Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ELEMENTS DE LA THEORIE DES n-CATEGORIES

VLADIMIR V. TOPENČAROV

On définie la notion de n-catégorie et on étudie les propriétés principales de cette structure algébrique. La catégorie de homomorphismes (n-foncteur) entre n-catégories est construite et ces propriétés essentielles ainsi que celles du foncteur d'oublie vers la catégorie des applications. Plusieurs exemples de n-catégories sont indiqués.

Introduction. Soit $\mathfrak{M}_0$ un univers et un élément $C \in \mathfrak{M}_0$, appelé dans la suite classe. Le but de cet article est de construire dans C une structure algébrique qui pour $n=2$ se réduit à une catégorie.

Habituellement en algèbre on fait l'étude systématique des lois de composition (internes ou externes, partout ou partiellement définies) binaires [2]. Des recherches rares ont été faites sur les lois de composition ternaires [11, 12] et n-aires [5], partout définies.

Dernièrement l'intérêt vers ce domaine a beaucoup augmenté, faisant suite au développement des algèbres universelles. Celles-ci [4, 10] abordent le problème des lois de composition internes et externes de parité supérieure à 2, sans s'intéresser apparemment aux justifications intuitives. Pourtant des „justifications" existent. Les recherches sur les fondements algébriques de la géométrie différentielle ont amené V. V. Wagner à l'étude systématique des lois de composition ternaire [14], de certaines lois n-aires [13] et de lois ternaires et partielles [15].

La théorie des n-catégories, dont les bases sont exposées dans ce travail, est une théorie algébrique à loi de composition interne partiellement définie, n-aire, associative, avec unités (dont la classe ne se réduit pas à un seul n-uplet) et à la relation de composabilité construite au moyen des unités, généralisant la condition de caténarité.

Une „justification" de la théorie des n-catégories est donnée au paragraphe 3; la classe des n-relations pour une loi de composition n-aire interne, généralisation de celle de [17], est une n-catégorie (3.4).

La „généralisation" n-aire de la théorie des catégories peut être effectuée de plusieurs manières différentes. Celle que nous développons dans la suite n'est que la plus simple et la plus proche des catégories — ce qui apparaît très clairement si l'on se pose dans le cadre de la théorie des structures algébriques projectives de [8]. Une généralisation est la théorie classique des catégories doubles et n-uples [4].

Cet article développe en détails notre note [16]. La terminologie est celle de [6, 7], convenablement adaptée.

1. n-graphes et n-classes. Dans ce paragraphe nous définissons la notion d'application n-polaire. On construit les n-graphes, généralisation de la notion de graphe orienté, les n-classes et leurs homomorphismes. Les problèmes des pôles et unités dans une n-classe sont éludés.

SERDICA. Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 1, 1975, p. 225—248.

1.1. Application polaire et n-polaire; pôles. Soit $C \in \mathfrak{M}_0$ et $e \in C$.

(1.1.1) Définition. *Une application polaire (partiellement) définie sur C est l'application $a_0 : C \to e$, qui associe à tout $f \in C$ (pour lequel elle est définie) l'élément $e \in C$.*

Soit a_0 une application de C dans une sous-classe $C_0 \subset C$ et considérons une partition de $C = \{C_i \mid i \in I\}$; on a la définition suivante:

(1.1.2.) Définition. *On appelle application localement polaire associée à la partition $\{C_i \mid i \in I\}$ une application a_0 de C dans C_0, telle que la restriction de a_0 à une sous-classe $C_i \in \{C_i \mid i \in I\}$ soit une application polaire:*

$$a_0 \mid C_i = a_i : C_i \to e_i,\ e_i \in C_0.$$

L'élément $a_0(f) = e_i \in C_0$ est appelé pôle de $f \in C$.

Soit a une application localement polaire $a: C \to C_0$ et $C_0 \cap C = \emptyset$. En considérant la réunion $C \cup C_0 = K$ et en prolongeant a en $\hat{a}$ sur K de manière que $\hat{a}(e) = e$ pour tout $e \in C_0$, alors $\hat{a}$ devient une application localement polaire sur K conformément à (1.1.2).

Même le cas le plus simple, celui des catégories, exige des applications telles qu'à tout élément $f \in C$ soient associés plus d'un (exactement deux pour les catégories) pôles. On définit donc:

(1.1.3) Définition. *Une application n-polaire est une application A_n (partiellement) définie sur C, qui à tout f (pour lequel elle est définie) associe le n-uplet $E = (e_i \mid i \in I) \in C_0^n$. Le n-uplet $E = (e_i \mid i \in I)$ est appelé n-uplet polaire et l'application n-polaire sera notée A_n.*

Ainsi le couple (e, e') des unités à droite et à gauche dans un groupe, où $e = e'$ est un couple polaire.

(1.1.4) Proposition. *Toute application n-polaire A_n se représente de manière unique par une suite n-aire d'applications polaires a_i:*

$$[a_i]_{i \in I} = A_n = (a_i \mid i \in I) \ \text{et}\ A_n(f) = (e_i \mid i \in I) = (a_i(f) \mid i \in I),\ \forall f \in C.$$

Cette situation justifie la définition suivante:

(1.1.5) Définition. *Une application localement n-polaire est une application de C dans $\prod^n C_0$, où $C_0 \subset C$, notée A'_n, telle que tout $a_j' = \mathrm{pr}_j A'_n : C \to C_0 = \mathrm{pr}_j (\prod^n C_0)$ soit une application localement polaire au sens de* (1.1.2).

D'après (1.1.5) le couple (β, α) associé à une catégorie C_0 par l'existence et l'unicité des unités à droite et à gauche pour tout morphisme $f \in C$ donne lieu à une application localement bipolaire $\{\beta, \alpha\}: C \to C_0 \times C_0$.

1.2. Définition des n-graphes et des n-classes. Soit $C \in \mathfrak{M}_0$ une classe et $k_0 = a_1$ une application polaire; le couple (C, a_1) est une classe à un élément distingué $e = a_1(C)$. Le couple (C, A_2'), où $A_2' = (a_1, a_2)$ définit dans C un graphe orienté $(C, \beta, \alpha) = [C]$. De manière générale on définit:

(1.2.1) Définition. *Un n-graphe $[C]_n$ est un couple (C, A_n') où $C \in \mathfrak{M}_0$ et où A_n' est une application localement n-polaire.*

A cette définition on préfère la suivante:

(1.2.2) Définition. *Un n-graphe est un* $n+1$*-uplet* $(C, (a_i \mid i \in I))$, *où* C *est une classe et où* a_i *est une rétraction de* C *sur* $C_0 \subset C$ *pour tout* $i \in I$.

Si $n=2$ un n-graphe est un graphe orienté. On a:

(1.2.3) Proposition. *Les définitions* (1.2.1) *et* (1.2.2) *sont équivalentes.*

Comme pour les graphes orientés, on définit:

(1.2.4) Définition. *Un sommet de n-graphe* $[C]_n$ *est un élément de* C_0. *La suite* $(a_i(f) \mid i \in I) = A'_n(f)$ *est une suite polaire de* $f \in C$ *dans* $[C]_n$.

Toute suite polaire de $f \in C$ dans $[C]_n$ est un n-uplet de sommets, éléments de C_0. Mais une suite n-aire d'éléments de C_0 n'est pas nécessairement la suite polaire d'un $f \in C$ dans $[C]_n$.

Soit $\hat{C} \subset C$ et $\hat{C}_0 \subset \hat{C}$. On définit:

(1.2.5) Définition. *Un sous-n-graphe* $[\hat{C}]_n$ *du n-graphe* $[C]_n$ *est un couple* $(\hat{C}, \hat{A}'_n)$ *où* $\hat{C} \subset C$ *et où* $\hat{A}'_n = (\hat{a}_i \mid i \in I)$ *est composé des applications* $\hat{a}_i$, *de* C *dans* $\hat{C}_0 \subset C_0$, *qui sont les restrictions de* a_i *à* $\hat{C}$: $\hat{a}_i \mid \hat{C}$.

