Математически турнир „Иван Салабашев“, 2013 г.
Решения на задачите от темата за 10., 11., 12. клас

1. Да се намери лицето на вписан в окръжност четириъгълник с дължини на последователни страни 1, 7, 5, 5.

Отговор: 16. Ако θ е ъгълът между страните с дължини 1 и 7, то $1^2 + 7^2 - 2.1.7\cos\theta = 5^2 + 5^2 + 2.5.5\cos\theta$. Оттук $\cos\theta = 0$, т.е. $\theta = 90°$. Следователно $S = \dfrac{1.7 + 5.5}{2} = 16$.

2. По колко начина 3 бели и 10 черни пула могат се разположат на права така, че да няма бял пул със съседи два черни пула?

Отговор: 31. Имаме две възможности:
1) белите пулове са един до друг;
2) първият или последният пул е бял, а другите два бели пула са един до друг, но не са съседни на него;
Следователно отговорът е 11+2.10=31.

3. Да се намери броя на трицифрените естествени числа, средната цифра на които е средно аритметично на останалите две.

Отговор: 45. Търсеният брой е равен на броя на двуцифрените естествени числа с една и съща четност на цифрите, т.е. на 9.5=45.

4. Да се намери максималния брой различни естествени числа, ненадминаващи 2013, сумата на всеки три от които се дели на 33.

Отговор: 61. Ако x, y, z, t са четири от тези числа, то 33 дели $x + y + z$ и $x + y + t$ и значи 33 дели $z - t$. И така, всеки две числа при деление на 33 дават един и същ остатък, а именно 33:3=11. Следователно отговорът е 2013:33=61.

5. Уравнението $8x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$ има реален корен от вида $\dfrac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + 1}{c}$, където a, b, c са естествени числа. Да се намери $a + b + c$.

Отговор: 98. Записваме уравнението във вида $9x^3 = (x + 1)^3$, откъдето

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{9} - 1} = \frac{\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{9} + 1}{8}.$$

6. Да се намери сумата от първите две цифри след десетичната запетая на числото $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$.

Отговор: 18. Да забележим, че

$$\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Следователно даденото число е равно на 99,99.

Задача 1. Нека M е точка върху по-малката дъга EF от описаната окръжност около правилен шестоъгълник $ABCDEF$. Да се докаже, че отношението $\dfrac{AM + BM + CM + DM}{EM + FM}$ не зависи от M.

Решение. От теоремата на Птолемей имаме, че

$$\frac{MD}{MA+MF}=\frac{AD}{AF}=k=\frac{BC}{BE}=\frac{MC}{MB+ME}.$$

Следователно

$$(*)\quad \frac{AM+BM+CM+DM}{EM+FM}=k+(k+1)\frac{AM+BM}{EM+FM}.$$

Нека N е средата на по-малката дъга AB. Пак от теоремата на Птолемей получаваме, че

$$\frac{AM+BM}{SM}=\frac{AB}{AS},\quad \frac{EM+FM}{SM}=\frac{EF}{ES}.$$

От тези две равенства и $(*)$ следва твърдението на задачата.
Оценяване. 2 т. за $(*)$ и 3 т. за довършване на решението. При тригонометричен подход 2 т. за тригонометрично равенство, еквивалентно на даденото.

Задача 2. Да се намерят всички естествени числа $a \in [4, 99]$, за които числото $\overline{2013}_{(a)}$ е точен квадрат.
Отговор. 6.
Решение. Имаме, че $\overline{2013}_{(a)} = 2a^3+a+3 = b(2b^2-6b+7)$, където $b = a+1$. Ако 7 не дели b, то $2b^2-6b+7 = \dfrac{(2b-3)^2+5}{2}$ е точен квадрат. Тогава $x^2+5 = 2y^2$. Понеже z^2 дава остатък 0 или ± 1 при деление на 5, следва, че 5 дели x и y. Значи 25 дели $2y^2-x^2 = 5$, което е противоречие. И така, 7 дели b. Ако $b = 7c$, следва, че $\overline{2013}_{(a)} = 49c(14c^2-6c+1)$ е точен квадрат. Значи c и $14c^2-6c+1$ са точни квадрати. Понеже $a \leq 99$, то $c \leq 14$ и значи $c = 1, 4, 9$. За тези c числото $14c^2-6c+1$ е точен квадрат само при $c = 1$. И така, $a = 6$ ($\overline{2013}_{(6)} = 21^2$).
Оценяване. 1 т. за $\overline{2013}_{(a)} = b(2b^2-6b+7)$, 2 т. за случая 7 не дели b (от които 1 т. за $x^2+5 = 2y^2$) и 2 т. за случая 7 дели b.

Задачите от тази тема са предложени от Николай Николов.