Математически турнир „Иван Салабашев“, 2011 г.
Решения на задачите от темата за 8-9. клас

1. Числото $\dfrac{2011^2}{(1006^2-1005^2)^2}$ е равно на: **А)** 1 **Б)** 1005 **В)** 1006 **Г)** 2011

Отговор: А. Тъй като $1006^2-1005^2=(1006-1005)(1006+1005)=2011$ даденото число е равно на 1.

2. Средното аритметично на числата $1,-2,3,-4,\dots,2011,-2012$ е равно на:

А) -2012 **Б)** -2011 **В)** -1 **Г)** -0.5

Отговор: Г.

$$\frac{1-2+\ldots+2011-2012}{2012}=\frac{-1006}{2012}=-0.5.$$

3. Броят на различните решения на уравнението $|\,x-|2x+1|\,|=3$ е равен на: **А)** 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 4

Отговор: В. Ако $x-|2x+1|=3$, то $x\geq 3$ и уравнението няма решение, защото тогава $3=x-|2x+1|=x-(2x+1)=-x-1$, т.е $x=-4$. Уравнението $x-|2x+1|=-3$ има две решения $x=2$ и $x=-4/3$.

4. Нека $f(x)=(ax^2+x+3)(ax^2+x+5)$. Ако $f(-3)=-1$, то $f(3)$ е равно на:

А) 3 **Б)** 35 **В)** 1 **Г)** не може да се определи

Отговор: Б. Имаме $9a(9a+2)=-1$, т.е. $(9a+1)^2=0$. Оттук $9a=-1$ и намираме, че $f(3)=(9a+6)(9a+8)=5.7=35$.

5. Нека $ABCD$ е правоъгълник със страни $AB=4$ и $BC=2$. Ако M е точка върху страната AB, за която $\angle AMD=\angle CMD$, то $\angle AMD$ е равен на:

А) 30^o **Б)** 45^o **В)** 60^o **Г)** 75^o

Отговор: Г. От $\angle CDM=\angle AMD=\angle CMD$ следва, че $CM=CD=4$. Тогава $CM=2BC$ и от правоъгълния триъгълник MBC заключаваме, че $\angle BMC=30^o$, т.е. $\angle AMD=75^o$.

6. Нека n е естествено число, за което $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{n}$ е цяло число. Кое от следните твърдения не е вярно:

А) 3 дели n **Б)** 7 дели n **В)** 11 дели n **Г)** 14 дели n

Отговор: В. Имаме

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{n}=\frac{41}{42}+\frac{1}{n}<2.$$

Следователно $\dfrac{41}{42}+\dfrac{1}{n}=1$, т.е. $n=42$. Това число се дели на $3,7$ и 14, но не се дели на 11.

7. Едно просто число се нарича „интересно“ ако е с 1 по-голямо от кратно на 4 и с 1 по-малко от кратно на 5. Сумата на всички интересни прости числа между 1 и 100 е равна на:

А) 118 **Б)** 137 **В)** 158 **Г)** 187

Отговор: А. Всяко интересно просто число е от вида $5k-1$ и завършва на 4 или 9. Понеже е нечетно число, то завършва на 9. От всички такива числа по-малки от 100 махаме кратните на 3 и остават $19,29,49,59,79,89$. Тези от вида $4k+1$ са $29,49,89$ и понеже 49 не е просто число намираме, че интересните прости числа между 1 и 100 са 29 и 89. Тяхната сума е 118.

8. Разглеждаме всички прави в равнината с уравнения от вида $y = kx + b$, където k и b са реални числа и $kb > 0$. Коя от следните точки не лежи върху никоя от тези прави:

А) $(0, 2011)$ **Б)** $(2011, 0)$ **В)** $(0, -2011)$ **Г)** $(-2011, 0)$

Отговор: Б. Точката $(2011, 0)$ не лежи върху никоя от разглежданите прави, защото в противен случай $0 = 2011k + b$ и $kb = -2011k^2 \le 0$. Лесно се проверява,че всяка от останалите три точки лежи върху някоя от дадените прави.

9. Сумата на четните цифри на числата $1, 2, 3, \dots, 99, 100$ е равна на:

А) 200 **Б)** 360 **В)** 400 **Г)** 560

Отговор: В. Разглеждаме числата $00, 01, \dots, 98, 99$. Тук имаме $2.100 = 200$ цифри, като всяка се появява $200/10 = 20$ пъти. Следователно търсената сума е $20.0 + 20.2 + \dots + 20.8 = 400$.