Soit l'ensemble d'indices $I=(1, 2, \ldots, n)$ et soit I_φ un ensemble de n indices, obtenu de I par une permutation $\varphi \in \mathfrak{S}_I$, où $\mathfrak{S}_I$ est le groupe des permutations de I. Si $A'_n = (a_i \mid i \in I)$ est le n-upletd'applications localement polaires, ordonné par l'ordre de I, notons $A'_{n\varphi}$ le n-uplet d'applications localement polaires, ordonné par I_φ de sorte que les deux n-uplets contiennent les mêmes a_i mais dans un ordre différent. On a:

(1.2.6) Définition. *Un n-graphe* φ*-conjugué à* $[C]_n$ *est le n-graphe* $[C]_{n\varphi}$ *tel que* $A'_{n\varphi}$ *est un n-uplet formé des applications localement polaires de* A'_n *dans l'ordre induit par* $\varphi(I)$, *où* $\varphi \in \mathfrak{S}_I$.

(1.2.7) Proposition. *Deux n-graphes* $[C]_n = (C, A_n)$ *et* $[C']_n = (C', A'_n)$ *pour lesquels existent deux bijections*

$$P: C \to C', H: A_n \to A'_n \text{ telle que } P.a_i = a_i.P$$

sont identiques ou conjugués.

Soit k'_n une loi interne n-aire partiellement définie

$$k'_n : \overset{n}{*}C \to C$$

où $\overset{n}{*}C \subset \prod^{n} C$ est la sous-classe des n-uplets pour lesquels l'application k'_n est définie; si $\overset{n}{*}C = \prod C$, la loi est partout définie.

(1.2.8) Définition. *Une classe à composition n-aire (dans la suite n-classe) est un couple* $(C, k'_n) = C^{\cdot}_n$, où $C \in \mathfrak{M}_0$ *et* k'_n *une loi de composition interne, n-aire partiellement définie.*

Un n-uplet $(f_i \mid i \in I)$, où $f_i \in C$, pour lequel K'_n est définie est dit composable et l'élément $f = k'_n(f_i \mid i \in I) = [(f_i \mid i \in I)]$ — composé de $(f_i \mid i \in I)$ dans $C^{\cdot}_n$. La classe des n-uplets composables sera notée $\overset{n}{*}C_n$.

En particulier, si $n=2$, la 2-classe est une classe multiplicative $C^{\cdot}$, dont la classe des couples composables est notée $\overset{2}{*}C^{\cdot} = C^{\cdot} * C^{\cdot}$.

Soient A_i des sous-classes en général distinctes de C $(A_i \subset C)$. Notons

$$\overset{n}{*} A_i = \prod^{n} A_i \cap \overset{n}{*}C \subset \prod A_i \text{ (où } i \in I) \text{ et } \prod{}' A_i = k'_n(\overset{n}{*} A_i).$$

(1.2.9) Définition. *Une sous-classe $A \subset C$ est stable dans $C_n = (C, k'_n)$ si* $\coprod^{n}{}' A_i \ (A_i = A, \forall i \in I) \subset A$.

Soit C_n une n-classe, $\hat{C} \subset C$ une sous-classe non vide de $C \in \mathfrak{M}_0$ et soit ${}^n_*\hat{C}$ la classe des n-uplets tels que $(f_i \mid i \in I) \in {}^n_* C_n$, $f_i \in \hat{C}$ et $f = [(f_i \mid i \in I)] \in \hat{C}$; notons $\hat{k}'_n$ la restriction de k'_n à ${}^n_*\hat{C}_n$. On a:

(1.2.10) Définition. *L'application $\hat{k}'_n$, restriction de k'_n à ${}^n_*\hat{C}_n$ est appelée loi de composition n-aire induite par C_n sur $\hat{C} \subset C$.*

(1.2.11) Définition. *Une sous-n-classe de C_n définie par $\hat{C}$ est la n-classe $(\hat{C}, \hat{k}'_n)$, où $\hat{k}'_n$ est selon* (1.2.10).

Si $n = 2$ les définitions (1.2.9), (1.2.10) et (1.2.11) se réduisent à des définitions concernant certaines classes multiplicatives.

(1.2.12) Définition. *Une n-classe φ-conjuguée à la n-classe C_n est la n-classe $C_{n\varphi}$, définie sur C par la loi de composition $k'_{n\varphi}$, telle que*

$$k'_{n\varphi} : (f_{\varphi(i)} \mid i \in I) \to (f_i \mid i \in I)$$

où encore: $k'_{n\varphi}(f_{\varphi(i)} \mid i \in I) = k'_n(f_i \mid i \in I)$ si et seulement si $(f_i \mid i \in I) \in {}^n_* C$, φ étant un élément de $\mathfrak{S}_I$.

Notons deux propositions pour les n-classes φ-conjuguées.

(1.2.13) Proposition. *La classe $\mathcal{E}$ des n-classes φ-conjuguées à une n-classe donnée C_n contient exactement $n!$ éléments; il existe une bijection de la classe $\mathcal{E}(C_n)$ sur le groupe des permutations $\mathfrak{S}_I$ de I.*

(1.2.14) Proposition. *Si $C_{n\varphi}$ et $C_{n\psi}$ sont des n-classes conjuguées à C_n, la classe $C_{n\varphi}$ est ω-conjuguée à $C_{n\psi}$ et $\omega \in \mathfrak{S}_I$ est tel que $\omega \circ \psi = \varphi$.*

1.3. Homomorphismes entre n-graphes et entre n-classes. Pour les n-graphes et les n-classes, la notion d'homomorphisme entre algèbres universelles est précisée. On a:

(1.3.1) Définition. *Un homomorphisme du n-graphe $[C]_n$ vers le n-graphe $[\hat{C}]_n$ est le triplet $([\hat{C}]_n, H, [C]_n)$, où $H \in \mathcal{H}$ est une surjection de la classe $C \in \mathfrak{M}_0$ sur une sous-classe C' de la classe $\hat{C} \in \mathfrak{M}_0$ et qui vérifie:*

(H.G) *La classe $P(C)$ des partitions de C, telle que tout couple $(P_i(C), C_0)$ définit une application localement polaire, composante i-ème de l'application localement n-polaire A'_n qui définit sur C la structure de n-graphe $(\hat{C}, A'_n) = [\hat{C}]_n$, est transformée par H en une famille de partitions $P_h(C)$ telle que tout couple $(P^h_i(C), H(C_0))$ définit une application localement polaire a^h_i, avec $A'_h = (a^h_i \mid i \in I)$ et que $[C']_n = (C', A'_n)$ est un n-graphe.*

En particulier si $H \in \mathcal{H}_\gamma$, on a:

(1.3.2) Définition. *Un isomorphisme entre n-graphes $[C]_n$ et $[\hat{C}]_n$ est un homomorphisme défini par une bijection $H : C \to \hat{C}$.*

Soit $\mathfrak{M}_0$ un univers et soit $\mathcal{H}_0$ la classe des n-graphes associée à cet univers. Notons $\mathcal{H}$ la classe des homomorphismes associée à $\mathcal{H}_0$

$$\mathcal{H}_n = \{([\hat{C}]_n, H, [C]_n) \mid C \in \mathfrak{M}_0, C \in \mathfrak{M}_0, \mathrm{H} \in \mathfrak{M}\}.$$

(1.3.3) Proposition. *La classe $\mathcal{H}_n$ des homomorphismes entre n-graphes sur $\mathfrak{M}_0$ est une catégorie pour la loi de composition binaire partiellement définie suivante:*

$$k' : ([\hat{C}]_n, H, [C']_n) . ([C'']_n, H', [C]_n) = ([\hat{C}]_n, H . H', [C]_n),$$

si et seulement si $[C']_n = [C'']_n$ (*donc aussi* $C' = C''$).

