СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

СЕКЦИЯ "ИВАН САЛАБАШЕВ" - СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир "Иван Салабашев"

4 декември 2004 г.

Тема за 8 и 9 клас

(време за работа 120 минути)

След всяка от задачи от 1 до 10 има 4 отговора, само един от които е верен. Отговорът на всяка от задачите от 11 до 15 е число. За верен отговор на всяка от задачите от 1 до 5 се присъжда по 1 точка. За верен отговор на всяка от задачите от 6 до 10 се присъждат по 2 точки. За верен отговор на всяка от задачите от 11 до 15 се присъждат по 3 точки. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници в Турнира може да намерите на адрес www.math.bas.bg

Журито Ви пожелава приятна работа.

---

1. Кое от следните числа може да се представи като сбор на две последователни естествени числа и като сбор на три последователни естествени числа?

А) 2004; **Б)** 2003; **В)** 2002; **Г)** 2001.

2. Нека a и b са лицата на оцветените части от чертежа. Радиусът на петте малки окръжности е r. Кое от следните твърдения е вярно?

А) $a < b$ за всяко r; **Б)** $a = b$ за всяко r; **В)** $a > b$ за всяко r; **Г)** $a > b$ или $a = b$ в зависимост от r.

3. Равенството

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+(x+1)^3+(x+2)^3 = ax^3+bx^2+cx+d$$

е тъждество. На колко е равен сборът $a+b+c+d$?

А) $\frac{57}{4}$; **Б)** $\frac{289}{8}$; **В)** 9; **Г)** 35.

4. Във вътрешността на правилния шестоъгълник $ABCDEF$ е построен квадрат $ABGH$, както е показано на чертежа. На колко градуса е равен $\sphericalangle EHF$?

А) 90; **Б)** 100; **В)** 105; **Г)** 120.

5. Дърветата в един парк са посадени във върховете на квадратна мрежа, както е показано на чертежа. Колко най-много дървета могат да бъдат отсечени така, че от всеки образувал се при това пън да не се вижда друг пън?

А) 8; **Б)** 9; **В)** 10; **Г)** 12.

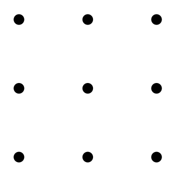
6. Върху две от страните на един триъгълник са отбелязани по три точки, които ги разделят на по четири равни отсечки. Тези точки са свързани както е показано на чертежа. Ако лицето на дадения триъгълник е 32, на колко е равно лицето на оцветената част?

А) 16; **Б)** 15; **В)** 12; **Г)** 10.

7. Петър има три огромни купчини – едната с монети по 5 цента, втората с монети по 10 цента и третата с монети по 25 цента. Всеки ден той загребва първо от едната купчина, после от втората и накрая от третата (някои купчини може и да пропусне) за джобни пари. По колко начина той може да вземе от купчините точно 100 монети с обща стойност 10 долара?

А) 26; **Б)** 25; **В)** 48; **Г)** 50.

8. Девет точки образуват квадратна мрежа, показана на чертежа. Колко триъгълника с върхове в тези точки могат да се образуват?



А) 56; **Б)** 60; **В)** 76; **Г)** 84.

9. Две свещи с еднаква височина били запалени едновременно. Едната изгоряла напълно за 5 часа, а другата – за 3 часа. Колко минути след запалването им, първата свещ е била три пъти по-висока от втората?

А) 120; **Б)** 140; **В)** 150; **Г)** 160.

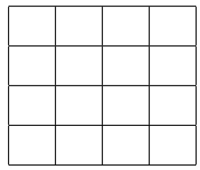
10. Дадени са тринадесет различни от 0 числа $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$, поне три от които са положителни. Измежду всичките 78 произведения на числата по двойки точно 22 са отрицателни. Колко от дадените числа са отрицателни?

А) 2; **Б)** 7; **В)** 8; **Г)** 10.

11. По колко начина може да се избере естественото число n така, че дробите $\dfrac{n}{132}$ и $\dfrac{n}{231}$ да бъдат съкратими и по-малки от 1?

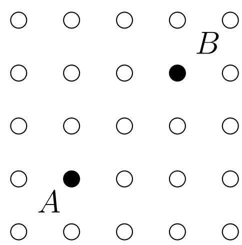
12. Дадени са четири последователни естествени числа, първото от които се дели на 3, второто се дели на 5, третото се дели на 7, а четвъртото се дели на 9. На колко най-малко е равен техният сбор?

