Математически турнир „Иван Салабашев“, 2011 г.
Решения на задачите от темата за 7. клас

1. Ако n е цяло число, за което $\dfrac{(2^7)^3.(3^3)^7.(1+2^2)^3}{125.6^{23}} = 6^n$, то n е равно на:

А) -3 **Б)** -2 **В)** 1 **Г)** 2

Отговор: Б. Изразът отляво е $\dfrac{2^{21}.3^{21}.5^3}{5^3.6^{22}} = \dfrac{6^{21}}{6^{23}} = 6^{-2}$. Следователно $n = -2$.

2. Три ъгъла се отнасят както $4 : 5 : 7$, а сумата на най-малкия и най-големия от тях е 143°. Тогава средният по големина ъгъл е:

А) 52° **Б)** 56° **В)** 65° **Г)** 78°

Отговор: В. Ъглите са с големини $4x$, $5x$ и $7x$, като $4x+7x = 143^\circ$. Тогава $x = 13^\circ$ и средният ъгъл е $5x = 65^\circ$.

3. Колко са трицифрените числа, които дават остатък 11 при деление на 13?

А) 70 **Б)** 69 **В)** 71 **Г)** 80

Отговор: А. Разглежданите числа са $102 = 7.13+11$, $115 = 8.13+11$, $\dots$, $999 = 76.13+11$ и се преброяват лесно по множителя пред 13. Следователно търсеният брой е $76-7+1 = 70$.

4. Цифрите a и b са такива, че

$$\frac{9}{a} + \frac{8}{b} = \frac{\overline{ab} - \overline{ba}}{8}.$$

Да се намери $a+b$.

А) 10 **Б)** 9 **В)** 8 **Г)** 11

Отговор: А. От условието получаваме $8(9b+8a) = 9ab(a-b)$. Оттук следва, че a се дели на 9 и значи $a = 9$ и $8(b+8) = 9b(9-b)$. От последното следва, че $b+8$ се дели на 9, откъдето $b = 1$ и $a+b = 10$.

5. Ако е известно, че $x - 2y < x$ и $x + 2y < y$, кое от следните е вярно:

А) $0 < x < y$ **Б)** $x < y < 0$ **В)** $x < 0 < y$ **Г)** $0 < y < x$

Отговор: В. От първото неравенство получаваме $y > 0$, а от второто имаме $x < -y$, т.е. $x < 0$.

6. Нека a е четно естествено число. Ако $[x]$ е най-голямото цяло число, което не надминава x, $\{x\} = x - [x]$, да се намери

$$\left\{\frac{a^2+1}{4}\right\} + \{-3,25\} - \left[\frac{2012}{2013}\right].$$

А) 0 **Б)** 1 **В)** 0,25 **Г)** 0,5

Отговор: Б. Тъй като a^2 се дели на 4, числото $\frac{a^2}{4}$ е цяло и имаме $\left\{\frac{a^2+1}{4}\right\} = \left\{\frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4} = 0,25$. Освен това $\{-3,25\} = -3,25 - (-4) = 0,75$, а $0 < \frac{2012}{2013} < 1$, т.е. $\left[\frac{2012}{2013}\right] = 0$. Следователно търсеното число е $0,25 + 0,75 + 0 = 1$.

7. Колко четни естествени числа, по-малки от 10^6, могат да се съставят с цифрите 0, 1, 3, 5, 7 и 8 (не е задължително да се използват всички цифри)?

А) 15551 **Б)** 15552 **В)** 2592 **Г)** 2591

Отговор: А. За едноцифрени числа имаме една възможност, за двуцифрени 5 възможности за първа цифра и две за втора, общо $5.2 = 10$, за трицифрени 5 за първа, 6 за втора и 2 за трета, общо $5.6.2 = 60$ и т.н. (на всяка следваща стъпка възможностите се увеличават 6 пъти). Следователно търсеният брой е $1 + 10 + 60 + 360 + 2160 + 12960 = 15551$.

8. Даден е $\triangle ABC$, в който точките D и E са вътрешни съответно за страните AB и BC и са такива, че $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CAE = 40^\circ$ и $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD = 20^\circ$. Правите AE и CD се пресичат в точка F. Кое от следните твърдения не е вярно?

А) $AE = CE$ **Б)** $AB = AC$ **В)** $AF = DF$ **Г)** $AD = BD$

Отговор: Г. Ако $AD = CD$, то CD е медиана и ъглополовяща и значи $AC = BC$. Освен това имаме $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 40^\circ$, т.е. $AC = BC$ и $\triangle ABC$ е равностранен, противоречие.

9. На дъската са записани последователно числата $1, 2, 3, \ldots, 2012$, след което точните квадрати и точните кубове са изтрити. На кое място в списъка е 2012 след това изтриване?

А) 1956 **Б)** 1958 **В)** 1959 **Г)** 1960

Отговор: В. Тъй като $44^2 < 2012 < 45^2$, изтритите точни квадрати са 44 на брой. Аналогично от $12^3 < 212 < 13^3$ следва, че са изтрити 12 точни куба. В това преброяване по два пъти са отчетени точните 6-ти степени, които поради $3^6 < 2012 < 4^6$ са 3 на брой. Следователно 2012 стои на $2012 - 44 - 12 + 3 = 1959$ позиция.