(1.3.4) Convention. La catégorie $(\mathcal{H}_n, k')$ sera notée $\mathcal{H}_n^{\cdot}$; la bijection de la classe d'unités de $\mathcal{H}_n^{\cdot}$ sur la classe des n-graphes de $\mathfrak{M}_0$, soit $\mathcal{H}_n^g$, notée $w : \mathcal{H}_{n0}^{\cdot} \to \mathcal{H}_0^g$, telle que

$$([C]_n, \nu, [C']_n) \sim [C]_n$$

identifie la classe des unités de $\mathcal{H}_n^{\cdot}$ à la classe des n-graphes de $\mathfrak{M}_0$.

Soient $[C]_n$ et $[C']_n$ deux n-graphes et soient $[C]_{n\varphi}$ et $[C']_{n\varphi}$ leurs n-graphes φ-conjugués conformément à (1.2.6). On définit:

(1.3.5) Définition. *Un homomorphisme φ-variant entre n-graphes est un triplet* $([C']_n, H, [C]_n)$, *tel que* H *associe à tort* $(n+1)$*-uplet de* $[C]_n$ $(f, (a_i(f) \mid i \in I)$ *le* $(n+1)$-uplet $(H(f), (Ha_{\varphi(i)}(H(f)) \mid i \in I))$ *de* $[C']_n$.

(1.3.6) Proposition. *Si* $H = ([C']_n, H, [C]_n)$ *est un homomorphisme φ-variant entre n-graphes, alors* $H = ([C']_{n\varphi}, H, [C]_n)$ *est un homomorphisme Id-variant (ou simplement homomorphisme) entre* $[C']_{n\varphi}$ *et* $[C]_n$.

Démonstration. En vertu de (1.3.5) on a $H(f, (a_i(f) \mid i \in I)) = (H(f), (Ha_{\varphi(i)}(H(f)) \mid i \in I))$; d'autre part, $[C']_{n\varphi}$ étant φ-conjugué de $[C']_n$, on a suivant (1.2.6): $(f, (a'_{\varphi(i)}(f) \mid i \in I))$ où $(a'_{\varphi(i)}(f) \mid i \in I)$ est la suite polaire de f, identique à celle de $f \in C$ dans $[C']_n$ à une permutation de I près. Si $a' = Ha$ on a:

$$H(f, (a_i(f) \mid i \in I)) = (H(f), (Ha_i(H(f)) \mid i \in \varphi(I)). \square$$

(1.3.7) Proposition. *Il existe $n!$ homomorphismes φ-variants à H.*

(1.3.8) Proposition. *Etant donné deux homomorphismes entre n-graphes, pour leur produit supposé existant, on a :*

(a) *Si H et H' sont Id-variants, alors $H.H'$ est Id-variant ;*

(b) *Si H est φ-variant et si H' est ψ-variant, alors $H.H'$ est $\vartheta = \varphi \circ \psi$-variant, où $\vartheta \in \mathfrak{S}_I$, puisque $\varphi \in \mathfrak{S}_I$ et $\psi \in \mathfrak{S}_I$;*

(c) *Si H et H' sont φ-variants, alors $H.H'$ est φ^2-variant, $\varphi^2 \neq \varphi$;*

(d) *Pour que $H.H'$ soit Id-variant il faut et il suffit, que $\vartheta = Id$ si H est φ-variant et H' ψ-variant.*

(1.3.9) Définition. *Un homomorphisme de $C_n^{\cdot}$ vers $\hat{C}_n^{\cdot}$ est une surjection de C sur une sous-classe de $\hat{C}$: $H = (\hat{C}_n^{\cdot}, H, C_n^{\cdot})$, telle que*

(H) $\quad (f_i \mid i \in I) \in {}^n_{\cdot}C \quad (H(f_i) \mid i \in I) \in {}^n_{\cdot}C$ *et* $(f_i \mid i \in I) = (H(f_i) \mid i \in I)$.

On a les propositions suivantes:

(1.3.10) Proposition. *La classe des homomorphismes entre n-classes est une catégorie pour la loi de composition binaire suivante*:

$$k' : (\hat{C}_n^{\cdot}, H, \tilde{C}_n^{\cdot}) . (\vec{C}_n', H', C_n^{\cdot}) = (\hat{C}_n^{\cdot}, H . H', C_n^{\cdot}) \text{ si et seulement si } \tilde{C}_n^{\cdot} = \vec{C}_n'.$$

(1.3.11) Proposition. *L'image d'une n-classe par un élément de $\mathcal{H}_n$ est une n-classe et $(H(C_n), H, C_n)$ est un isomorphisme entre n-classes.*

(1.3.12) Proposition. *Si $H \in \mathcal{H}_n'$, il existe $n!$ homomorphismes φ-variants, $\varphi \in \mathfrak{S}_I$.*

2. n-catégories et n-foncteurs. Etant donnée une n-classe, on y définit des structures plus riches par des axiomes concernant la loi de composition k'_n. La théorie est construite de manière à obtenir pour $n=2$ les catégories. Dans notre terminologie une catégorie est une 2-catégorie, notion complètement différente à celle des 2-catégories de Benabou.

2.1. n-classes polaires et unitaires. Soit $C\in\mathfrak{M}_0$ une classe, $k'_n\in\mathfrak{M}$ une application partiellement définie sur C, dont la classe des n-uplets composables est ${}^{n}_{*}C$.

(2.1.1) Définition. *Une n-classe polaire est un triplet (C, k'_n, A'_n), tel que les conditions suivantes soient vérifiées:*

(i) *le couple (C, k'_n) est une n-classe;*

(ii) *le couple (C, A'_n) est un n-graphe où A'_n est partout défini sur C;*

(iii) *il existe une relation binaire $R_p(k'_n, A'_n)$, telle que:*

$$R_p(k'_n, A'_n): (A'_n(f), f)_j\in {}^{n}_{*}C, \forall f\in C.$$

La définition de n-classe unitaire peut être modifiée et rapprochée de la notion classique pour $n=2$.

(2.1.2) Définition. *Une n-classe polaire est une n-classe telle qu'à tout élément $f\in C$ est associé une et une seule suite polaire.*

(2.1.3) Proposition. *Les définitions* (2.1.1) *et* (2.1.2) *sont équivalentes.*

Il en est de même pour les n-classes unitaires:

(2.1.4) Définition. *Une n-classe unitaire est un triplet (C, k'_n, A'_n), tel que les conditions suivantes soient vérifiées:*

(i) *le couple (C, k'_n) est une n-classe;*

(ii) *le couple (C, A'_n) est un n-graphe où A'_n est partout défini sur C;*

(iii) *il existe une relation binaire $R_u(k'_n, A'_n)$ entre k'_n et A'_n telle que*

$$R_u(k'_n, A'_n): (A'_n(f), f)_j\in {}^{n}_{*}C \ \&\ [(A'_n(f), f)_j]=f, \forall f\in C \text{ et } \forall j\in I.$$

(2.1.5) Définition. *Une n-classe unitaire est une n-classe C_n, telle qu'à tout $f\in C$ est associée une suite unitaire $(e_i \mid i\in I)$ et une seule.*

On a la proposition:

(2.1.6) Proposition. *Les définitions* (2.1.4) *et* (2.1.5) *de n-classe unitaire sont équivalentes.*

(2.1.7) Proposition. *Si dans une n-classe polaire pour tout $f\in C$ est vérifiée la condition*

$$[(A'_n(f), f)_j]=f, \forall j\in I$$

alors la n-classe polaire est une n-classe unitaire et $A'_n(C)=C_*=C_0$, où C_0 est la classe des unités de C_n.

