Математически турнир „Иван Салабашев“, 2013 г.
Решения на задачите от темата за 7. клас

1. Кое е най-голямото цяло число, което е по-малко от числото $4a+b+3c$, където $a = \dfrac{2^3+3^2}{3^3+2^2+1}$, $b = \dfrac{5}{3} - \dfrac{3}{5}$ и $c = \dfrac{5^3+1}{2^3+1}$?

А) 42 **Б)** 43 **В)** 44 **Г)** 45

Отговор: Г. Имаме $a = \frac{17}{32}$, $b = \frac{16}{15}$ и $c = 14$, откъдето $4a+b+c = \frac{17}{8} + \frac{16}{15} + 42 = 45 + \frac{1}{8} + \frac{1}{15}$. Последното число е по-голямо от 45 и по-малко от $45 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 45$ и следователно търсеното число е 45.

2. Нека m и n са естествени числа, за които е изпълнено равенството $\dfrac{(2^2.2^3)^4.(5^3.5)^3}{10^6} = 2^m.5^n$. Да се намери $m+n$.

А) 20 **Б)** 6 **В)** 14 **Г)** 12

Отговор: А. Имаме $\dfrac{(2^2.2^3)^4.(5^3.5)^3}{10^6} = \dfrac{2^{20}.5^{12}}{2^6.5^6} = 2^{14}.5^6$, откъдето $m = 14$, $n = 6$ и $m+n = 20$.

3. Нека x и y са такива числа, че изразът $4x^2+13y^2-12xy-4y+2$ приема възможно най-малка стойност. Да се намери $2x+y$.

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 4

Отговор: В. Тъй като $4x^2+13y^2-12xy-4y+2 = (2x-3y)^2+(2y-1)^2+1$, най-малката възможна стойност на дадения израз е 1. Тази стойност се достига при $2x-3y = 2y-1 = 0$, т.е. при $y = 1/2$ и $x = 3/4$, откъдето $2x+y = 3/2+1/2 = 2$.

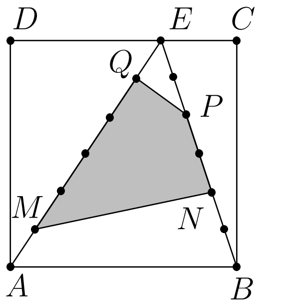
4. Известно е, че $\dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = 5$. Колко е $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$?

А) $\dfrac{1}{5}$ **Б)** 1 **В)** $\dfrac{29}{10}$ **Г)** $\dfrac{17}{5}$

Отговор: В. Даденото равенство е еквивалентно на $\frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2} = 5$, откъдето получаваме $x^2 = \frac{7y^2}{3}$. Тогава $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{7/3+1}{7/3-1} + \frac{7/3-1}{7/3+1} = \frac{29}{10}$.

5. Даден е квадрат $ABCD$ със страна 12 см и точка E върху страната CD. Отсечките AE и BE са разделени на по 6 равни части както е показано на чертежа. Да се намери лицето на четириъгълника $MNPQ$.

А) 32 **Б)** 36 **В)** 38 **Г)** 40



Отговор: Б. Имаме последователно $S_{ABE} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 72$, $S_{BME} = \frac{5}{6}S_{ABE} = 60$, $S_{MNE} = \frac{2}{3}S_{BME} = 40$, $S_{APE} = \frac{1}{3}S_{ABE} = 24$, $S_{EPQ} = \frac{1}{6}S_{APE} = 4$ и накрая $S_{MNPQ} = S_{MNE} - S_{EPQ} = 40 - 4 = 36$.

6. В триъгълника ABC е построена ъглополовящата BL, $L \in AC$. Известно е, че $\sphericalangle ALB : \sphericalangle CLB = 13 : 23$. Да се намери разликата на $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle CAB$.

А) 60° **Б)** 50° **В)** 25° **Г)** не може да се определи

Отговор: Б. За големините на $\sphericalangle ALB$ и $\sphericalangle CLB$ имаме $\sphericalangle ALB = 13x$ и $\sphericalangle CLB = 23x$. Тъй като сумата на тези два ъгъла е 180°, получаваме $x = 5^\circ$. От свойството на външните ъгли имаме $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CLB - \sphericalangle ABL$ и $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ALB - \sphericalangle CBL$. Тогава търсената разлика е $\sphericalangle BAC - \sphericalangle ACB = \sphericalangle CLB - \sphericalangle ALB = 10x = 50^\circ$.

7. Всеки две от цифрите на четирицифреното число A са различни. Сумата от първите три цифри на A се дели на 9. Сумата от последните три цифри на A също се дели на 9. Да се намери сумата от цифрите на A.

А) 9 **Б)** 12 **В)** 15 **Г)** 18

Отговор: Г. Ако $A = \overline{abcd}$, то $9|(a+b+c)-(b+c+d) = a-d$. Оттук, от $a \neq 0$ и от условието цифрите да са различни получаваме $a = 9$, $d = 0$. Тогава от $9|b+c+d = b+c$ и от условието цифрите да са различни получаваме $b+c = 9$, откъдето $a+b+c+d = 18$.

8. Вътрешните ъгли на един триъгълник се отнасят както $2:3:4$. В какво отношение са външните ъгли на този триъгълник? **А)** $5:6:7$ **Б)** $4:5:6$ **В)** $3:4:5$ **Г)** $2:3:4$

Отговор: А. Вътрешните ъгли на нашия триъгълник са с големини $2x$, $3x$ и $4x$, откъдето $180° = 2x+3x+4x = 9x$, т.е. $x = 20°$ и ъглите са $40°$, $60°$ и $80°$. Тогава външните ъгли са съответно $140°$, $120°$ и $100°$, което означава, че те са в отношение $5:6:7$.