10. В шахматен турнир по системата всеки срещу всеки (по една партия) трима от участниците се отказали след приключване на втория кръг. В крайна сметка се оказало, че на турнира са се изиграли 49 партии. Колко партии са изиграли помежду си тримата отказали се?

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

Отговор: В. Ако останалите участици са поне 11, те са изиграли помежду си поне $\binom{11}{2} = 55$ партии, а ако са не повече от 9, то техните партии са най-много $\binom{9}{2} = 36$ и няма как, дори с 6 различни партии на тримата напуснали, да имаме общо 49. Следователно останалите участници са 10 и те са изиграли помежду си $\binom{10}{2} = 45$ партии. Тогава от 6-те партии на тримата напуснати $45 + 6 - 49 = 2$ са преброени по два пъти, т.е. са изиграни помежду тях.

11. Даден е $\triangle ABC$, в който $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ и $AC < BC$, точките D и E са вътрешни за страната AB са такива, че $AD = AC$ и $BE = BC$. Да намери $\sphericalangle DCE$.

Отговор: 45°**.** Да означим $\sphericalangle ACE = x$, $\sphericalangle DCE = y$ и $\sphericalangle BCD = z$. Тогава $x + y + z = 90^\circ$, $x + y = \frac{180^\circ - \sphericalangle BAC}{2}$ и $y + z = \frac{180^\circ - \sphericalangle ABC}{2}$. От последните две равенства намираме $x + 2y + z = \frac{360^\circ - (\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC)}{2} = 135^\circ$. Следователно $y = x + 2y + z - (x + y + z) = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$.

12. На дъскета са написани неравенствата $x > 1$, $x \leq 2$, $x > 3$, $x \leq 4$, $\ldots$, $x > 2011$, $x \leq 2012$, $x > 2013$ където x е някакво число. Колко най-много от тези равенства могат да бъдат верни?

Отговор: 1007. От всяка двойка неравенства $x \leq 2k$ и $x > 2k + 1$ $(1 \leq k \leq 1006)$ може да бъде вярно най-много едно. Следователно поне 1006 неравенства не са верни. Останалите 1007 могат да бъдат верни например при $x > 2013$.

13. Иван, Деси и Илиана притежават монети, издадени от министър Дянков. Известно, е че монетите са три вида и всеки от тримата има поне по една монета от всеки вид. Иван има 4 монети, Деси има 5 монети, а Илиана има 3 монети. Всеки вид монети има различна левова равностойност, която е естествено число, като левовите равностойности на монетите на Иван и Деси са съответно 32 и 21 лв. Да се намери левовата равностойност на монетите на Илиана.

Отговор: 19. Нека левовите равностойности на трите вида монети са естествените числа a, b и c. Тогава от условието за Иван следва, че $2a + b + c = 32$. За Деси имаме $a + 2b + 2c = 21$ или

$a+b+3c=21$. Ако е първото, получаваме $3(a+b+c)=53$, което е невъзможно от съображения за делимост на 3.
Следователно $2a+b+c=32$ и $a+b+3c=21$, откъдето $a=11+2c$. При $c\geq 2$ получаваме $a\geq 15$ и равенството $2a+b+c=32$ е невъзможно. Ако $c=1$, получаваме $a=13$ и $b=5$. Тогава левовата равностойност на монетите на Илиана е $a+b+c=13+5+1=19$ лв.

14. Числата a, b, c и d са такива, че $abc=4$, $bcd=8$, $cda=16$ и $dab=64$. Да се намери $2(a+b+c+d)$.
Отговор: 29. Умножаваме почленно дадените равенства и получаваме $(abcd)^3=2^2.2^3.2^4.2^6=2^{15}$. Ако си представим, че $abcd=2^x$, то $2^{3x}=2^{15}$, откъдето $x=5$. Следователно $abcd=32$ и

$$2(a+b+c+d)=2abcd(\frac{1}{abc}+\frac{1}{bcd}+\frac{1}{cda}+\frac{1}{dab})=64(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64})=16+8+4+1=29.$$

15. Да се намери броят на наредените двойки (x,y) от цели числа, за които $x^2+y^2+x+y=xy$.
Отговор: 6. Сле умнажение на даденото равенство по 2 и добавяне на 2 от двете страни, то може да се запише във вида $(x-y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2=2$. От последното следва, че един от квадратите отляво е равен на 0, а другите два – на 1. Ако $x-y=0$, то $(x+1)^2=(y+1)^2=1$ и $x=y$, откъдето намираме две от исканите двойки. Ако $x+1=0$, то $x=-1$ и $(y+1)^2=1$, откъдото намираме още две решения. Аналогично при $y+1=0$ получаваме още две решения и следователно търсеният брой е 6.

Задачите от тази тема са предложени от Петър Бойваленков.