(2.1.8) Remarque. Si $n=2$, on a la notion de classe multiplicative unitaire: „classe multiplicative pour laquelle est vérifié (G. 1)".

(2.1.9) Conventions. L'application localement n-polaire A'_n sera notée A, dans tous les cas où une confusion n'est pas à craindre. Si la n-classe est unitaire le n-graphe sous-jacent sera noté (C, U) et la loi de composition par k_n'.

2.2. n-quasi-graphes multiplicatifs et n-graphes multiplicatifs. Une n-classe polaire est caractérisée par (A et k_n). Par des axiomes sur A et k_n on obtient des structures plus riches.

(2.2.1) D é f i n i t i o n. *Un n-quasi-graphe multiplicatif est un triplet (C, A, k_n), tel que $(C, A) \in \mathcal{G}_n$ est un n-graphe, (C, k_n) est une n-classe et qui vérifie l'axiome suivant :*

$$\text{(N.1)} \qquad u_i \,.\, k_n = u_i \,.\, v_i.$$

Dans cette définition on a posé $v_i = \mathrm{pr}_{i \mid {}^n_* C}$ où ${}^n_* C = \alpha(k_n)$.

Si k_n est la loi de composition φ-conjuguée à k_n on obtient:

(2.2.2) D é f i n i t i o n. *Le n-quasi-graphe φ-conjugué à $C_n^{\cdot}$ est un n-quasi-graphe $C_n^{\cdot} = (C, A, k_n)$, tel que (C, A^{φ}) est un n-graphe φ-conjugué à (C, A), la n-classe (C, k_n^{φ}) est la n-classe φ-conjuguée à (C, k_n) l'axiome (N.1) étant le même.*

Le nombre des conjugués à $C_n^{\cdot}$ est égal à $(n! - 1)$ et la classe des conjuguées à $C_n^{\cdot}$ est isomorphe à la classe des permutations de I.

(2.2.3) P r o p o s i t i o n. *Si $n = 2$ un 2-quasi-graphe multiplicatif est un quasi-graphe multiplicatif.*

(2.2.4) D é f i n i t i o n. *Un n-graphe multiplicatif est un triplet (C, U, k) tel que $(C, U) \in \mathcal{G}_{n0}$, $(C, k_n) \in \mathfrak{N}_{n0}$ et les axiomes suivants sont vérifiés :*

$$\text{(N.1)} \qquad u_i \,.\, k_n = u_i \,.\, v_i,$$

$$\text{(N.2)} \qquad \text{Si } (U(f), f)_j \in {}^n_* C, \text{ alors } [(U, f), f)_j] = f.$$

Le second axiome exprime le fait que les éléments $U(f)$ forment une suite unitaire pour f; mais la propriété exprimée par (N.2) ne se manifeste que sous la condition de composabilité de la suite qui en est formée.

Il est évident que:

(2.2.5) P r o p o s i t i o n. *Tout n-graphe multiplicatif est un n-quasi-graphe multiplicatif.*

La proposition inverse n'est pas vraie, puisque un pôle (resp. une suite polaire) n'est pas une unité (resp. une suite unitaire).

Pour le cas $n = 2$ on a:

(2.2.6) P r o p o s i t i o n. *Un n-graphe multiplicatif est pour $n = 2$ un graphe multiplicatif.*

Cette proposition indique que la définition de graphe multiplicatif contient déjà des indications sur la forme de $C * C$.

Tout n-graphe multiplicatif (resp. n-quasi-graphe multiplicatif) a pour n-graphe sous-jacent le n-graphe (C, A'_n) (resp. (C, U)). Inversement:

(2.2.7) P r o p o s i t i o n. *Tout n-graphe (C, A'_n) est le n-graphe multiplicatif à au moins un n-(quasi)-graphe multiplicatif à savoir, celui où la loi de composition est définie par la table de multiplication suivante*

$$k'_n : [(e_i \mid i \in I \;\; e_i = e)] = e \;\; \text{si} \;\; e \in C_0 (= e' \neq e \in C_0)$$

$$[(A'_n(f), f)_j] = f \;\; \text{si} \;\; f \in C,\; f \notin C_0 \,([(A'(f), f)_j] = g \neq f).$$

On définit comme pour les graphes multiplicatifs:

(2.2.8) D é f i n i t i o n. *Un sous-n-(quasi)-graphe multiplicatif ((stable)) du n-(quasi)-graphe multiplicatif $C_n^{\cdot}$ est le triplet $(\hat{C}, \hat{U}, \hat{k}_n)$ où $\hat{C} \subset C$, $\hat{U}$ est la restriction de U à $\hat{C}$, $\hat{k}_n$ est la restriction de k_n à $\hat{C}$ et telle que $\hat{U}(\hat{C}) = U(\hat{C}) \subset \hat{C}$ ((et stable dans $C_n^{\cdot}$)).*

(2.2.9) Proposition. *Si $\hat{C}_n$ est un sous-n-* **(***quasi***)** *-graphe de C_n, alors le n-graphe sous-jacent à $\hat{C}_n$, soit $[\hat{C}]_n$, est sous-n-graphe du n-graphe $[C]_n$, sous-jacent à C_n.*

La démonstration est une conséquence de (2.2.8) et (1.2.5).

(2.2.10) Définition. *Un sous-n-* **(***quasi***)** *-graphe multiplicatif plein est le sous-graphe définit par une sous-classe $\hat{C} \subset C$, pour laquelle est vérifiée la condition suivante:*

$$si\ (e_i\, i \in I)\ \&\ (e_i \in \hat{C} \subset C_0)\ \ et\ \ si\ \ f \in (\bigcap_{i \in I} u_i^{-1}(e_i)),\ alors\ f \in \hat{C}.$$

2.3. Relation de composabilité; *n*-catégorie non associative. Soit (C, k_n) une n-classe et soit ${}^n_*C$ la classe des n-uplets composables par k_n. On définit:

(2.3.1) Définition. *La relation de composabilité de k_n est la classe ${}^n_*C$, sous-classe de $\prod^n C$.*

Dans le cas de $n = 2$ et pour les catégories (et les quasi-catégories non-associatives) la relation de composabilité notée $C * C$ est définie par un produit fibré et on a:

(2.3.2) Proposition. *La classe des couples de morphismes composables dans une (quasi)-catégorie non associative est un produit fibré*

$$C * C = \alpha \vee \beta.$$

Soit la catégorie S_2 formée à partir de l'ensemble d'indices $I = \{1, 2\}$ et telle que $(S_2)_0 = (\{1\}, \{2\}, \{1, 2\})$ où $\{1, 2\}$ est l'ensemble des indices 1 et 2 et dont la classe des morphismes est $((\{1, 2\}, \{1\})$ et $(\{1, 2\}, \{2\}))$ (fig. 1). On peut construire alors un foncteur de S_2 vers $\mathfrak{M}$ définit de la manière suivante:

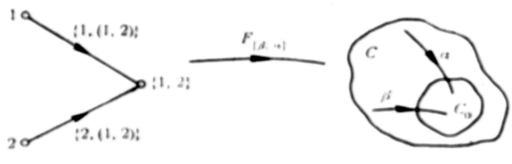

Fig. 1

$$F(\{i\}) = C,\ \ F(\{i, j\}) = C_0 \quad (i \neq j),$$
$$F((\{1, 2\}, \{1\})) = \alpha, \quad F((\{1, 2\}, \{2\})) = \beta$$

qui sera noté $F_{[\beta, \alpha]} = (\mathfrak{M}, F_{[\beta, \alpha]}, S_2)$.

