Математически турнир „Иван Салабашев“, 2011 г.

Решения на задачите от темата за 6. клас

1. Изразът $\dfrac{(2^3)^4.3^5.5^5}{6^6.10^4}$ е равен на: **А)** $\dfrac{4}{5}$ **Б)** $\dfrac{5}{2^{12}}$ **В)** $\dfrac{5}{24}$ **Г)** $\dfrac{20}{3}$

Отговор: Г. $\dfrac{20}{3}$

2. Цената на една стока се повишила през януари с 10%, а след това през април с още 20%. С колко процента се е увеличила цената в резултат на двете повишения?

А) 30% **Б)** 31% **В)** 32% **Г)** 33%

Отговор: В. Да означим цената на стоката в началото с x. След първото увеличение цената става $1,1x$. При увеличение на новата цена с 20%, цената става $1,2(1,1x) = 1,32x$. Следователно увеличението на първоначалната цена е 32%.

3. Коя е последната цифра на 3^{2011}? **А)** 1 **Б)** 3 **В)** 7 **Г)** 9

Отговор: В. Понеже последната цифра на $3^4 = 81$ е 1, то последната цифра на 3^{2011} е равна на последната цифра на $3^3 = 27$.

4. Иван, Петър, Георги и Ивайло искат да определят колко тежат четиримата заедно. Те се премерили по двама и по трима. Иван, Петър и Георги тежат 98 кг. Петър, Георги и Ивайло тежат 91 кг. Иван и Ивайло тежат 55 кг. Колко е общото тегло на четиримата?

А) 115 **Б)** 122 **В)** 130 **Г)** 140

Отговор: Б. В сбора $98+91+55 = 244$ всяко тегло е броено по два пъти. Следователно общото тегло на четиримата е 122.

5. Върху страната BC на триъгълник ABC с лице 1 см^2 е избрана точка P, а върху отсечката AP е избрана точка Q. Ако $\dfrac{CP}{PB} = \dfrac{AQ}{QP} = \dfrac{1}{3}$, да се намери лицето на триъгълника ABQ.

А) $\dfrac{9}{4}$ **Б)** $\dfrac{3}{16}$ **В)** $\dfrac{1}{3}$ **Г)** $\dfrac{16}{3}$

Отговор: Б. Имаме $\dfrac{S_{ABQ}}{S_{ABP}} = \dfrac{1}{4}$ и $\dfrac{S_{ABP}}{S_{ABC}} = \dfrac{3}{4}$. Като умножим горните равенства намираме $\dfrac{S_{ABQ}}{S_{ABC}} = \dfrac{3}{16}$.

6. Дадени са числата $A = 3^{10}$, $B = 9^6$ и $C = 27^4$. Кое от следните е вярно?

А) $A > B > C$ **Б)** $A > B = C$ **В)** $A < B < C$ **Г)** $A < B = C$

Отговор: Г. Имаме $A = 3^{10}$, $B = 3^{12}$ и $C = 3^{12}$.

7. В стая има столове с по 4 крака и табуретки с по 3 крака. На всеки стол и всяка табуретка седнал по един ученик в резултат на което общият брой крака на столове, табуретки и ученици станал 28. Колко са столовете в стаята? **А)** 3 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 6

Отговор: А. Ако x и y са съответно броят на столовете и табуретките, имаме $6x+5y = 28$, като x и y са цели числа. Следователно $6x < 28$, откъдето намираме $x < 5$. Директно се проверява, че при $x = 1, 2, 3, 4$ само при $x = 3$ се получава цяло число $y = 2$. Следователно столовете са 3.

8. Дадени са числата $A = \dfrac{2011}{2012}$ и $B = \dfrac{20112012}{20122011}$. Кое от следните е вярно?

А) $A < B$ **Б)** $A = B$ **В)** $A > B$ **Г)** $A = 2B$

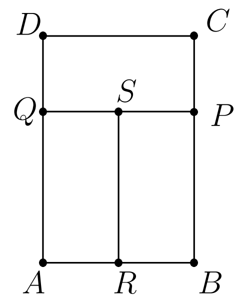
Отговор: А. Тъй като $2011(20120000 + 2011) < 2012(20110000 + 2012)$, то $A < B$.