13. Някои полета на показания квадрат 4×4 трябва да се оцветят в черно, а останалите – в бяло, така че всяко бяло поле да има точно 3 черни съседни полета, а всяко черно поле да има точно едно бяло съседно поле. (*Съседни* се наричат две полета, които имат обща страна.) Колко са белите полета?



14. Една къща се състои от няколко стаи. Всяка стая има по три врати. Две от вратите в къщата водят навън, а останалите врати водят към други стаи в тази къща. Ако вратите са общо 10, колко са стаите?

15. Водните лилии в езерото образуват мрежа като показаната на черeжа. Жаба скача от едно листо на съседно във вертикална или хоризонтална посока. Жабата се намира в A и вижда насекомо в B. За да го хване, жабата прави 6 скока (без да скача на едно листо два пъти) и стига в B. Колко различни маршрута може да избере жабата?



Математически турнир "Иван Салабашев"

4 декември 2004 г.

Решения на задачите от темата за 8 и 9 клас

1. Отговор: Г. Сборът на две последователни естествени числа е нечетен, а сборът на три последователни естествени числа се дели на 3. От посочените числа само 2001 удовлетворява и двете условия и $2001 = 1000 + 1001 = 666 + 667 + 668$.

2.Отговор: Б. Радиусът на голямата окръжност е равен на $3r$ и намираме $a = \pi r^2$ и $b = (\pi(3r)^2 - 5\pi r^2) : 4 = \pi r^2$.

3. Отговор: Г. Равенството е изпълнено за всяко x, следователно и за $x = 1$, когато получваме $a + b + c + d = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$.

4.Отговор: В. Ъгълът на правилния шестоъгълник е $120°$. В равнобедрения триъгълник FAE намираме $\sphericalangle FAE = 30°$. От друга страна, $\sphericalangle FAH = 120° - 90° = 30°$. Следователно точките A, H, E лежат на една права. В равнобедрения триъгълник AHF намираме $\sphericalangle AHF = 75°$, оттук съседния му ъгъл е $\sphericalangle FHE = 105°$.

5.Отговор: Б. Ясно е, че от четирите дървета във върховете на квадрат 1×1 може да бъде отсечено само 1. Също е ясно, че от $2.n$ дървета, подредени в ред, могат да бъдат отсечени най-много n, а от $2.n + 1$ – най много $n + 1$. Като разделим дърветата в 4 квадрата и ред от 5 дървета и ред от 4 дървета, както е показано на чертежа, получаваме общо най-много 9 отсечени дървета.

6. Отговор: В. При означенията на чертежа, ако лицето на $\triangle CPQ$ е S, то тъй като PQ е медиана в $\triangle CNQ$, то лицето на $\triangle PNQ$ е също S. Аналогично, NQ е медиана в $\triangle CNR$ и следователно лицето на $\triangle RNQ$ е $2S$.
По-нататък, $S_{MNR} : S_{NCR} = MN : NC = 1 : 2$ и следователно $S_{MNR} = 2S$; след това $S_{MSR} : S_{MCR} = SR : RC = 1 : 2$ и следователно $S_{RSM} = 3S$; също $S_{ASM} : S_{MCS} = AM : MC = 1 : 3$ и следователно $S_{ASM} = 3S$ и накрая $S_{ASB} : S_{ACS} = AS : SC = 1 : 3$ и следователно $S_{ASB} = 4S$.
Следователно $S_{ABC} = 16S = 32$ и оцветената част има лице $6S = 12$.

7. Отговор: А. Ако монетите по 5 цента са x на брой, монетите по 10 цента – y на брой, монетите по 25 цента ще бъдат $100-x-y$ на брой. От равенството $5x+10y+25(100-x-y)=1000$ получаваме $4x+3y=300$. От съображения за делимост, $x=3a$ и $y=4b$ и като заместим в равенството, получавме $12a+12b=300$, т.е. $a+b=25$. Възможните стойности на a са $0,1,2,\dots,25$, общо 26 и всяка от тях съответства на различно решение на уравнението.

8. Отговор: B. Отсечките са $9.8/2=36$. Върху правите, определени от 8.3=24 отсечки лежи още една точка, следователно третият връх на триъгълник със страна някоя от тези отсечки се избира измежду 9-3=6 точки. Третият връх на триъгълник, имащ за страна някоя от останалите 12 отсечки, може да се избере измежду 9-2=7 точки. Тъй като всеки триъгълник по този начин е броен по веднъж откъм всяка своя страна, т.е. 3 пъти, получаваме $(24.6+12.7):3=76$.