Alors on a:

(2.3.3) Proposition. *La classe des couples de morphismes composables dans une* **(***quasi***)** *-catégorie non associative (et en vertu de (2.3.2) le produit fibré de β et α aussi) est la limite projective de foncteur $F_{[\beta, \alpha]}$:*

$$C * C = \varprojlim F_{[\beta, \alpha]} = \alpha \vee \beta.$$

Soit I un ensemble d'indices et soit U une application localement n-polaire sur une classe $C \in \mathfrak{M}_0$. On définit:

(2.3.4) Définition. *Le produit fibré généralisé (n-produit fibré) associé à l'application localement n-polaire U est la sous-classe de* $\prod^{n} C$:

$$V_g U = \bigvee_{i \in I} u_i = \{(f_i \mid i \in I) \mid u_i(f_j) = u_j(f_i),\ f_i \in C,\ u_i \in U\};$$

si $n = 2$, on a la notion de produit fibré au sens usuel.

Par analogie avec (2.3.3) on cherche un foncteur tel que $V_g U$ soit sa limite projective. A cet effet soit $K^{\cdot}$ une catégorie telle que la sous-classe des unités de $K^{\cdot}$, notée $K_0^{\cdot}$ soit formée de la manière suivante

$$K_0 = \{\{i\}, \{i, j\}, i \in I,\ (i, j) \in I \times I,\ i \neq j,\ (i, j) = (j, i)\}$$

et dont tout morphisme est de la forme $f = (\{i, j\}, i)$, $\alpha(f) = i$, $\beta(f) = \{i, j\}$.

Considérons le foncteur F_U, associé à l'application localement n-polaire et définit comme suit: $F_U = (\mathfrak{M}, F_U, K^{\cdot})$.

$$F_U(i) = C, i \in I;\ F_U(\{i, j\}) = C_0,\ \{i, j\} \in K_0^{\cdot} - I,\ C_0 \subset C; F_U(f) = u_j$$

La situation est présentée sur la fig. 2.

Fig. 2

(2.3.5) Proposition. *La limite projective du foncteur F_U dans $\mathfrak{M}$ est le n-produit fibré de U:* $\varprojlim F_U = V_g U$.

Démonstration. Soit $F_U \in \mathfrak{M}.\mathfrak{F}.K^{\cdot}$; soit $A \subset \prod^{n} C$ la limite projective de F_U; comme $F_U = (C, C_0(u_i \mid i \in I))$ le schéma de fig. 3 donne $u_i = u_j . u_{ij}$

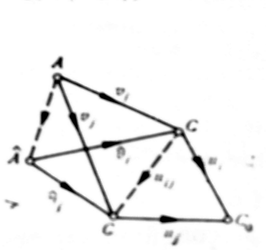

Fig. 3

$u_{ij}: C \to C_0$, pour tout $(i, j) \in I \times I$, $i \neq j$, donc $u_i(f) = u_j(u_{ij}(j))$. Avec les notations de (2.2.1) et en vertu de la définition de limite on a: $u_{ij} . v_j = v_i$, $(i, j) \in I \times I$, $i \neq j$.

Soit alors $(f_s \mid s \in I) \in A \subset \prod^{n} C$; on obtient $u_{ij} . v_j(f_s \mid s \in I) = v_i(f_s \mid s \in I)$ $\Longrightarrow u_{ij}(f_j) = f_i$; on en déduit pour tout $(i, j) \in I \times I, i \neq j$ et tout $(f_s \mid s \in I) \in A$:

$u_j(f_i) = u_j(u_{ij}(f_j)) = u_j \,.\, u_{ij}(f_j) = u_i(f_j)$. Donc la classe A est la sous-classe de $\prod\limits^{n} C$ construite comme suit

$$A = \{(f_s/s \in I) \mid u_i(f_j) = u_j(f_i) \ \& \ (f_s \mid s \in I) \in \prod^{n} C\} \subset \prod C,$$

ce qui prouve que $\varprojlim F_U = A$ et que suivant (2.3.4) $A = {}^{n}_{*}C$. Donc

$$\varprojlim F_U = e = {}^{n}_{*}C_n^{\cdot} \,. \square$$

Nous définissons la notion de n-catégorie non associative en renonçant à une généralisation directe de (G.1) et en conservant la classe des n-uplets (couples) composables comme limite projective d'un foncteur.

(2.3.6) Définition. *Une n-quasi-catégorie non associative est une n-classe polaire* $C_n^{\cdot} = (C, U, k_n)$, *que vérifie les axiomes suivants :*

(N.1) $u_i \,.\, k_n = u_i \,.\, v_i \ \forall i \in I,\ u_i \in U = \{u_j \mid j \in I\},\ v_i = \mathrm{pr}_i \mid {}^{n}_{*}C_n^{\cdot}$,

(N.2) ${}^{n}_{*}C_n = \varprojlim F_U = V_g U$.

Une définition de la notion de n-catégorie s'obtient en faisant la synthèse de (2.2.4) et de (2.3.6), on a :

(2.3.7) Définition. *Une n-catégorie non-associative est une n-classe polaire* $C_n^{\cdot} = (C, U, k_n)$ *qui vérifie les axiomes suivants:*

(N.1) $u_i \,.\, k_n = u_i \,.\, v_i$ *avec les notations de* (2.3.6),

(N.2) Si $(U(f), f)_j \in {}^{n}_{*}C_n^{\cdot}$, alors $[(U(f), f)_j] = f,\ f \in C$,

(N.3) ${}^{n}_{*}C_n^{\cdot} = \varprojlim F_U = V_g U$.

Il est évident que :

(2.3.8) Propositon. *Toute n-catégorie non associative est une n-quasi-catégorie non associative.*

(2.3.9) Proposition. *Dans une n- (quasi)-catégorie les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) ${}^{n}_{*}C_n^{\cdot} = \prod\limits^{n} C$;

(b) k_n est partout définie sur C;

(c) $u_i(C) = C_0 = \{e\}$. $\forall i \in I$.

Démonstration. La condition (a) entraîne (b) en vertu de la définition (1.2.8). La condition (b) entraîne (c) puisque la loi de composition étant définie partout et vérifiant en outre la conditon de composabilité de (N.3), $u_j(f) = e$ pour tout $j \in I$ et tout $f \in C$. Puisque $C_0 = \{e\}$ d'après (c), alors

$u_i(f_j) = u_j(f_i)$ pour tout $(f_i \mid i \in I) \in \prod\limits^{n} C$ et on a ${}^{n}_{*}C_n^{\cdot} = \prod\limits^{n} C$, donc (c) $\Longrightarrow$ (a). Enfin puisque pour tout n-uplet $(f_i \mid i \in I)$ on a $u_i(f_j) = u_j(f_i)$ pour tout $(i, j) \in I \times I$, on a $k_n(f_i \mid i \in I) \in C$ donc (c) $\Longrightarrow$ (b). $\square$

(2.3.10) Proposition. *La relation de composabilité d'une n-(quasi)-catégorie $\dot{C_n}$ est telle que*

$$\Delta(\prod^{n} C_0) \subset {}^{n}_{*}\dot{C_n}.$$

Démonstration. Puisque U est formée de n-rétractions de C sur C_0, si $e \in C_0$ on a

$$U(e) = \{u_i(e) \mid i \in I\} = (e, e, \ldots, e);$$

considérons le n-uplet $(e, e, \ldots, e)$; puisque pour tout $(i, j) \in I \times I$ on a $u_i(e) = u_j(e) = e$, il appartient au produit fibré généralisé de U, donc

$$(e, e, \ldots, e) \in {}^{n}_{*}\dot{C_n}$$

quel que soit $e \in C_0$; $(e, e, \ldots, e)$ étant un élément de $\Delta(\prod^{n} C_0)$ (Δ-diagonale de $\prod^{n} C_0 = C_0 \times \ldots \times C_0$) on a $\Delta(\prod^{n} C_0) \subset {}^{n}_{*}\dot{C_n}$. $\square$

(2.3.11) Proposition. *La relation de composabilité vérifie la condition suivante:*

$$u_i(\mathrm{pr}_j({}^{n}_{*}\dot{C_n})) = \mathrm{pr}_j(u_i({}^{n}_{*}\dot{C_n}))$$

ou en prenant la notation $v_i = \mathrm{pr}_i\ {}^{n}_{*}\dot{C_n}$, on peut écrire $u_i . v_j = u_j . v_i$ pour tout $(i, j) \in I \times I$.

