Математически турнир „Иван Салабашев“, 2012 г.
Решения на задачите от темата за 8-9. клас

1. Числото $504^4 - 503^2(504^2 + 2.504 + 3)$ е равно на:

А) 2010 **Б)** 2011 **В)** 2012 **Г)** 2013

Отговор: Г. Тъй като $n^4-(n-1)^2(n^2+2n+3) = n^4-(n-1)(n^3+n^2+n-3) = n^4-(n^4-4n+3) = 4n-3$, то даденото число е равно на 2013.

2. Средната възраст на футболен отбор от 11 футболисти е 22 години, а средната възраст на играчите без вратаря е 21 години. На колко години е вратарят на отбора?

А) 12 **Б)** 22 **В)** 32 **Г)** 42

Отговор: В. Вратарят е на $22.11 - 10.21 = 32$ години.

3. Броят на целите числа a, за които $a < 100$ и $|a-1| > |a-2|$ е равен на:

А) 97 **Б)** 98 **В)** 99 **Г)** 100

Отговор: Б. Ако $a \leq 1$, то $|a-1| = 1-a, |a-2| = 2-a$ и даденото неравенство не е изпълнено. Аналогично се вижда, че целите числа a, изпълняващи условията са $a = 2, 3, \dots, 99$.

4. Емил си купил пакет с бонбони и изял 20% от тях. На другия ден той изял 20% от останалите бонбони и се оказало, че са му останали 32 бонбони. Първоначалният брой бонбони в пакета е бил:

А) 45 **Б)** 50 **В)** 55 **Г)** 60

Отговор: Б. Нека първоначално в пакета е имало x бонбони. Емил изяжда $20\% = \frac{1}{5}$ от тях и му остават $\frac{4}{5}x$ бонбони. От тях той изяжда $\frac{1}{5}$ и в крайна сметка му остават $\frac{4}{5}.\frac{4}{5}x$ бонбони. Следователно $\frac{4}{5}.\frac{4}{5}x = 32$ и намираме, че $x = 50$.

5. Ако x, y, z са реални числа, за които $x - y + 3z = 3$ и $3x + 3y - z = 1$, то $x^2 - y^2 + z^2$ е равно на:

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** не може да се определи

Отговор: А. Имаме $x+3z = 3+y$ и $3x-z = 1-3y$. Оттук $(x+3z)^2+(3x-z)^2 = (3+y)^2+(1-3y)^2$ и след разкриване на скобите и съкращаване на 10 получаваме $x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

6. В $\triangle ABC$ имаме, че $\angle BAC - \angle ABC = 120°$. Отношението на дължината на височината към дължината на ъглополовящата на триъгълника през върха C е равно на:

А) $\frac{1}{2}$ **Б)** $\frac{2}{3}$ **В)** $\frac{1}{3}$ **Г)** $\frac{3}{4}$

Отговор: А. Нека CH и CD са височината и ъглополовящата на $\triangle ABC$ през върха C. От $\angle ACB = 180^o - (\angle BAC + \angle ABC) = 60^o - 2\angle ABC$ следва, че $\angle DCB = 30^o - \angle ABC$. Тогава $\angle HDC = \angle DCB + \angle ABC = 30^o$ и от правоъгълния $\triangle HDC$ заключаваме, че $\frac{CH}{CD} = \frac{1}{2}$.

7. Числото n е произведение на три последователни естествени числа и се дели на 7. Кое от следните числа може да не е делител на n:

А) 6 **Б)** 14 **В)** 21 **Г)** 28

Отговор: Г. Произведението на три последователни естествени числа се дели на 2 и 3. Следователно n винаги се дели на $6, 14$ и 21, но може да не се дели на 28, както показва числото $n = 5.6.7$.

8. Нека x и y са естествени числа, за които $3x^2 + 3xy + 2x - y = 56$. Тяхното произведение е равно на :

А) 12 **Б)** 14 **В)** 16 **Г)** 18

Отговор: В. Нека x и y изпълняват дадените условия. Тогава $y = \frac{56-2x-3x^2}{3x-1} = -(x+1) + \frac{55}{3x-1}$ и следователно $3x-1$ дели 55. Оттук намираме, че $x = 2$ или $x = 4$ и съответно $y = 8$ или $y = 0$. Понеже числата x и y са естествени заключаваме, че $xy = 16$.