9. Николай пресметнал всички сборове на две или повече различни числа измежду числата $1, 2, 3, \ldots, 13$ и си записал тези сборове, които са нечетни (всеки сбор толкова пъти, колкото е получен). Колко сбора е записал Николай?

А) 1017 **Б)** 2041 **В)** 3065 **Г)** 4089

Отговор: Г. Да прибавим към записаните числа и числата $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$. Тъй като общата сума $1+2+\cdots+13 = 91$ е нечетна, всяко от записаните числа отговаря на една четна сума (на останалите числа). Всички суми са толкова, колкото са подмножествата на $\{1, 2, \ldots, 13\}$, т.е. 2^{13}. Следователно заедно с числата $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$ Николай е записал $2^{12} = 4096$ числа и значи записаните от него нечетни суми са $4096 - 7 = 4089$.

10. Простите числа p и q и естественото число n са такива, че е изпълнено равенството $p^3q^2 + 45 = n!$ (с $n!$ се означава произведението на всички естествени числа от 1 до n, т.е. $n! = 1.2.\ldots.n$). Да се намери $p+q+n$. **А)** 14 **Б)** 13 **В)** 24 **Г)** 23

Отговор: А. Лесно се вижда, че $n \geq 5$ (иначе лявата страна е по-голяма от дясната). Тогава 3 и 5 делят $n!-45$, което означава, че $\{p,q\} = \{3,5\}$. Директната проверка на двете възможности дава единственото решение $p = 3$, $q = 5$, $n = 6$, откъдето $p+q+n = 14$.

11. Естественото число n е такова, че най-големият му естествен делител, различен от него самото, е по-голям с единица от куба на най-малкия му естествен делител, различен от 1. Да се намери n.

Отговор: 18. Ясно е, че най-малкият и най-големият делители са с различна четност. Това означава, че n има четен делител и значи е четно. Тогава най-малкият му делител е 2, най-големият е $\frac{n}{2}$ и имаме $\frac{n}{2} = 2^3 + 1$, откъдето $n = 18$.

12. Едно естествено число се нарича палиндром, ако не се променя при прочитане на цифрите му отзад напред (например 101 и 15451). Иван изписал в нарастващ ред всички петцифрени палиндроми. Кое число стои на 50-то място в списъка на Иван?

Отговор: 14941. Лесно се съобразява, че всеки петцифрен палиндром се определя еднозначно по първите си три цифри, които определят и мястото му в списък на Иван. Следователно на 50-то място стои числото 14941.

13. Сборът от тъпите ъгли на един изпъкнал многоъгълник е равен на $2013°$. Колко страни има този многоъгълник?

Отговор: 14. Нека даденият многоъгълник да има n страни. Тогава сумата от вътрешните му ъгли е $(n-2)180°$, а сумата от външните му ъгли е $360°$. Последното означава, че най-много три от вътрешните му ъгли са остри (в противен случай ще има поне 4 тъпи външни ъгъла и тяхната сума ще надвишава $360°$). Сумата S на тези три остри ъгъла е по-малка от $270°$. По условие имаме $(n-2)180^\circ = S + 2013^\circ = S + 11.180^\circ + 33^\circ$, откъдето $S = (n-13)180^\circ - 33^\circ$. Последното число е в интервала $(0^\circ, 270^\circ)$ само при $n = 14$.

14. Колко са наредените двойки естествени числа (n, k), за които НОК$(n, k) = 2013^2$? (Двойките $(1, 2013^2)$ и $(2013^2, 1)$ са различни наредени двойки.)

Отговор: 125. Тъй като $2013 = 3.11.61$, имаме $n = 3^a 11^b 61^c$, $k = 3^d 11^e 61^f$, където a, b, c, d, e, f са цели неотрицателни числа и по-голямото от числата във всяка двойка (a, d), (b, e) и (c, f) е равно на 2 (евентуално и двете са равни на 2). Тогава за всяка от двойките (a, d), (b, e) и (c, f) имаме по пет възможности, което дава $5^3 = 125$ възможности за (n, k). Ако въпросът е за ненаредени двойки, отговорът е $(125 - 1)/2 = 62$.

15. Най-много колко числа измежду числата $1, 2, \ldots, 99, 100$ можем да изберем така, че произведението на кои да е 11 от избраните числа да се дели на 6?

Отговор: 36. Числата $1, 2, 3, \ldots, 99, 100$ участват в три групи: група A – тези, които се делят на 6, група B – тези, които са нечетни и група C – тези, които не се делят на 3. Има числа, които са едновременно в групите B и C, но числата от група A не принадлежат на никоя от групите B и C. Можем да изберем не повече от 16 числа от A (защото в A има 16 числа), не повече от 10 числа от група B (в противен случай ще имаме произведение на 11 числа от група B, което няма да се дели на 6) и аналогично не повече от 10 числа от група C, общо не повече от $16 + 10 + 10 = 36$ числа. Ето пример за избор на 36 числа с исканото свойство: $A \cup B_1 \cup C_1$, където $A = \{6, 12, 18, \ldots, 96\}$, $B_1 = \{3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57\} \subset B$ и $C_1 = \{2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28\} \subset C$.

Задачите от тази тема са предложени от Петър Бойваленков.