СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ "ИВАН САЛАБАШЕВ" - СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир "Иван Салабашев"

3 декември 2005 г.

Тема за 10., 11., 12. клас

(време за работа 120 минути)

След всяка от задачи от 1 до 6 има 4 отговора, само един от които е верен. Решенията на задачи 7 и 8 трябва да бъдат подробно обяснени. За верен отговор на всяка от задачите от 1 до 6 се присъждат по 3 точки. За вярно решение на всяка от задачи 7 и 8 се присъждат по 6 точки. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници в Турнира може да намерите на адрес www.math.bas.bg

Журито Ви пожелава приятна работа.

---

1. Най-малката стойност на $a \geq 0$, за която уравнението $x^2 + ax + a + 1 = 0$ има поне един реален корен, е:

А) $2\sqrt{2} + 2$; **Б)** $2\sqrt{2} - 2$;
В) $2\sqrt{2} + 3$; **Г)** $2\sqrt{2} - 3$.

2. Нека ABC е правоъгълен триъгълник с хипотенуза AB и височина CH ($H \in AB$). Ако BC и CH са катети на правоъгълен триъгълник с хипотенуза AC, то отношението $\frac{AH}{BH}$ е равно на:

А) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; **Б)** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$;
В) $\sqrt{5}+1$; **Г)** $\sqrt{5}-1$.

3. Броят на целите числа a, за които уравнението $x^3 + (a-4)x^2 + (a+4)x + 9 = 0$ има точно два различни цели корена, е равен на:

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4.

4. От урна със 101 топки, номерирани с числата от 1 до 101, по случаен начин са извадени 2 топки. Вероятността сумата от номерата им да е равна на 52, е:

А) $\frac{1}{101}$; **Б)** $\frac{1}{102}$; **В)** $\frac{1}{201}$; **Г)** $\frac{1}{202}$.

5. Най-голямото естествено число n, за което 3^n дели $3 \times 33 \times \ldots \times \underbrace{33\ldots3}_{54 \text{ тройки}}$, е:

А) 60; **Б)** 70; **В)** 80; **Г)** 90.

6. Разликите на всеки две от пет различни естествени числа са различни. На колко най-малко може да бъде равно най-голямото от тези числа?

А) 10; **Б)** 11; **В)** 12; **Г)** 13.

7. Да се намери най-малкото естествено число n със следното свойство: както и да оцветим в два цвята числата от 1 до n, винаги има четири едноцветни числа от 1 до n (не непременно различни) така, че сумата на три от тях да е равна на четвъртото.

8. Да се намерят всички двойки (m, n) от цели числа, за които

$$m(n^2 + 36) + n(m^2 - 36) + m^2(m - 12) = 0.$$

Математически турнир "Иван Салабашев"

3 декември 2005 г.

Решения на задачите от темата за 10., 11., 12. клас

1. Отг. А). Уравнението има поне един реален корен, когато $D = a^2 - 4(a+1) \geq 0$. Оттук при $a \geq 0$ следва, че $a \geq 2\sqrt{2} + 2$.

2. Отг. А). Понеже $AC^2 = BC^2 + CH^2$ и $AC^2 = AH^2 + CH^2$, то $BC = AH$. От друга страна, $BC^2 = AB.BH$ и значи

$$AH^2 = (AH + BH)BH.$$

Следователно $\dfrac{AH}{BH}$ е корен на уравнението $x^2 = x + 1$, откъдето $\dfrac{AH}{BH} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

3. Отг. В). Понеже

$x^3 + (a-4)x^2 + (a+4)x + 9 =$

$= (x+1)(x^2 + (a-5)x + 9) = 0,$

то търсените a са тези, за които -1, 3 или -3 са корени на второто уравнение (защо?). Оттук $a = 15$, $a = -1$ и $a = 11$.

4. Отг. Г). Ако сумата от номерата на двете топки е 52, то номерът n на първата топка трябва да е число от 1 до 51 без 26, за които имаме 50 от 101 възможности. Тогава номерът на втората топка се определя еднозначно $(52-n)$, т.е. имаме 1 от 100 възможности. Следователно разглежданата вероятност е равна на $\dfrac{50}{101}.\dfrac{1}{100} = \dfrac{1}{202}$.

5. Отг. В). Имаме, че

$$3 \times 33 \times \ldots \times \underbrace{33\ldots3}_{54 \text{ тройки}} = 3^{54}A,$$

където $A = 1 \times 11 \times \ldots \times \underbrace{11\ldots1}_{54 \text{ единици}}$. Най-голямото число m, за което 3^m дели A е равно на $[54/3] + [54/3^2] + [54/3^3] = 18 + 6 + 2 = 26$. Следователно $n = 54 + 26 = 80$.

6. Отг. В). Нека числата са $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Понеже десетте разлики $a_i - a_j$, $1 \leq j < i \leq 5$ са различни, то една от тях е поне 10 и значи най-голямото от числата е поне 11. Ако то е 11, то сумата на горните десет разлики е $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$, а от друга страна тази сума е четно число, понеже е равна на

$$a_5 - a_4 + a_5 - a_3 + \ldots + a_2 - a_1 = 2(2a_5 + a_4 - a_2 - 2a_1).$$

Следователно $a_5 \geq 12$. Остава да отбележим, че например числата $1, 3, 8,$ $11, 12$ изпълняват условието на задачата.

7. *Решение.* $n = 11$. Достатъчно е да построим контрапример при $n = 10$ и да покажем, че $n = 11$ има исканото свойство.

При $n = 10$ нека 1, 2, 9, 10 са бели числа, а 3, 4, 5, 6, 7, 8 - черни. Ако сумата на три бели числа е по-малка от 11, тя е 3, 4, 5 или 6, т.е. черна. Ако сумата на три черни числа е по-малка от 11, тя е 9 или 10, т.е. бяла.

Сега да допуснем, че при $n = 11$ съществува оцветяване, при което няма четири едноцветни числа от 1 до 11 така, че сумата на три от тях да е равна на четвъртото. Ако 1 и 2 са едноцветни, например бели, то 3=1+1+1 и 4=1+1+2 са черни. Тогава 9=3+3+3 и 11=3+3+4 са бели. От друга страна, 11=9+1+1 е черно - противоречие.
Ако 1 и 2 са разноцветни, например 1 е бяло, а 2 черно, то 3=1+1+1 е черно, а 6=2+2+2 е бяло. Тогава 8=6+1+1=3+3+2 трябва да е едновременно черно и бяло - противоречие.

8. *Решение.* Записваме уравнението във вида

$$mn^2 + (m^2 - 36)n + m(m-6)^2 = 0.$$

Ако $m = 0$, то $n = 0$. При $m \neq 0$ дискриминантата

$$\begin{aligned} D &= (m^2-36)^2 - 4m^2(m-6)^2 = \\ &= 3(m-2)^2(m+2)(6-m) \end{aligned}$$

трябва да е точен квадрат. В частност, $-2 \leq m \leq 6$ и непосредствена проверка показва, че D е точен квадрат само при $m = -2, 4, 6$. Тогава лесно намираме останалите двойки (m, n) освен (0,0):

$$(-2,-8), (4,1), (4,4), (6,0).$$