9. Нека f е функция, за която $f(x) = yf(xy)$ за произволни положителни числа x, y. Ако $f(2011) = 2013$, то $f(2012)$ е равно на: **А)** $\dfrac{2012.2013}{2011}$ **Б)** $\dfrac{2011.2013}{2012}$ **В)** $\dfrac{2011.2012}{2013}$ **Г)** 2014

Отговор: Б. За произволно положително число x имаме $f(x) = f(1.x) = \dfrac{f(1)}{x}$. Тогава от $f(2011) = 2013$ следва, че $f(1) = 2011.2013$, т.е. $f(2012) = \dfrac{2011.2013}{2012}$.

10. Цифрата на десетиците на числото 7^{2012} е равна на: **А)** 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

Отговор: А. Имаме, че $7^4-1 = (7^2-1)(7^2+1) = 48.50$ се дели на 100. Следователно $7^{2012}-1 = (7^4)^{503} - 1$ се дели на $7^4 - 1$, т.е. на 100 и цифрата на десетиците на даденото число е 0.

11. Върху катета BC на правоъгълен $\triangle ABC$ с $\angle ACB = 90^o$ и $BC = 3AC$ са взети точки E и D, за които $CE = ED = DB$. Да се намери $\angle ABC + \angle ADC + \angle AEC$.

Отговор: 90°. Нека $CBNM$ е квадрат, за който A лежи върху страната му CM. Нека P и Q са точки върху MN, за които $M = PQ = QN$. Тогава триъгълнице ACD и PMA са еднакви и следователно $\triangle DAP$ е равнобедрен и правоъгълен, т.е. $\angle ADP = 45^o$. От друга страна триъгълниците ABC и PDQ са също еднакви и заключаваме, че $\angle ABC + \angle ADC +$
$+ \angle AEC = \angle PDQ + \angle ADC + \angle PDA = 90^o$.

12. Колко четни числа между 4000 и 7000 имат четири различни цифри?

Отговор: 728. Цифрата на хилядите е $4, 5$ или 6. Ако е 4 или 6, то има 4 възможности за цифрата на единиците и следователно 8-за стотиците и 7 за десетиците, т.е. общо $2.4.8.7 = 448$. Ако цифрата на хилядите е 5, то има 5 възможности за цифрата на единиците, 8-за стотиците и 7 за десетиците, т.е. общо $1.5.8.7 = 280$. Търсеният брой е $448 + 280 = 728$.

13. Нека a, b, c са естествени числа, за които $a + b + c = 2012$. Да се намери най-голямата възможна стойност на abc.

Отговор: 670.671^2. Нека две от числата a, b, c се различават с повече от 1, например $a \geq b+2$. Като ги заменим с $a-1$ и $b+1$ запазваме сумата и увеличаваме произведението на трите числа, защото $(a-1)(b+1) = ab + a - b - 1 > ab$. Следователно поне две от числата a, b, c трябва да са равни и понеже сумата им е 2012 третото число е с 1 по-малко от тях.

14. Кое е най-малкото естествено число, което може да се представи като сума на $9, 10$ и 11 последователни естествени числа?

Отговор: 495. Нека a, b, c са първите числа в съответните редици. Тогава $n = a+(a+1)+\ldots+(a+8) = 9a+36 = 10b+45 = 11c+55$. От последните две равенства следва, че b се дели на 9 и $b-1$ се дели на 11. Най-малкото b с това свойство е $b = 45$ и търсеното n е $n = 10.45+45 = 495$.

15. Растящата редица $2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, \ldots$ се състои от естествените числа, които не са точни квадрати и кубове. Да се намери 500-ят член на тази редица.

Отговор: 528. Първият квадрат по-голям от 500 е $23^2 = 529$ и има 23 точни квадрата и 8 куба ($8^3 = 512 < 529 < 9^3 = 729$), по-малки от 529. Но 1 и 2^6 са едновременно точен квадрат и куб, т.е. има точно $529 - 23 - 8 + 2 = 500$ числа в дадената редица, които са по-малки от 529. Следователното търсеното число е 528.

Задачите от тази тема са предложени от Олег Мушкаров.