Математически турнир „Иван Салабашев“, 2011 г.
Решения на задачите от темата за 10., 11., 12. клас

1. Да се намери броят на четирицифрените числа n за които сборът от n и четирите му цифри е равен на 2011. **А)** 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

Отговор: Б. Ясно е, че $a \leq 2$, откъдето $a+b+c+d \leq 2+3.9 = 29$. Оттук $n = 2011-(a+b+c+d) \geq 2011-29 = 1982$. Ако $n = \overline{abcd}$ и $2011 = n+a+b+c+d = \overline{abc0}+2d+a+b+c$, то $a+b+c$ трябва да е нечетно число. Следователно $n \geq 1990$ и с директна проверка намираме решението $n = 1991$.

2. Да се намери броят на естествените числа a за които частното от делението на 2216 с a дава остатък 29? **А)** 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

Отговор: Г. Условието означава, че a дели $2216-29 = 2187$ и $a > 29$. Делителите на $2187 = 3^7$, които са по-големи от 29 са 3^4, 3^5, 3^6 и 3^7 и следователно имаме 4 възможности за a.

3. По колко различни начина числото $\dfrac{2011}{2010}$ може да се представи като произведение на две дроби от вида $\dfrac{n+1}{n}$, където n е естествено число?

А) 16 **Б)** 18 **В)** 20 **Г)** 22

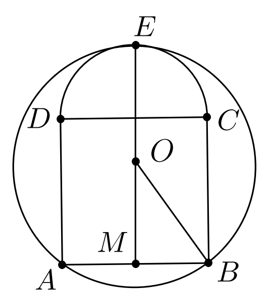
Отговор: А. Нека p и q са естествени числа, за които $\dfrac{2011}{2010} = \dfrac{p+1}{p}\dfrac{q+1}{q}$. Това равенство е еквивалентно на $pq = 2010(p+q+1)$, откъдето намираме

$$p = \frac{2010(q+1)}{q-2010} = 2010 + \frac{2010.2011}{q-2010}.$$

Понеже p и q са цели числа, то $q-2010$ е делител на 2010.2011, като на всеки делител на 2010.2011 съответства една двойка p и q. Понеже $2010.2011 = 2.3.5.67.2011$, то броят на делителите на 2010.2011 е $2^5 = 32$. Тъй като всяка двойка се брои два пъти и $p \neq q$, то търсеният брой е 16.

4. Дадената фигура се състои от квадрат $ABCD$ със страна 1 и полуокръжност с диаметър CD. На колко е равен радиусът на описаната около фигурата окръжност?

А) $\dfrac{5}{6}$ **Б)** 1 **В)** $\dfrac{6}{5}$ **Г)** $\sqrt{2}$



Отговор: А. Ако M е средата на AB, R е търсеният радиус, а O е центърът на окръжността, имаме $OM = EM - OE = EM - R = \frac{3}{2} - R$. Сега от правоъгълния триъгълник OMB намираме $R^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - R\right)^2$, откъдето $R = \dfrac{5}{6}$.

5. Ако $\log_a x = 3$ и $\log_{ab} x = 2$ на колко е равно $\log_b x$?

А) 6 **Б)** 8 **В)** 10 **Г)** 12

Отговор: 6. Имаме $\log_x a = \dfrac{1}{3}$ и $\log_x a + \log_x b = \dfrac{1}{2}$, откъдето $\log_x b = \dfrac{1}{6}$. Следователно $\log_b x = 6$.

6. Ако

$$\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+3} = \frac{x_3}{x_3+5} = \cdots = \frac{x_{1006}}{x_{1006}+2011}$$

и $x_1 + x_2 + \cdots + x_{1006} = 503^2$ да се намери x_{1006}.

А) $\dfrac{2011}{4}$ **Б)** $\dfrac{1005}{2}$ **В)** $\dfrac{2011}{5}$ **Г)** $\dfrac{2011}{2010}$

Отговор: А. Ако означим

$$\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2}{x_2+3}=\frac{x_3}{x_3+5}=\cdots=\frac{x_{1006}}{x_{1006}+2011}=a,$$

то $\frac{x_k}{x_k+(2k-1)}=a$, откъдето $x_k=\dfrac{a}{1-a}(2k-1)$. Заместваме във второто равенство и намираме

$$\frac{a}{1-a}(1+3+\cdots+2011)=503^2.$$

Понеже $1+3+\cdots+2011=1006^2$, получаваме $\dfrac{a}{1-a}=\dfrac{1}{4}$. Накрая, $x_{1006}=\dfrac{a}{1-a}2011=\dfrac{2011}{4}$.

Задача 7. Даден е правоъгълен равнобедрен триъгълник EBC с прав ъгъл при върха C и бедро $BC=2$. Да се определят всички възможни стойности на лицето на трапец $ABCD$, $AB\parallel CD$, за който точката E е среда на страната AD.

Решение. Ако F е средата на бедрото BC, то EF е средна отсечка за трапеца. Височината на трапеца е два пъти по-голяма от височината h_C в $\triangle EFC$ от върха C. Лицето на трапеца е равно на $2h_C.EF=2h_C.EF=2EC.FC=4$. Всеки такъв трапец има лице 4.

Задача 8. Да се реши в естествени числа уравнението

$$\frac{2}{x^2}+\frac{3}{xy}+\frac{4}{y^2}=1.$$

Решение. Директно се проверява, че $x=y=3$ е решение. Ясно е, че ако и двете неизвестни са едновременно по-големи или по-малки от 3 равенството не може да е изпълнено. Понеже $x=1$ или $y=1$ не дава решение, то ако има друго решение трябва $x=2$ или $y=2$. Директно се проверява, че и в двата случая не се получава решение.
Единственото решение е $x=y=3$.

Задачите от тази тема са предложени от Николай Николов.