Математически турнир „Иван Салабашев“, 2013 г.
Решения на задачите от темата за 8-9. клас

1. Кое число трябва да се махне от сумата $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$, за да се получи 1?

А) $\frac{1}{4}$ **Б)** $\frac{1}{6}$ **В)** $\frac{1}{8}$ **Г)** $\frac{1}{12}$

Отговор: В. Сумата на всичките числа е $\frac{9}{8}$. Трябва да се махне $\frac{1}{8}$.

2. Сумата на цифрите в десетичния запис на числото $2^{2013}5^{2016}$ е равна на:

А) 4 **Б)** 8 **В)** 11 **Г)** 15

Отговор: Б. Тъй като

$$2^{2013}5^{2016} = 10^{2013}.5^3 = 1250\dots0$$

търсената сума е $1+2+5=8$.

3. Броят на отрицателните цели числа a, за които $|a-10|+|a+10| \leq 20$ е равен на:

А) 10 **Б)** 11 **В)** 20 **Г)** 21

Отговор: А. Ако $a < -10$, то $|a-10| = 10-a$, $|a+10| = -10-a$ и даденото неравенство не е изпълнено. Аналогично се вижда, че при $-10 \leq a \leq 0$ то е изпълнено. Броят на отрицателните цели числа в този интервал е 10.

4. На Новогодишна разпродажба в книжарница книгите се продават на половин цена. В допълнение, купон дава 20% намаление от тази цена. Колко процента е намалението на оригиналната цена на книга, купена с купон? **А)** 10 **Б)** 33 **В)** 40 **Г)** 60

Отговор: Г. Нека оригиналната цена на една книга е x. Тогава тя се продава за $\frac{x}{2}$. С купон тази цена се намалява с 20%, т.е. става 80% от $\frac{x}{2}$ и е $\frac{x}{2}.\frac{80}{100}=\frac{2x}{5}$. Следователно намалението е $\frac{3x}{5}$, което е 60%.

5. Нека a и b са естествени числа, по-малки от 101. Най-малката възможна стойност на израза $2a^2-ab$ е равна: **А)** -1250 **Б)** -1200 **В)** -1150 **Г)** -1100

Отговор: А. Имаме $2a^2-ab \geq 2a^2-100a = 2(a-25)^2-2.25^2 \geq -1250$. Равенството се достига при $a=25, b=100$.

6. Две страни на триъгълник имат дължини 10 и 15, а височината към третата страна е средноаритметично на другите две височини. Третата страна на триъгълника е равна на:

А) 6 **Б)** 8 **В)** 9 **Г)** 12

Отговор: Г. Нека h_1 и h_2 са височините към страните със страни 10 и 15, h_3 е третата височина и S е лицето на триъгълника. От $10.h_1 = 2S = 15.h_2$ следва, че

$$h_1 = \frac{3h_2}{2}, h_3 = \frac{h_1+h_2}{2} = \frac{5h_2}{4}.$$

Дължината на третата страна на триъгълника е равна на $\frac{2S}{h_3} = \frac{8S}{5h_2} = \frac{8}{5}.\frac{15}{2} = 12$.

7. Сумата на всички прости числа между 1 и 100, които дават остатък 1 при деление на 4 и остатък 4 при деление на 5, е равна на: **А)** 118 **Б)** 137 **В)** 158 **Г)** 187

Отговор: А. Числата от вида $5k+4$ завършват на 4 или 9. Тъй като няма прости числа завършващи на 4 (защо?) тези, изпълняващи условието са измежду числата $9, 19, 29, \dots, 99$. От тях прости числа, даващи остатък 1 при деление на 4 са само 29 и 89. Тяхната сума е 118.

8. Броят на целите числа n, за които числото $\dfrac{n}{n-420}$ е квадрат на цяло число, е равен на:

А) 2 **Б)** 4 **В)** 6 **Г)** 8

Отговор: Б. Нека $x^2 = \dfrac{n}{420-n}$, $x \geq 0$ е цяло число. Тогава $n = \dfrac{420x^2}{x^2+1}$. Тъй като x^2 и x^2+1 са взаимно-прости числа следва, че x^2+1 е делител на $420 = 2.3.5.7$. Лесно се проверява, че x^2+1 не се дели на 3 и 7 и следователно $x^2+1 = 1, 2, 5, 10$. Оттук $n = 0, 210, 336, 378$.