Démonstration. Soit $(f_i \mid i \in I) \in {}^{n}_{*}\dot{C_n}$; alors $\mathrm{pr}_j(f_i \mid i \in I) = f_j$ et $u_i(\mathrm{pr}_j(f_i \mid i \in I)) = u_i(f_j)$; d'autre part $u_i(f_i \mid i \in I) = (u_i(f_j) \mid i \in I)$ et $\mathrm{pr}_j(u_i(f_i \mid i \in I)) = \mathrm{pr}_j(u_i(f_s) \mid s \in I) = u_i(f_j)$; comme $(f_i \mid i \in I) \in {}^{n}_{*}\dot{C_n}$, on a en vertu de la condition de composabilité $u_i(f_j) = u_j(f_i)$ d'où

$$u_i . v_j = u_j . v_i.$$

(2.3.12) Exemple. Une n-(quasi)-catégorie non-associative est pour $n = 2$ une (quasi) -catégorie non-associative.

2.4. Associativité n-aire; n-catégories. Soit une classe $C \in \mathfrak{M}_0$ munie d'une loi de composition n-aire interne et partout définie k_n; c'est le cas des demi-amas (pour $n = 3$) et des n-groupes. La notion d'associativité de la loi k_n dans C est définie de la manière suivante: étant donnée une suite de $2n - 1$ éléments f_i de C, dans C sont vérifiées les égalités suivantes:

$$[f_1, \ldots, f_{n-1}, [f_n, \ldots, f_{2n-1}]] = \cdots = [f_1, \ldots, f_s, [f_{s+1}, \ldots, f_{s+n-1}],$$
$$f_{s+n}, \ldots, f_{2n-1}] = \cdots = [[f_1, \ldots, f_n], f_{n-1}, \ldots, f_{2n-1}].$$

Cette définition usuelle de l'associativité n-aire se généralise pour le cas où k_n est une loi de composition n-aire partiellement définie. Soit J l'ensemble d'indices $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, donc $I \subset J$. On a:

(2.4.1) Définition. *Une loi de composition n-aire interne et partiellement définie dans C, notée $\dot{k_n}$, est associative, si:*

Associativité n-aire : *pour tout* $s \in I$ $(f_s, f_{s+1}, \ldots, f_{s+n-1}) \in {}^n_*C$ et $(f_1, \ldots, f_{s-1}, f_s, \ldots, f_{s+n-1}, f_{s+n}, \ldots, f_{2n-1}) \in {}^n_*C = \alpha(k'_n)$ *entrainent la suite de relations :*

$$[f_1, \ldots, f_{n-1}, [f_s, \ldots, f_{2n-1}]] = \cdots = [f_1, \ldots, f_{s-1}, [f_s, \ldots, f_{s+n-1}], f_{s+n}, \ldots, f_{2n-1}] = \cdots = [[f_1, \ldots, f_n], f_{n+1}, \ldots, f_{2n-1}].$$

(2.4.2) Remarque. La notion d'associativité est indépendante des unités dans $C_n^{\cdot}$ et ne concerne que la loi k_n':

(2.4.3) Proposition. *Une n-classe* (C, k'_n) *est associative si et seulement s'il existe une application* $(2n-1)$*-aire.*

$$k'_{2n-1} : {}^{2n-1}_{\ *}C \to C$$

et une relation R *entre* k'_n *et* k'_{2n-1} *telle que*

$$R(k'_n, k'_{2n-1}) : (k'_n, k'_n)_j (f_i \mid i \in I(2n-1)) = k'_{2n-1}(f_i \mid i \in I(2n-1)), \ \forall j \in I$$

où on a posé

$$(k'_n, k'_n)_j (f_i \mid i \in I(2n-1)) = k'_n (f_1, \ldots, f_{j-1}, k'_n (f_j, \ldots, f_{j+n-1}), f_{j+n}, \ldots, f_{2n-1}).$$

Démonstration. Soit (C, k') une n-classe associative au sens de (2.4.1); comme pour certains $(2n-1)$-uplets un composé est défini et un seul, (C, k'_n) est munie d'une loi de composition $2n-1$-aire. La condition de composabilité de tout n-uplet, sous-suite du $(2n-1)$-uplet, entraîne

$$f' = k'(f_s, \ldots, f_{s+n-1}), \quad \forall s \in I,$$

et l'associativité se présente alors sous la forme

$$k'_n(f_1, \ldots, f_{s-1}, k'_n(f_s, \ldots, f_{s+n-1}), f_{s+n}, \ldots, f_{2n-1}) = k'_{2n-1}((f_i \mid i \in I(2n-1)).$$

Soit inversement, un triplet (C, k'_n, k'_{2n-1}) vérifiant la condition de la proposition; comme k'_{2n-1} est par définition une application, le composé $k'_{2n-1}((f_i \mid i \in I(2n-1))$ est unique; d'autre part le composé $k'_n(f_s, \ldots, f_{s+n-1})$ étant formé existe et on a

$$(f_s, \ldots, f_{s+n-1}) \in {}^n_*C;$$

le composé $k'_n(f_1, \ldots, f_{s+n-1}, f', f_{s+n}, \ldots, f_{2n-1})$ existe, donc

$$(f_1, \ldots, f_{s-1}, f', f_{s+n}, \ldots, f_{2n-1}) \in {}^n_*C$$

pour tout $s \in I$: ces deux dernières conditions sont identiques aux conditions de composabilité dans (2.4.1) et avec l'unicité du composé des $2n-1$ éléments par k'_{2n-1} entraînent la condition d'associativité de (2.4.1). □

(2.4.4) Proposition. *Une n-classe* (C, k'_n) *est associative, si et seulement si la classe des applications* $(2n-1)$*-aires de la forme*

$$k'_{2n-1} : {}^{2n-1}_{\ *}C \to C$$

canoniquement associées à la loi k'_n se réduit à un seul élément.

C'est une autre forme de (2.4.3).

Avec l'associativité n-aire on définit les n-catégories.

(2.4.5) Définition. *Une (quasi)-catégorie n-aire (n- (quasi)-catégorie) est une n-classe polaire $C_n^{\cdot} = (C, U, k_n)$ qui vérifie le système d'axiomes (N) suivant :*

(N.1) *Si* $v_j = \mathrm{pr}_j\, {}^n_{\circ}C$, *on a* $u_j \,.\, k = u_j \,.\, v_j$.

(N.2) ${}^n_{\circ}C_n^{\cdot} = \varinjlim F_U$.

((N.3) $(U(f), f)_j \in {}^n_{\circ}C_n^{\cdot}$ *entraîne* $[(U(f), f)_j] = f$ *où on a posé*

$$(U, f), f)_j = (u_1(f), \ldots, u_{j-1}(f), f, u_{j+1}(f), \ldots, u_n(f)).)$$

(N.4) *Associativité n-aire conformément à (2.4.1).*

(2.4.6) Proposition. *Pour $n=2$ une n-(quasi)-catégorie est une (quasi) -catégorie.*

(2.4.7) Remarque. On devrait appeler les catégories des 2-catégories; nous omettons 2 en vertu de l'usage.

