СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ "ИВАН САЛАБАШЕВ" - СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир "Иван Салабашев"

3 декември 2005 г.

Тема за 8. и 9. клас

(време за работа 120 минути)

След всяка от задачи от 1 до 10 има 4 отговора, само един от които е верен. Отговорът на всяка от задачите от 11 до 15 е число. За верен отговор на всяка от задачите от 1 до 5 се присъжда по 1 точка. За верен отговор на всяка от задачите от 6 до 10 се присъждат по 2 точки. За верен отговор на всяка от задачите от 11 до 15 се присъждат по 3 точки. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници в Турнира може да намерите на адрес www.math.bas.bg

Журито Ви пожелава приятна работа.

---

1. Редицата от числа се получава по следния начин: първият член е равена 1, вторият - на 2, а всеки следващ член е произведение на предходните два. На колко е равен 13-ия член на редицата?

А) 2^{12}; **Б)** 2^{13}; **В)** 2^{144}; **Г)** 2^{2005}.

2. Върху катетите AC и BC на правоъгълен равнобедрен триъгълник ABC са избрани съответно точки M и N така, че $CM = CN$. Нека P и Q са точки върху хипотенузата AB (Q е между A и P), за които $AM \perp QM$ и $BN \perp PN$. Ако $S_{\triangle ABC} = 3S_{MNPQ}$ и $AM = 1$, то CM е равно на:

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4.

3. Броят на естествените числа n, за които $n^2 - 14n + 24$ е просто число, е равен на:

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4.

4. Ако $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ и $ac + bd = 0$, то $ab + cd$ е равно на:

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** не може да се определи.

5. Колко са двойките от цели числа (m, n), за които $\dfrac{2}{m} + \dfrac{3}{n} = 1$?

А) 4; **Б)** 5; **В)** 6; **Г)** 7.

6. Броят на естествените числа n, за които цялата част на $n^2/5$ е просто число, е:

А) 1; **Б)** 3; **В)** 5; **Г)** безбройно много.

7. Окръжност с център O се допира до две успоредни прави. Трета права се допира до окръжността и пресича успоредните прави в точки A и B. На колко е равен $\angle AOB$?

А) $30°$; **Б)** $45°$; **В)** $60°$; **Г)** $90°$.

8. Числото $2005^2 - \sqrt{2001.2003.2007.2009 + 36}$ е равно на:

А) 1; **Б)** 4; **В)** 7; **Г)** 10.

9. Нека ABC е равностранен триъгълник със страна 1, P е точка от страната AC и Q е точка от страната BC. Нека m е сумата на ортогоналните проекции на отсечката PQ върху трите страни на триъгълника. Най-голямата стойност на m е равна на:

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4.

10. Броят на двуцифрените числа A такива, че последните две цифри на произволна степен на A съвпадат с A, е:

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** друго число.

11. Числото $\underbrace{11\dots1}_{33}\underbrace{22\dots2}_{33}$ е представено като произведение на две последователни естестесвени числа. Колко е сумата на техните цифри?

12. Множеството $\{7, 83, 421, 659\}$ е пример на множество от прости числа, в което всяка ненулева цифра е използвана точно един път. На колко най-малко е равна сумата на числата в едно такова множество?

13. Ако x, y и z са реални числа, за които

$$x + \frac{1}{y} = 4,\ y + \frac{1}{z} = 1 \text{ и } z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3},$$

на колко е равно xyz?

14. Да се намери броят на четирицифрените числа, които при деление на 100 дават остатък и частно, чиято сума се дели на 11.

15. Да се намери броят на тройките от естествени числа (a, b, c), за които $a \leq b \leq c \leq 2005$ и $\text{НОК}(a, b, c) = a + b + c$.

Математически турнир "Иван Салабашев"

3 декември 2005 г.

Решения на задачите от темата за 8., 9. клас

1. Отг. В). Редицата е

$$1, 2, 2, 2^2, 2^3, 2^5, 2^8, 2^{13}, 2^{21}, 2^{34}, 2^{55}, 2^{89}, 2^{144}, \ldots.$$

2. Отг. Б). Условието $S_{\triangle ABC} = 3S_{MNPQ}$ е еквивалентно на

$$2S_{\triangle ABC} = 3(S_{\triangle AMQ} + S_{\triangle BNP} + S_{\triangle CMN}).$$

Ако $x = CM$, получаваме, че

$$(1+x)^2 = \frac{3(1+1+x^2)}{2}.$$

Оттук $(x-2)^2 = 0$, т.е. $x = 2$.

3. Отг. Б). От $n^2 - 14n + 24 = (n-2)(n-12)$ следва, че $n = 1$ или $n = 13$.

4. Отг. А). Ако $a = 0$, то $b = \pm 1 \neq 0$ и тогава $d = 0$, $ab + cd = 0$. Ако $a \neq 0$, то $c = -\dfrac{bd}{a}$. Тогава

$$1 = \frac{b^2d^2}{a^2} + d^2 = \frac{(1-a^2)d^2}{a^2} + d^2,$$

откъдето $a^2 = d^2$. Значи $a(ab+cd) = a^2b + acd = a^2b - bd^2 = 0$, т.е. отново $ab + cd = 0$.

