Математически турнир „Иван Салабашев“, 2012 г.
Решения на задачите от темата за 10., 11., 12. клас

1. Нека $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ и P е полином от трета степен с цели коефициенти, един от които е равен на 1. Ако $P(\alpha) = 0$, да се намери $P(1)$.
Отговор: 2.
Решение. Ако $a = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$, то $a - 1/a = \alpha$ и

$$2 = a^3 - 1/a^3 = (a - 1/a)^3 + 3(a - 1/a).$$

Тогава за $P(x) = x^3 + 3x - 2$ имаме, че $P(\alpha) = 0$ и $P(1) = 2$.
Забележка. Може да се докаже, че ако Q е полином от най-много трета степен с цели коефициенти, за който $Q(\alpha) = 0$, то $Q = kP$, където $k \in \mathbb{Z}$. В частност, полиномът от условието на задачата е единствен.

2. Да се намери най-голямата възможна стойност на лицето на изпъкнал четириъгълник $ABCD$, за който $AB + CD = 12$ и $AD + BC = 20$.
Отговор: 60.
Решение. Имаме, че

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} \leq \frac{AB.BC + AD.CD}{2},$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CBD} \leq \frac{AB.AD + BC.CD}{2}$$

и като съберем тези неравенства, следва, че

$$S_{ABCD} \leq \frac{(AB + CD)(AD + BC)}{4} = 60.$$

Равенство се достига само при правоъгълник.

3. Да се намери най-малкото естествено число k със следното свойство: ако $a_1 = a_2 = 1$ и $a_{n+2} = a_{n+1} + ka_n$ при $n \geq 1$, то a_n не е точен квадрат за всяко $n \geq 3$.
Отговор: 2.
Решение. При $k = 1$ имаме, че $a_{12} = 12^2$. При $k = 2$ и $n \geq 2$ следва, че $a_{2n-1} \equiv 3 \pmod 8$, $a_{2n} \equiv 5 \pmod 8$; значи a_n не е точен квадрат при $n \geq 3$.

4. Числата от 1 до 8 са разположени във върховете на осмоъгълник така, че сумата на числата във всеки три последователни върха е поне n. Да се намери най-голямата възможна стойност на n.
Отговор: 12.
Решение. Нека a_n е числото в n-ия връх. Примерът

$$a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 2, a_5 = 4, a_6 = 7, a_7 = 3, a_8 = 8$$

показва, че е отговорът е поне 12.
Да допуснем, че той е поне 13. Можем да считаме, че $a_1 = 1$. Тогава $a_2, a_3, a_7, a_8 \geq 4$. От друга страна, 2 и 3 не могат да са в съседни върхове, защото 8 трябва да и отляво, и отдясно на тях. Значи $\{a_4, a_6\} = \{2, 3\}$ и тогава $a_5 = 8$. Следователно $\{a_2, a_3, a_7, a_8\} = \{4, 5, 6, 7\}$, откъдето $(a_1 + a_2 + a_3) + (a_7 + a_8 + a_1) = 24$, което е противоречие.

5. Ако $a \leq 99$, b и c са такива естествени числа, че $c^2 = ab - 1$ и $(a-b)^2 = 4c - 3$, да се намери най-голямата възможна стойност на a.

Отговор: 82.

Решение. Можем да считаме, че $a > b$. Ако $2n - 1 = \sqrt{4c-3}$, то $c = n^2 - n + 1$ и $a^2 - (2n - 1)a - (n^2 - n + 1)^2 - 1 = 0$, откъдето $a = n^2 + 1$ и $b = (n-1)^2 + 1$. Значи отговорът е 82.

6. Ако P е полином с неотрицателни цели коефициенти, за който $P(12) = 2012$, да се намери най-малката възможна стойност на $P(2)$.

Отговор: 42.

Решение. Ако някой коефициент на P, например пред x^k, е поне 12, то полиномът $Q(x) = P(x) - 12x^k + x^{k+1}$ е с неотрицателни цели коефициенти, $Q(12) = P(12)$ и $Q(2) < P(2)$. Продължвайки по този начин ще стигнем до полином R с неотрицателни цели коефициенти, по-малки от 12, за който $R(12) = P(12)$ и $R(2) \leq P(2)$. Понеже $2012 = 12^3 + 12^2 + 11.12 + 8$, следва, че най-малката възможна стойност на $P(2)$ се достига само при $P(x) = x^3 + x^2 + 11x + 8$. Следователно търсеното число е равно на 42.

Задача 7. Да се намерят всички редици $a_1, a_2 \dots$ от реални числа такива, че $a_{mn+1} = a_m a_n + 1$ за произволни $m, n \in \mathbb{N}$.

Решение. Имаме, че $a_{n+1} = a_n a_1 + 1$ и $a_5 = a_2^2 + 1$, откъдето

$$a_2^2 = a_4 a_1 = (a_3 a_1 + 1)a_1 = ((a_2 a_1 + 1)a_1 + 1)a_1.$$

Оттук и $a_2 = a_1^2 + 1$ следва, че

$$a_2^2 = a_2 a_1^3 + a_1^2 + a_1 = a_2 a_1 (a_2 - 1) + a_2 - 1 + a_1$$

и значи $(a_1 - 1)(a_2^2 - a_2 + 1) = 0$. Тогава $a_1 = 1$ и по индукция получаваме, че $a_n = n$, като редицата с този общ член изпълнява даденото условие.

Оценяване. 1 т. $a_{n+1} = a_n a_1 + 1$, 1 т. $a_2^2 = a_4 a_1$ и 3 т. за довършване на решението.

Задача 8. Да се намери стойността на реалния параметър k така, че триъгълникът с върхове пресечните точки на графиката на функцията $y = x^2 + kx - 1$ с координатните оси има най-малък радиус на вписаната окръжност.

Решение. Нека $x_1 < 0 < x_2$ са корените на уравнението $x^2 + kx - 1 = 0$. Тогава върховете на разглеждания триъгълник са $A = (x_1, 0)$, $B = (0, x_2)$ и $C = (0, -1)$. При стандартните означения за елементите на триъгълника имаме, че

$$a^2 + b^2 = x_2^2 + 1 + x_1^2 + 1 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = (x_1 - x_2)^2 = c^2$$

и значи $\gamma = 90^\circ$, т.е. $2r = a + b - c$.

Тогава $r \geq \kappa = \sqrt{2} - 1$, като равенство се достига само при $k = 0$. Наистина,

$$r \geq \kappa \Leftrightarrow a + b \geq 2\kappa + c \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 4\kappa^2 + 4\kappa c + c^2 \Leftrightarrow ab \geq 2\kappa(\kappa + c)$$

$$\Leftrightarrow c \geq 2\kappa(\kappa + c) \Leftrightarrow c \geq \frac{2\kappa^2}{1 - 2\kappa} = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \geq 4 \Leftrightarrow k^2 \geq 0.$$

Оценяване. 2 т. за $\gamma = 90^\circ$, 1 т. за $2r = a + b - c$ и 4 т. за довършване на решението.

Задачите от тази тема са предложени от Николай Николов.