(2.4.8) Proposition. *Si dans une n-catégorie $e \in C_0$, on a $U(e) \in {}^n_{\circ}C_n^{\cdot}$ et $[(U(e), e)_j] = [(U(e))] = e$.*

En effet, puisque $u_i(e) = e$, $(U(e), e)_i = (e, e, \ldots, e)$ quel que soit $i \in I$; d'autre part en vertu de (N.3) si $(U(e), e) \in {}^n_{\circ}C_n^{\cdot}$, on a $[(U(e))] = e$. Mais pour tout couple $(e, e) = (f_i, f_j)$ on a la relation $u_i(f_j) = u_i(e) = e = u_j(e) = u_j(f_i)$, donc $(e, e, \ldots, e) = (U(e), e)_j \in {}^n_{\circ}C_n^{\cdot}$. □

Soit un n-demi-groupe G'_n (voir (3.4.3)). Alors:

(2.4.9) Proposition. *Un n-demi-groupe est une n-catégorie qui vérifie une des conditions suivantes :*

(A) ${}^n_{\circ}C_n^{\cdot} = \prod^n C$;

(B) $C_0 = \{e\}$.

Soit une loi de composition n-aire partielle, qui dérive de k'_n de la manière suivante: $k^{\varphi}_n : {}^n_{\circ}C_n^{\cdot} \to C$ avec $k_n(f_i \mid i \in I) = k_n(f_{\varphi(i)} \mid i \in I)$ si et seulement si $(f_{\varphi(i)} \mid i \in I) \in {}^n_{\circ}C_n^{\cdot}$.

(2.4.10) Proposition. *Le triplet $(C, U_{\varphi}, k^{\varphi}_n)$, tel que (C, U, k_n) soit une n- (quasi)- catégorie, est une n- (quasi)- catégorie.*

Démonstration. (C, U_{φ}) est manifestement un n-graphe et (C, k^{φ}_n) est une n-classe; donc $(C, U_{\varphi}, k^{\varphi}_n)$ est une n-classe polaire. Comme (N.1) est vérifié dans (C, U, k_n) il est également vérifié dans $(C, U_{\varphi}, k^{\varphi}_n)$ puisque si $i \in I$ alors $\varphi(i) \in I$. L'axiome (N.2) est vérifié en vertu de la construction de k^{φ}_n à partir de k_n. L'associativité (N.4) est évidente pour $(C, U_{\varphi}, k^{\varphi}_n)$ étant vérifiée pour k_n. On en déduit que $(C, U_{\varphi}, k^{\varphi}_n)$ est une n-quasi-catégorie. Supposons, que $(U(f), f)_{\varphi(j)}$ est définit dans $(C, U_{\varphi}, k^{\varphi}_n)$; alors on a

$$k_n^\varphi(u_{\varphi(1)}(f),\dots,u_{\varphi(j-1)}(f), f, u_{\varphi(j+1)}(f),\dots,u_{\varphi(n)}(f))$$
$$= k_n(u_1(f),\dots,u_{j-1}(f), f, u_{j+1}(f),\dots,u_n(f)) = f$$

en vertu de (N.3) et on a $[(U_\varphi(f), f)_{\varphi(j)}] = f$, ce qui prouve que l'axiome (N.3) est vérifié dans $(C, U_\varphi, k_n^\varphi)$. Donc $(C, U_\varphi, k_n^\varphi)$ est une n-catégorie. □

(2.4.11) Définition. *Une n-(quasi)-catégorie φ-conjuguée à la n-(quasi)-catégorie $C_n = (C, U, k_n)$ est le triplet $(C, U_\varphi, k_n^\varphi) = C_n^\varphi$, où $\varphi \in \mathfrak{S}_I$.*

(2.4.12) Proposition. *Pour toute n-(quasi)-catégorie il existe une famille à $n! - 1$ éléments de n-(quasi)-catégories φ-conjuguées. Si $n = 2$, la catégorie duale C^* de C est sa seule φ-conjuguée.*

L'axiome de l'associativité n-aire (N.4) peut être affaibli ou renforcé donnant lieu aux notions suivantes:

(2.4.13) Définition. Associativité faible. *Une loi de composition n-aire interne et partiellement définie est faiblement associative si l'axiome suivant est vérifié :*

(N'.4) *Dans tout $(2n-1)$-uplet d'éléments de C, il existe un couple d'indices $(r, s) \in I \times I \subset J \times J$ tel que si*

$$(f_q,\dots,f_{q+n-1}) \in {}^n_*C_n \text{ et } (f_1,\dots,f_{q-1}, f_q,\dots,f_{q+n-1}, f_{q+n},\dots,f_{2n-1}) \in {}^n_*C_n$$

(pour $q = r$ et $q = s$, alors on a

$$[f_1,\dots,f_{r-1}, [f_r,\dots,f_{r+n-1}], f_{r+n},\dots,f_{2n-1}]$$
$$= [f_1,\dots,f_{s-1}, [f_s,\dots,f_{s+n-1}], f_{s+n},\dots,f_{2n-1}].$$

De même on définit:

(2.4.14) Définition. Associativité forte. *Une loi de composition n-aire interne et partiellement définie est fortement associative, si l'axiome suivant est vérifié :*

(N''.4) *Si les conditions $(f_r,\dots,f_{r+n-1}) \in {}^n_*C_n$ et $(f_1,\dots,f_{r-1}, [f_r,\dots,f_{r+n-1}], f_{r+n},\dots,f_{2n-1}) \in {}^n_*C_n$ sont vérifiées pour un indice $r \in I$, elles sont vérifiées pour tout $s \in I$ et on a*

$$[f_1,\dots,f_{n-1}, [f_n,\dots,f_{2n-1}]] = [f_1,\dots,[f_{s-1}, f_s,\dots,f_{s+n-1}], f_{s+n},\dots,f_{2n-1}].$$

Dans les définitions correspondantes de n-catégories ou autres, un des axiomes (N.4), (N'.4), (N''.4) est utilisé. Si $n = 2$ on a

(2.4.15) Proposition. *Pour $n = 2$ les trois formes d'associativité explicitées par (N.4), (N'.4) et (N''.4) sont identiques.*

Le système (N) diffère de celui des catégories (G). On a

(2.4.16) Proposition. *La loi de composition k_n, dans une catégorie C_n, se prolonge canoniquement en une loi $\bar{k}_n$ en posant :*

$$\bar{k}_n(m) = k_n(m), \qquad \text{si } m = (f_i \mid i \in I) \in {}^n_*C_n,$$
$$\bar{k}_n((U(f), f)_I) = f, \qquad \forall i \in I, \text{ si } f \in C,$$

mais $(C, U, \bar{k}_n)$ ne vérifie les axiomes (N), que si $u_i = u$, $\forall i \in I$.

(2.4.17) Remarque. Si $n = 2$ on a $\bar{k}_2 = k_2$.

Etant donnée une n-quasi-catégorie, on lui associe une n-catégorie par une nouvelle loi de composition: Soit C_n une quasi-catégorie et $\dot{C} = C \cup C_0$;

on indentifie C à une partie de $\hat{C}$ et on pose $\hat{e}=(e, C_0)$; soit γ une application de $\hat{C}$ sur C, définie somme suit: $\gamma: f\to f$ si $f\in C$ et $\gamma:\hat{e}\to e$ et soit $\hat{U}=\{\hat{u}_i \mid i\in I\}$ l'application localement n-polaire telle que $\hat{u}_i(f)=u_i(f)$ si $f\in C$ et $\hat{u}(\hat{e})=\hat{e}$ si $e\in C_0$.

