СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ "ИВАН САЛАБАШЕВ" - СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир "Иван Салабашев"

4 декември 2004 г.

Тема за 7 клас

(време за работа 120 минути)

След всяка от задачи от 1 до 10 има 4 отговора, само един от които е верен. Отговорът на всяка от задачите от 11 до 15 е число. За верен отговор на всяка от задачите от 1 до 5 се присъжда по 1 точка. За верен отговор на всяка от задачите от 6 до 10 се присъждат по 2 точки. За верен отговор на всяка от задачите от 11 до 15 се присъждат по 3 точки. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници в Турнира може да намерите на адрес www.math.bas.bg

Журито Ви пожелава приятна работа.

---

1. Басейн се пълни от две тръби, които поотделно могат да го напълнят съответно за 8 и 12 часа. За колко време двете тръби заедно ще напълнят две трети от басейна?

А) 4 ч.; **Б)** 2 ч. 24 мин.; **В)** 2 ч. 30 мин.; **Г)** 3 ч. 12 мин..

2. Стойността на израза $|9x-3|+|2-6x|$ при $x=\dfrac{2}{5}$ е:

А) $\dfrac{1}{5}$; **Б)** 5; **В)** 1; **Г)** $\dfrac{4}{5}$.

3. Нека a и b са лицата на оцветените части от чертежа. Радиусът на петте малки окръжности е r. Кое от следните твърдения е вярно?

А) $a<b$ за всяко r; **Б)** $a=b$ за всяко r; **В)** $a>b$ за всяко r; **Г)** $a>b$ или $a=b$ в зависимост от r.

4. Всички естествени числа, които удовлетворяват двойното неравенство

$$5x-x^2-4\leq 3-(x-2)^2<18-(x-3)^2$$

са:

А) $1,2,3$ и 4; **Б)** 1, 2 и 3; **В)** 1 и 2; **Г)** 4.

5. Кое от посочените числа не е решение на неравенството

$$\frac{3x-2}{4}+\frac{5x-3}{6}+\frac{6x-5}{8}\leq\frac{179}{8}-x?$$

А) 7; **Б)** 6; **В)** $\dfrac{22}{3}$; **Г)** $\dfrac{43}{6}$.

6. В равнобедрения $\triangle ABC$ $(AC=BC)$ точка D е вътрешна за AB и е такава, че $AD=CD$ и $BD=BC$. На колко градуса е равен най-големият ъгъл на $\triangle ABC$?

А) 108°; **Б)** 90°; **В)** 120°; **Г)** 135°.

7. За коя стойност на m уравненията

$$\frac{99x+m}{2}=1-m \text{ и } (1+x)^2-1=x^2$$

имат един и същи корен?

А) $-\dfrac{2}{3}$; **Б)** 2; **В)** $\dfrac{1}{2}$; **Г)** $\dfrac{2}{3}$.

8. Колко са триъгълниците на фигурата?

А) 42; **Б)** 33; **В)** 44; **Г)** 36.

9. Върху една от страните на триъгълник са отбелязани две точки, които я разделят на три равни отсечки, а върху друга страна на триъгълника е отбелязана нейната среда. Тези точки са свързани както е показано на чертежа. Ако лицето на дадения триъгълник е 30 кв. см, на колко квадратни сантиметра е равно лицето на оцветената част от триъгълника?

А) 15; **Б)** 12; **В)** 18; **Г)** 10.

10. Стойността на израза

$$\frac{(-1)^{11}a^4b^8 + b^8c^{16} - 2^{5^2-3^2}}{(c^8 - b)(5^3 - 11^2)^8}$$

при $a = 4$, $b = 2$ и $c = -2$ е:

А) -4; **Б)** $\dfrac{1}{24}$; **В)** 1; **Г)** $-\dfrac{3}{4}$.

11. Ако при $x = 3$ стойността на израза

$$\frac{x(a^2 - 9a + 8)}{9} + \frac{x^2 + x + 2}{2}$$

е 8, на колко е равна стойността на същия израз при $x = -3$?

12. По колко начина 4 топа могат да се разположат върху шахматна дъска 4×4 така, че никои два да не са на един и същи ред или стълб?

13. Естествените числа са записани едно след друго в редица $1234567891011\ldots$. Коя цифра стои на 500 000-но място?

14. По колко начина Иван, Петър и Емил могат да разпределят 40 еднакви ябълки помежду си?

15. Ако $x - \dfrac{1}{x} = 3$, колко е стойността на израза $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$?

Математически турнир "Иван Салабашев”

4 декември 2004 г.

Решения на задачите от темата за 7 клас

1.Отговор: Г. За един час тръбите пълнят съответно по $1/8$ и $1/12$ от басейна. Ако търсеното време е t, то $t/8 + t/12 = 2/3$, откъдето $t = 3\frac{1}{5}$.

