

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3.

7. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност се допира до страните AC и BC в точки P и T. Ако медицентърът на $\triangle ABC$ лежи върху отсечката PT да се намери отношението $\dfrac{AC+BC}{AB}$.

8. Дадена е редицата

$$1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2 \dots$$

Да се намерят всички естествени числа n, за които сумата на първите n члена на редицата е равна на 2004.

Математически турнир "Иван Салабашев"

4 декември 2004 г.

Решения на задачите от темата за 10-12 клас

1. Отговор: Г. *Решение.* Нека $|x| = a$ и $|y| = b$. Тогава $a + b = 2$ и $a^2 + b^2 = 3$. Оттук $ab = \dfrac{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}{2} = \dfrac{1}{2}$. Следователно a и b са корени на уравнението $t^2 - 2t + \dfrac{1}{2}$ и получаваме, че $|x| = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ и $|y| = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ или $|x| = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ и $|y| = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$. Това показва, че системата има 8 различни решения.

2.Отговор: Б. *Решение.* Нека $AB = 1$, P_1 и P_2 са ортогоналните проекции на P върху AB и CD и $AP_1 = x < 1$. Тогава $PP_1 = x, BP_1 = 1 - x$ и $BP^2 = x^2 + (1-x)^2$. От $PP_2 = 1 - x$ и $MP_2 = |\dfrac{1}{2} - x|$ следва, че $PM^2 = (1-x)^2 + (\dfrac{1}{2} - x)^2$. Тогава $BP^2 + PM^2 = BM^2 = 1 + \dfrac{1}{4}$ и получаваме, че $x^2 + (1-x)^2 + (1-x)^2 + (\dfrac{1}{2} - x)^2 = 1 + \dfrac{1}{4}$. Оттук $4x^2 - 5x + 1 = 0$, т.е. $x = \dfrac{1}{4}$, защото $x < 1$. Следователно $\dfrac{AC}{AP} = \dfrac{BC}{PP_1} = 4$, т.е. $\dfrac{PC}{PA} = 3$.

3. Отговор: Б. *Решение.* Нека $x = KM$. Тъй като $\triangle CAH \sim \triangle BAC$, то $\dfrac{12}{x+5} = \dfrac{CN}{BM} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$. Аналогично от $\triangle CHB \sim \triangle ACB$получаваме, че $\dfrac{5}{x+5} = \dfrac{BK}{BM} = \dfrac{CH}{AC} = \dfrac{BC}{AB}$. Следователно

$$\left(\frac{12}{x+5}\right)^2 + \left(\frac{5}{x+5}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = 1.$$

Оттук намираме, че $x = 8$.

4. Отговор: Б. *Решение.* Нека $3x + 4y = k$. Тогава $y = \dfrac{k - 3x}{4}$ и след заместване в условието получаваме $25x^2 - 2(3k+76)x + k^2 - 24k - 96 = 0$. Дискриминантата на това квадратно уравнение трябва да е неотрицателна, откъдето получаваме, че $(k-73)(k+7) \leq 0$, т.е. $-7 \leq k \leq 73$. Следователно най-голямата стойност на $3x + 4y$ е равна на 73 и се получава при $x = \dfrac{59}{5}, y = \dfrac{47}{5}$.

5. Отговор: А. *Решение.* Нека $n = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \ldots$, където $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \ldots$. Тогава $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)\ldots$. Означаваме $P = (\alpha_3 + 1)(\alpha_4 + 1)\ldots$. От условието следва, че $28 = d(2n) = (\alpha_1 + 2)(\alpha_2 + 1)P$ и $30 = d(3n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 2)P$. Като извадим тези равенства получаваме, че $(\alpha_1 - \alpha_2)P = 2$, т.е. $\alpha_1 - \alpha_2 = 1,\ P = 2$, или $\alpha_1 - \alpha_2 = 2,\ P = 1$. В първия случай следва, че $\alpha_1(\alpha_1 + 2) = 14$, т.е. $(\alpha_1 + 1)^2 = 15$, което е невъзможно. Във втория случай получаваме, че $\alpha_1(\alpha_1 + 1) = 30$, т.е. $\alpha_1 = 5$. Тогава $\alpha_2 = 3, n = 2^5.3^3$ и $d(6n) = d(2^6.3^4) = 7.5 = 35$.

6. Отговор: Г. *Решение.* Ясно е, че $n \geq 2$. При $n = 2$ получаваме $(m-2)^4 = 1$, т.е. $m = 1$ или $m = 3$. Нека $n \geq 3$. Тогава $m \geq 3$. Ако m е нечетно число, то числата $m + 2$ и $m - 2$ са взаимно прости и равенството е невъзможно. Ако $m = 4k$, то равенството приема вида $(2k+1)^{n-2} = 2^4(2k-1)$, което също е невъзможно. Нека $m = 4k+2$. Тогава $(k+1)^{n-2} = 4^4(k^{n+2}$. Тъй като k и $k+1$ са взаимнопрости числа следва, че $k = 1$ и $2^{n-2} = 4^4$. Следователно $m = 6$ и $n = 10$.

7.*Решение.* Медицентърът G лежи върху отсечката PT точно когато $\vec{CG} = \lambda\vec{CP} + \mu\vec{CT}$ където $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ и $\lambda + \mu = 1$. От друга страна $\vec{CG} = \dfrac{1}{3}(\vec{CA} + \vec{CB})$, $\vec{CP} = \dfrac{CP}{CA}\vec{CA} = \dfrac{a+b-c}{2b}\vec{CA}$ и

$\vec{CT} = \dfrac{a+b-c}{2a}\vec{CB}$. Като заместим тези изрази в горното равенство и приравним съответните коефициенти пред $\vec{CA}$ и $\vec{CB}$ получаваме, че $\dfrac{\lambda(a+b-c)}{2b} = \dfrac{\mu(a+b-c)}{2a} = \dfrac{1}{3}$. Оттук $1 = \lambda + \mu = \dfrac{2b}{3(a+b-c)} + \dfrac{2a}{3(a+b-c)}$ и следователно $\dfrac{a+b}{c} = 3$.

8. *Решение.* Сумата на числата до k-тата единица е равна на $1 + (2+1) + (2+2+1) + \cdots + (2+2+\cdots+2+1) = 1+3+5+\cdots+2k-1 = k^2$. При това k-тата единица се намира на $1+2+\cdots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$-во място в редицата.
Нека сме взели първите n члена на редицата, като в тях е k-тата единица, но $k+1$-та не е. Тъй като $44^2 < 2004 < 45^2$ следва, че $k = 44$ и след 44-тата единица са взети $\dfrac{2004 - 44^2}{2} = 34$ двойки. Следователно $n = \dfrac{44.45}{2} + 34 = 1024$.

Задачите от тази тема са предложени от Олег Мушкаров.