9. Отговор: B. За един час изгаря $\frac{1}{5}$ от първата свещ и $\frac{1}{3}$ от втората. След x часа височината на първата свещ е $1-\frac{x}{5}$, а на втората $1-\frac{x}{3}$. От условието имаме $1-\frac{x}{5}=3\left(1-\frac{x}{3}\right)$, откъдето намираме $x=\frac{5}{2}$ часа, т.е. 150 минути.

10. Отговор: A. Ако отрицателните числа са n, а положителните са $m, m\geq 3$, имаме $n+m=13$. Броят на отрицателните произведения е равен на броя на двойките, в които едното число е отрицателно, а другото е положително, следователнои $m.n=22$ Оттук $n=2, m=11$.

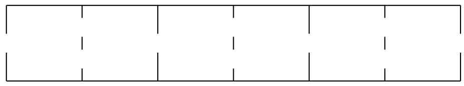
11. Отговор: 57. Знаменателите се разлагат на прости множители по следния начин: $132=2^2.3.11$ и $231=3.7.11$. Общите им прости делители са 3 и 11.
Нека първо n е кратно на 3 или 11 и n е по-малко от 132. Броят на тези n е равен на $\left[\frac{131}{3}\right]+\left[\frac{131}{11}\right]-\left[\frac{131}{33}\right]=43+11-3=51$.
Когато n не е кратно нито на 3, нито на 11, за да бъдат дробите съкратими, трябва n да бъде кратно на 2 и на 7, т.е. на 14. По-малките от 132 кратни на 14, които не се делят на 3 и не се делят на 11, са $14, 14.2, 14.4, 14.5, 14.7, 14.8$, общо 6. Общо има 51+6=57 възможности.

12. Отговор: 642. От признака за делимост на 5 следва, че кратното на 9 число трябва да завършва на 2 или 7. Следователно четвъртото от търсените числа е член на някоя от редиците $72, 162, \dots, 9.\overline{k8}, \dots$ (в тази редица влизат всички числа, които са кратни на 9 и завършват на 2) или $27, 117, 207, \dots, 9.\overline{k3}, \dots$ (в тази редица влизат всички числа, които са кратни на 9 и завършват на 7). Непосредствено проверяваме първите членове на редиците и установяваме, че 162 е четвъртото от търсените числа; те са 159, 160, 161, 162 и сборът им е 642.

13.Отговор: 4. От условието следва, че полетата в ъглите на квадрата са черни (защото те имат само по две съсдени) и всяко от тях граничи с точно едно бяло поле. Ясно е, че тези четири бели полета по контура на квадрата не могат да бъдат съседни. Всяко от четирите вътрешни полета има за съседни две от полетата, които са съседни и за ъглово поле и следователно съседните му неконтурни полета са черни. Лесно се вижда, че полетата трябва да бъдат оцветени както е показано в таблицата. Черните полета са отбелязани с $\star$.

$\star$		$\star$	$\star$
$\star$	$\star$	$\star$	
	$\star$	$\star$	$\star$
$\star$	$\star$		$\star$

14.Отговор: 6. Ако стаите са x, вътрешните врати са $\frac{3x-2}{2}$ (без двете водещи навън, те се броят по веднъж от всяка стая), следователно $10=\frac{3x-2}{2}+2$ и намираме $x=6$. Пример за такова разпределение е показан на чертежа.



15. Отговор: 24. Пътят на жабата включва в някакъв ред или 3 скока надясно, един наляво и 2 нагоре, или 3 скока нагоре, един надолу и 2 надясно. При това, за да не скочи на едно листо два пъти, тя не може да направи последователно скок нагоре и скок надолу, както и скок наляво и скок надясно. Достатъчно е да се намери броя на пътищата със скок наляво, тъй като той е равен на броя на пътищата със скок надолу.
Ако скокът наляво е първи, след него следва скок нагоре и за останалите 3 скока надясно и един скок нагоре има 4 възможности. По същия начин има 4 възможни пътя, завършващи със скок наляво. Ако скокът наляво не е първи или последен, той е предшестван и последван от скокове нагоре. Трите скока надясно могат да се разположат спрямо тази последователност по 4 начина. Така получихме 12 пътя; следователно пътищата са 24.

Задачите от тази тема са предложени от Емил Колев.