5. Отг. Г). Записваме урваненението във вида $2n + 3m = mn$, т.е. $(m-2)(n-3) = 6$, $m, n \neq 0$. Понеже $6 = 2.3$, за $(m-2, n-3)$ имаме следните 8 възможности:

$$(1,6),\ (6,1),\ (2,3),\ (3,2),$$

$$(-1,-6),\ (-6,-1),\ (-2,-3),\ (-3,-2).$$

От тях само $(-2,-3)$ не дава решение на началното уравнение, а останалите дават различни решения.

6. Отг. Б). Ако $n = 5m$, то $[n^2/5] = 5m^2$, откъдето $m = 1$, т.е. $n = 5$.
Ако $n = 5m \pm 1$, то $[n^2/5] = m(5m \pm 2)$, откъдето отново $m = 1$, т.е. $n = 4$ и $n = 6$.
Ако $n = 5m \pm 2$, то $[n^2/5] = m(5m \pm 4)$, което не е просто число за никое m.

7. Отг. Г). Нека X, Y и Z са допирните точки на окръжността с трите прави. Тогава $\triangle OXA \cong$

$\triangle OZA$, защото $\angle OXA = \angle OZA = 90^\circ$, $OX = OZ$ и OA е обща страна. Оттук $\angle AOX = \angle AOZ$. Аналогично $\angle BOY = \angle BOZ$ и следователно

$$\begin{aligned} \angle AOB &= \angle AOZ + \angle BOZ = \\ &= \frac{\angle XOZ + \angle YOZ}{2} = 90^\circ. \end{aligned}$$

8. Отг. Г). Понеже

$$\begin{aligned} &(a-4)(a-2)(a+2)(a+4)+36 = \\ &= (a^2-16)(a^2-4)+36 = \\ &= a^4-20a^2+100 = (a^2-10)^2 \end{aligned}$$

следва, че даденото число е равно на 10.

9. Отг. Б). Нека $AP = a$ и $BQ = b$ $(a, b \in [0,1])$. Тогава лесно се изчислява, че

$$m = 1 - \frac{a+b}{2} + \left|\frac{a+1}{2} - b\right| + \left|\frac{b+1}{2} - a\right|.$$

Понеже $a, b \in [0,1]$, то $\left|\frac{1}{2} - a\right| \le \frac{1}{2}$ и $\left|\frac{1}{2} - b\right| \le \frac{1}{2}$. Следователно

$$\left|\frac{a+1}{2} - b\right| \le \frac{a}{2} + \left|\frac{1}{2} - b\right| \le \frac{a+1}{2},$$

$$\left|\frac{b+1}{2} - a\right| \le \frac{b}{2} + \left|\frac{1}{2} - a\right| \le \frac{b+1}{2}$$

и получаваме, че

$$m \le 1 - \frac{a+b}{2} + \frac{a+1}{2} + \frac{b+1}{2} = 2.$$

При $a = 1, b = 0$ или $a = 0, b = 1$ имаме, че $m = 2$.

10. Отг. В). Числото A има исканото свойство точно когато последните две цифри на A^2 съвпадат с A. Тогава 100=25.4 дели $A^2 - A = A(A-1)$. Значи $A = 25, 50, 75$ или $A - 1 = 25, 50, 75$. С непосредствена проверка намираме, че $A = 25$ или $A = 76$.

11. Отг. 199). Даденото число е равно на

$$\underbrace{33\ldots3}_{33} \times \underbrace{33\ldots3}_{32}4.$$

12. Отг. 287). Цифрите 4, 6 и 8 не могат да са последни цифри на двуцифрени прости числа. Значи сумата на числата, които ги съдържат, е поне 40+60+80=180. Сумата на останалите числа е поне 1+2+3+5+7+9=27. Следователно сумата на всички числа е поне 207. Пример на множество с исканото свойство е

$$\{2, 3, 5, 41, 67, 89\}.$$

13. Отг. 1). Имаме, че

$$\begin{aligned}\frac{28}{3} &= \left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right) = \\ &= xyz + x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} = \\ &= xyz + \frac{1}{xyz} + \frac{22}{3}.\end{aligned}$$

Оттук $xyz + \dfrac{1}{xyz} = 2$, т.е. $xyz = 1$.

14. Отг. 819). Нека n е четирицифрено числа и $n = 100q + r$. Тогава $n = q + r + 99q$, т.е. $q + r$ се дели на 11 точно когато n се дели на 11. Тъй като $1000 \le n \le 9999$, то отговорът е $[9999/11] - [999/11] = 909 - 90 = 819$.

15. Отг. 668). Ясно, че трите числа не са равни. Тогав $a+b < 2c$ и следователно $c < a+b+c < 3c$. Тъй като $a+b+c$ се дели на c, следва, че $a+b+c = 2c$, т.е. $a+b = c$. Понеже b дели $a+b+c = 2a+2b$, то b дели $2a$. От $a \le b$ следва, че $a = b$ или $2a = b$. Ако $a = b$, то $c = 2a$ и значи $\text{НОК}(a,b,c) = 2a < 4a = a+b+c$, противоречие. Ако $2a = b$, то $c = 3a$, като очевидно $\text{НОК}(a,2a,3a) = 6a = a+2a+3a$. Понеже $c = 3a \le 2005$, то отговорът е $[2005/3] = 668$.