10. Кое от следните числа може да се представи като сума на 100 последователни естествени числа: **А)** $10^{2011} + 40$ **Б)** $10^{2011} + 50$ **В)** $10^{2011} + 60$ **Г)** $10^{2011} + 70$

Отговор: Б. Имаме $A = (k+1)+(k+2)+\dots(k+100) = 5050+100k$. Следователно A завършва на 50 и отговорът е (Б). В този случай

$$k = \frac{10^{2011} - 5000}{100} = 10^{2009} - 50.$$

11. Нека ABC и ABE са правоъгълни триъгълници, за които $\angle ABC = \angle BAE = 90^\circ$, $BC = 2, AB = 3, AE = 4$ и хипотенузите AC и BE се пресичат в точка D. Да се намери произведението на височините на триъгълниците ADE и BDC, съответно към страните AE и BC.

Отговор: 2. Нека x и y са разглежданите височини. Тогава $2x - y = S_{ADE} - S_{BCD} = S_{ABE} - S_{ABC} = 6 - 3 = 3$. От друга страна $x + y = AB = 3$ и намираме, че $x = 2, y = 1$,т.е. $xy = 2$. До същият извод може да се стигне и като се използва, че триъгълниците ADE и BCD са подобни

12. Да се намери броят на точните квадрати, които са делители на числото $1!2!3!\dots10!$.
(Ако n е естествено число, то $n! = 1.2.\dots.n$.)

Отговор: 2160. Разлагайки всеки от факториелите на прости множители намираме, че даденото число е равно на $2^{38}3^{17}5^7 7^4$. Точните квадрати, които го делят имат вида $2^a 3^b 5^c 7^d$, където a, b, c, d са неотрицателни четни числа, които не надминават съответно $38, 17, 7, 4$. Техният брой е равен на $20.9.4.3 = 2160$.

13. Нека x и y са реални числа, за които

$$|\, x + y \,| + |\, x - y \,| = 2.$$

Да се намери най-голямата възможна стойност на $x^2 - 6x + y^2$.

Отговор: 8. *Първи начин.* Точките с координати (x, y), изпълняващи даденото условие лежат върху квадрата определен от правите $x = \pm 1, y = \pm 1$. От $x^2 - 6x + y^2 = (x-3)^2 + y^2 - 9$ следва, че трябва да намерим най-дълготоразстояние от точката (x, y) до точка от квадрата. Очевидно то се достига за точките $(-1, \pm 1)$ и търсената най-голяма стойност е равна на 8.
Втори начин. От условието лесно следва,че или $x = \pm 1, -1 \le y \le 1$ или $y = \pm 1, -1 \le x \le 1$. След заместване в дадения израз трябва да намерим максималната стойност на $t^2 + 6t + 1$ при $-1 \le t \le 1$, която е 8.

14. Нека A е подмножество на множеството $\{1, 2, 3, \dots, 2011\}$ такова, че сумата на всеки два елемента на A е различна от 2111. Колко най-много елемента може да има A?

Отговор: 1055. Можем да считаме, че числата от 1 до 99 са в A, защото никое от тях не дава сума 2111 с число от 1 до 2011. Числата от 100 до 2011 могат да се разделат на 956 двойки $(100, 2011), (101, 2010), \ldots, (1055, 1056)$ със сума 2111 и A може да съдържа най-много едно число от всяка двойка. Следователно A може да има най-много $99 + 956 = 1055$ елемента.

15. Да се намери броят на реалните числа x, за които $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{5}\right] = x$.
(За всяко реално число a с $[a]$ се означава най-голямото цяло число, което не надминава a.)

Отговор: 30. Нека x изпълнява условието. Тогава то е цяло число и нека $x = 30p + q, 0 \leq q < 30$. След заместване в даденото равенство получаваме

$$15p + \left[\frac{q}{2}\right] + 10p + \left[\frac{q}{3}\right] + 6p + \left[\frac{q}{5}\right] = 30p + q.$$

Оттук

$$p = q - \left[\frac{q}{2}\right] - \left[\frac{q}{3}\right] - \left[\frac{q}{5}\right]$$

и тъй нато q приема точно 30 различни стойности, то броят на търсените числа е 30.

Задачите от тази тема са предложени от Олег Мушкаров.