9. По права линия са засадени 3 дървета, като разстоянията между тях са 121 и 44 метра. Колко най-малко още дървета трябва да се засадят, така че разстоянията между всеки две съседни дървета да са равни? **А)** 5 **Б)** 9 **В)** 13 **Г)** 17

Отговор: В. Ако разстоянията между дърветата означим с x, то x трябва да дели 121 и 44. Общите делители на 121 и 44 са 1 и 11 и понеже търсим най-малкият брой дървета изибраме $x = 11$. Тогава между първите две дървета трябва да се посадят още 10 дървета, а между второто и третото трябва да се посадят още 3 дървета, общо 13 дървета.

10. Правоъгълникът $ABCD$ е разрязан на три еднакви правоъгълника, както е показано на фигурата. Периметърът на $ABCD$ е 600 см. На колко е равен сборът на отсечките PQ и RS?

А) 300 см **Б)** 280 см **В)** 240 см **Г)** 200 см



Отговор: В. Ако малката страна на правоъгълника е x, а голямата е y, то $y = PQ = PS + SQ = 2x$. Тогава периметърът на $ABCD$ е равен на $3y + 4x = 10x$, откъдето $x = 60$ см. Тогава $PQ + RS = 2x + y = 4x = 240$ см.

11. Цифрите a и b са такива, че числото $\overline{2011ab}$ се дели на 54, а числото $\overline{2011ba}$ се дели на 15. На колко е равна разликата $a - b$?

Отговор: 5. Понеже $\overline{2011ba}$ се дели на 5, то $a = 0$ или $a = 5$. Тъй като $\overline{2011ab}$ се дели на 54, то b е четно число и $2 + 1 + 1 + a + b$ се дели на 9. Това означава, че $a + b = 5$ или $a + b = 14$. Решенията са $a = 0, b = 5$, $a = 5, b = 0$ и $a = 5, b = 9$. Директна проверка показва, че от числата 201105, 201150 и 201159 само 201150 се дели на 54.

12. Четири от числата 7, 10, 27, 35, 45, 63 са делители на трицифрено число n, а другите две не са. На колко е равно числото n?

Отговор: 315. Да означим с n търсеното трицифрено число. Понеже 5, 7 и 9 участват като множители в 4 от дадените числа, то те трябва да участват и в неизвестното число n. Това означава, че n се дели на $5.7.9 = 315$. Това означава, че $n = 315m$. Ако $m = 2$ или $m = 3$, то n ще се дели на 10 или на 27, което е противоречие. Ако $m > 2$, то числото n става четирицифрено, което също е противоречие.

13. Във всяка клетка на квадрат 3×3 е записано по едно число. Някои от числата са показани на фигурата.

1	2	3
x		4

Известно е, че сборът на числата, записани в произволен квадрат 2×2 е едно и също число. На колко е равно числото x?

Отговор: 2. Имаме четири квадрата 2×2. Да ги наречем горен ляв, горен десен, долен ляв и долен десен. От горния десен и долния десен намираме $2 + 3 = 4 + y$, където y е средното число в най-долния ред. Оттук $y = 1$. Сега от горния ляв и долния ляв намираме $1 + 2 = a + 1$, т.е. $a = 2$.

14. Естествените числа a, b и c са такива, че $12a = b^2$ и $12a = c^3$. Колко най-малко може да бъде a?

Отговор: $2^4 3^5$. За да бъде числото $12a$ едновременно точен квадрат и точен куб, то всеки прост делител на $12a$ трябва да бъде на степен, която се дели на 6.

15. В турнир по футбол участвали 5 отбора като всеки изиграл срещу всеки по една среща. Първите два отбора в класирането събрали общо 20 точки, а последните два отбора събрали общо 2 точки. Колко точки има третия отбор?
(Във футбола при победа се получават 3 точки, при равен се получава 1 точка и при загуба се получават 0 точки.)

Отговор: 6. В срещата между първите два отбора, те са получили общо 2 (ако са завършили наравно) или 3 (ако единият отбор е победил) точки. Това означава, че в останалите си 6 срещи с останалите три отбора те са събрали 18 или 17 точки. Ако някоя от тези 6 срещи не е завършила с победа за първия или втория отбор, то този отбор ще получи 0 или 1 точка. Това означава, че точките на първите двама ще бъдат не повече от 15, което е противоречие. Следователно първите два отбора са победили всички останали, а срещата между тях е завършила реми.
Понеже в срещата по между си последните два отбора са получили 2 точки, то те са завършили реми. Ако някой от последните двама е победил третия, то той ще има 4 точки, повече от третия. Следователно последните двама са загубили от третия. Понеже третият е загубил от първите двама, той има 6 точки.

Задачите от тази тема са предложени от Емил Колев.