9. Върху страните AB и BC на квадрат $ABCD$ са взети съответно точки E и F така, че правите през тези точки, успоредни съответно на BC и AB разделят $ABCD$ на два квадрата и два правоъгълника. Ако сумата от лицата на двата квадрата е $\dfrac{9}{10}$ от лицето на $ABCD$, то $\dfrac{AE}{EB} + \dfrac{EB}{AE}$ е равно на:

А) 18 **Б)** 19 **В)** 20 **Г)** 21

Отговор: А. Нека страната на квадрата е 1, $AE = a$ и $BE = b$. От условието следва,че $a^2+b^2 = \dfrac{9}{10}$ и $a+b=1$. Тогава $ab = \dfrac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2} = \dfrac{1}{20}$ и

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab} = 18$$

10. Нека x и y са естествени числа, за които $x^2+82x+2013 = y^2$. Тяхната сума е равна на:

А) 123 **Б)** 124 **В)** 125 **Г)** 126

Отговор: В. Допълваме до точен квадрат и получаваме, че $(x+41)^2+332 = y^2$, т.е.

$$(y-x-41)(y+x+41) = 2^2.83.$$

Тъй като 83 е просто число и числата $y-x-41$ и $y+x+41$ имат една и съща четност следва, че $y-x-41 = 2, y+x+41 = 2.83$. Оттук $y = 84, x = 41$ и $x+y = 125$.

11. Даден е $\triangle ABC$ със страни $AB = 125$, $BC = 120$ и $CA = 117$. Ъглополовящите на $\angle BAC$ и $\angle ABC$ пресичат BC и AC съответно в точки L и K. Нека M и N са петите на перпендикулярите от C към BK и AL. Да се намери MN.

Отговор: 56. Нека правата MN пресича CA и BC в точки O и Q, CM пресича AB в точка C_1 и CN пресича AB в точка C_2. От $CC_1 \perp BM$ и $\angle C_1BM = \angle CBM$ следва, че $CM = MC_1$. Аналогично $CN = NC_2$ и MN е средна отсечка в $\triangle C_1C_2C$. От $OM \parallel AC_1$ и M среда на CC_1 следва, че O е среда на AC . Аналогично Q е среда на BC и $OQ = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{125}{2}$. От $QM \parallel BC_1$ следва, че $MQ = QC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{120}{2}$. Аналогично $ON = OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{117}{2}$. Следователно

$$MN = ON + MQ - OQ = \frac{117}{2} + \frac{120}{2} - \frac{125}{2} = 56.$$

12. Да се намери броят на естествените числа k, за които числото 2013, записано в k-ична бройна система, завършва на цифрата 3.

<u>**Отговор:** 13.</u> Търсим броят на естествените числа $k \geq 4$, за които $2013 - 3 = 2010$ се дели на k. Тъй като $2010 = 2.3.5.67$ това число има $(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 16$ делители. От тях изключваме числата $1, 2, 3$ и търсеният брой е $16 - 3 = 13$.

13. Нека a, b, c са реални числа, за които $a + b + c = 3$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. Да се намери разликата между най-голямата и най-малката възможни стойности на c.

<u>**Отговор:** 4.</u> От неравенството $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ (докажете!) следва, че $2(9 - c^2) \geq (3 - c)^2$, т.е. $(c + 1)(c - 3) \leq 0$. Оттук $-1 \leq c \leq 3$ и търсената разлика е 4.

14. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е редица от естествени числа, за които $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$ за произволни естествени числа m и n. Да се намери a_1, ако $a_1 \leq 100$ и a_{100} се дели на 101.

<u>**Отговор:** 1.</u> От условието следва, че $a_{k+1} - a_k = a_1 + k$ и като съберем тези равенства при $k = 1, 2, \ldots, 99$ получаваме $a_{100} = 100a_1 + 50.99 = 50(2a + 99)$. Оттук следва, че нечетното число $2a_1 + 99$ се дели на 101 и тъй като $101 \leq 2a_1 + 99 \leq 299$ заключаваме, че $a_1 = 1$. В този случай общият член на редицата е $a_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ и тя изпълнява даденото условие.

15. От редицата на естествените числа са изтрити тези, чиито квадрати завършват с цифрите 256. Кое число е записано на 2013-то място в новополучената редица?

<u>**Отговор:** 2022.</u> Нека n е естествено число, чийто квадрат завършва на 256, т.е. $n^2 = 1000k + 256, k = 0, 1, \ldots$. Тогава $(n - 16)(n + 16)$ се дели на 1000 и понеже само едно от числата $n - 16$ и $n + 16$ се дели на 5 следва, че точно едно от тях се дели на 125. Също така е ясно, че всяко едно от тези числа трябва да се дели на 4. Това показва, че n^2 завършва на 256, точно когато n има вида $500k \mp 16, k = 0, 1, \ldots$. Следователно на 2013-то място е записано числото 2022, защото преди него са изтрити точно 9 числа - $16, 500 \mp 16, 1000 \mp 16, 1500 \mp 16, 2000 \mp 16$.

Задачите от тази тема са предложени от Олег Мушкаров.