2. Отговор: В. Тъй като изразът е равен на $5|3x - 1|$, получаваме $5\left|3.\dfrac{2}{5} - 1\right| = 5|1,2 - 1| = 5.0,2 = 1$.

3. Отговор: Б. Радиусът на голямата окръжност е равен на $3r$ и намираме $a = \pi r^2$ и $b = (\pi(3r)^2 - 5\pi r^2) : 4 = \pi r^2$.

4. Отговор: Б.Решенията на лявото неравенство са $x \leq 3$, а на дясното са $x > -5$. Следователно общите естествени решения са 1, 2 и 3.

5. Отговор: В. Решенията на неравенството са $x \leq \frac{36}{5}$. Тъй като $6 < 7 < \frac{43}{6} < \frac{36}{5} < \frac{22}{3}$, числото $\frac{22}{3}$ единствено измежду посочените не е решение на неравенството.

6.Отговор: А. Ако $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC = x$, то $\measuredangle ACD = x$ и значи $\measuredangle BDC = 2x$ като външен за $\triangle ADC$. Тогава от $\triangle BCD$ получаваме $5x = 180^\circ \iff x = 36^\circ$ и следователно най-големият ъгъл на $\triangle ABC$ е $\measuredangle ACB = 3x = 108^\circ$.

7. Отговор: Г.Решенията на двете уравнения са съответно $x = \frac{2-3m}{99}$ и $x = 0$. Следователно търсената стойност на m е решението на уравнението $\frac{2-3m}{99} = 0 \iff m = \frac{2}{3}$.

8.Отговор: В. Преброявайки триъгълниците по ”големина”, получаваме търсения брой $2.1 + 2.6 + 2.3 + 2.6 + 2.6 = 44$.

9. Отговор: А. При означенията на чертежа, ако лицето на $\triangle CPQ$ е S, то тъй като PQ е медиана в $\triangle CNQ$, то лицето на $\triangle PNQ$ е също S. По нататък, NQ е медиана в $\triangle CNR$ и следователно лицето на $\triangle RNQ$ е $2S$.
В $\triangle MRC$ отсечката RN дели страната MC в отношение $MN : NC = 1 : 2$ и следователно лицето на триъгълника MNR се отнася към лицето на триъгълника NCR (равно на $4S$), както $1 : 2$. Оттук лицето на $\triangle MNR$ е равно на $2S$.
Лицето на триъгълника е $6S = 30$, откъдето $S = 5$ и оцветената част има лице $3S = 15$.

10.Отговор: В.Имаме $\dfrac{(-1)^{11}a^4b^8+b^8c^{16}-2^{5^2-3^2}}{(c^8-b)(5^3-11^2)^8}=\dfrac{-2^{16}+2^{24}-2^{16}}{(2^8-2)2^{16}}=1$.

11. Отговор: 3. При $x=3$ изразяваме $\dfrac{a^2-9a+8}{9}=\dfrac{1}{3}(8-\dfrac{3^2+3+2}{2})=\dfrac{1}{3}$. Следователно търсената стойност е $(-3)(\dfrac{1}{3})+\dfrac{(-3)^2-3+2}{2}=3$.

12.Отговор: 24. Във всеки ред има по един топ. Топът в първия ред може да е във всеки от 4-те стълба, топът във втория ред може да е във всеки от останалите 3 стълба, за топа в третия ред имаме две възможности, а за топа в четвъртия ред възможността е единствена. Следователно търсеният брой е $4.3.2.1=24$.

13. Отговор: 5. Цифрите до числото 99 999 включително са $9.1+90.2+900.3+9000.4+90000.5=488889$ на брой. Следователно трябва да намерим цифрата на място $11\,111=500\,000-488\,889$, започвайки броенето от 100 000. Разглежданите числа сега са само шестцифрени и тъй като $11\,111=6.1\,851+5$, търсената цифра е петата цифра на 101 851, т.е. 5.

14. Отговор: 861. Да добавим две еднакви круши към ябълките и да подредим всички ябълки и круши в редица. Сега да раздадем ябълките така: на първия тези от началото до първата круша, на втория тези между първата и втората круша и на третия от последната круша до края. Обратно, на всяко разделяне между тримата отговаря такова подреждане на ябълки и круши. Следователно търсеният брой е равен на броя на начините, по които 2 круши могат да се разположат на 42 места, т.е. на $\dfrac{42.41}{2}=41.21=861$.

15. Отговор: 11. Повдигаме на квадрат даденото равенство и получаваме $x^2-2+\dfrac{1}{x^2}=9$, т.е. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=11$.

Задачите от тази тема са предложени от Петър Бойваленков.