(2.4.18) Proposition. *Le couple $(\hat{C}, \hat{U})$ est un n-graphe. Le triplet $(\hat{C}, \hat{U}, \hat{k}_n)$ est une n-catégorie pour la loi $\hat{k}_n$ telle que*

$$\hat{k}_n(\hat{m})=k_n(m) \text{ si } \gamma^n(\hat{m})=m\in {}^n_*C_n^{\cdot} \text{ et } \hat{m}\neq(\hat{U}(f), f)_j, \ \forall j\in I,$$

$$\hat{k}_n(\hat{m})=f \text{ si } \hat{m}=(\hat{U}, (f), f)_j, \ \gamma^n(\hat{m})\in {}^n_*C_n\cap\prod C_i$$

$$\text{avec } C_i=C \text{ si } i\neq j \text{ et } C_j=\hat{C}.$$

Démonstration. Les éléments de $\hat{C}$ étant ceux de C et les couples (e, C_0) où $e\in C_0$, les applications $\hat{u}_j$ sont partout définies sur $\hat{C}$ et localement polaires; donc $\hat{U}$ est une application partout définie sur $\hat{C}$ et localement n-polaire. Par suite $(\hat{C}, \hat{U})$ est un n-graphe en vertu de (1.2.1). La loi $\hat{k}_n$ se réduisant pour $m\in {}^n_*C_n^{\cdot}$ à k_n est associative donc (N.4) est vérifié. Comme $\hat{k}_n(\hat{m})=f$ pour $\gamma^n(\hat{m})\in {}^n_*C_n\cap\prod C_i$, on peut transcrire la condition comme suit $(\hat{U}(f), f)\in {}^n_*\hat{C}_n^{\cdot} \Rightarrow \hat{k}_n\ (\hat{U}(f), f)_j=f$, donc $\hat{k}_n$ vérifie (N.3).— $\hat{u}_j\hat{k}_n=\hat{u}_j v_j$, puisque $\hat{k}_n$ s'identifie à k_n pour $\gamma^n(\hat{m})=m\in {}^n_*C_n^{\cdot}$ et pour le cas contraire la relation est évidente; donc (N.1) est vérifié. Enfin la classe des n-uplets composables pour $\hat{k}_n$ est telle que

$${}^n_*\hat{C}_n^{\cdot}=\{(f_i \mid i\in I) \mid \hat{u}_i(f_j)=\hat{u}_j(f_i),\ f\in C\}$$

donc on a ${}^n_*\hat{C}_n^{\cdot}=\varprojlim F_{\hat{U}}$ et la condition (N.2) est vérifiée, ce qui termine la démonstration de la proposition. □

De même il existe un lien direct entre les n-graphes et les n-catégories, explicité par la proposition suivante:

(2.4.19) Proposition. *Pour toute n-catégorie il existe un et un seul n-graphe sous-jacent. Tout n-graphe est le n-graphe sous-jacent à une n-catégorie.*

2.5. Homomorphismes entre structures n-aires. Une application $F=(\hat{C}, F, C)\in\mathcal{M}$ de la classe C vers la classe $\hat{C}$ n'est pas en général compatible avec une structure multiplicative sur C et $\hat{C}$. Mais on a:

(2.5.1) Définition. *Un n-(quasi)-foncteur de la n-(quasi)-catégorie $C_n^{\cdot}$ vers la n-(quasi)-catégorie $\hat{C}_n^{\cdot}$ est un triplet $H=(\hat{C}_n^{\cdot}, H, C_n^{\cdot})$ tel que:*

(F.1) *Si $(f_i \mid i\in I)\in {}^n_*C_n^{\cdot}$, alors $(H(f_i) \mid i\in I)\in {}^n_*\hat{C}_n^{\cdot}$ et on a*

$$H([(f_i \mid i\in I)])=[(H(f_i) \mid i\in I)].$$

(F.2) $\hat{U}.H(f)=H^n(U(f)),\ \forall f\in C.$

Quelques remarques s'imposent:

(2.5.2) Remarque 1. L'axiome (F.2) est la forme contractée de l'expression suivante:

$$\hat{u}_i(H(f)) = H(u_i(f)) \quad \forall f \in C \ \& \ \forall i \in I, \ \text{où } \hat{u}_i \in \hat{U} \ \text{ et } \ u_i \in U;$$

en d'autre terme l'image de la suite polaire de tout $f \in C$ est une suite polaire pour le transformé $H(f)$ de $f \in C$ par H dans $\hat{C}$.

(2.5.3) Remarque 2. Un n-foncteur (resp. n-quasi-foncteur) est un „homomorphisme fort" [13], i. e. compatible avec la loi de composition k'_n.

(2.5.4) Remarque 3. On définit suivant la méthode de [6] les n-foncteur φ-covariants, comme n-foncteurs de $C_n^{\cdot}$ vers la n-catégorie $\hat{C}_n^{\varphi}$.

(2.5.5) Remarque 4. On définit les *n-***(***quasi***)***-foncteurs non associatifs, les n-***(***quasi***)** *-néofoncteurs et les n-homomorphismes* suivant [6] [7] [8].

(2.5.6) Convention. Pour les classes de morphismes entre structures n-aire on utilisera dans la suite les notations suivantes:

$\mathcal{K}_n$: *classe des n-morphismes* (des homomorphismes entre n-graphes associés à l'univers $\mathfrak{M}_0$); $\mathcal{K}_{n0}$: classe des n-graphes associés à $\mathfrak{M}_0$;

$\mathfrak{N}_n$: *classe des n-homomorphismes entre n-classes associés à* $\mathfrak{M}_0$: on a noté $\mathfrak{N}_{n0}$ la classe des n-classes sur les classes de $\mathfrak{M}_0$;

$\mathfrak{N}'_n$: *classe des n-néofoncteurs* associés à $\mathfrak{M}_0$; $\mathfrak{N}'_{n0}$: classes des n-graphes multiplicatifs sur les classes de $\mathfrak{M}_0$;

$\mathfrak{N}''_n$: *classe des n-quasi-néofoncteurs* associés à $\mathfrak{M}_0$; $\mathfrak{N}''_{n0}$: classe des n-quasi-graphes multiplicatifs sur les classes de $\mathfrak{M}_0$;

$\mathfrak{F}^{\#}_n$: *classe des n-quasi-foncteurs non associatifs* associés à $\mathfrak{M}_0$; $\mathfrak{F}_{n0}$: classe des n-quasi-catégories non associatives sur $\mathfrak{M}_0$;

$\mathfrak{F}''_n$: *classe de n-quasi-foncteurs associés à* $\mathfrak{M}_0$; $\mathfrak{F}''_{n0}$: classe des n-quasi-catégories sur les classes de $\mathfrak{M}_0$:

$\mathfrak{F}'_n$: *classe des n-foncteurs non-associatifs* associés à $\mathfrak{M}_0$; $\mathfrak{F}'_{n0}$: classe des n-catégories non-associatives;

$\mathfrak{F}_n$: *classe des n-foncteurs* associés à $\mathfrak{M}_0$; $\mathfrak{F}_{n0}$: classe des n-catégories sur les classes de $\mathfrak{M}_0$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}_n & \mathfrak{N}''_n \arrow[l, twoheadrightarrow] \arrow[dl, twoheadrightarrow] & \mathfrak{F}^{\#}_n \arrow[l, twoheadrightarrow] & \mathfrak{F}'_n \arrow[l, twoheadrightarrow] \\
\mathfrak{N}_n & \mathfrak{N}'_n \arrow[l, twoheadrightarrow] \arrow[u, twoheadrightarrow] & \mathfrak{F}''_n \arrow[l, twoheadrightarrow] \arrow[u, twoheadrightarrow] & \mathfrak{F}_n \arrow[l, twoheadrightarrow] \arrow[u, twoheadrightarrow]
\end{tikzcd}$$

Fig. 4

(2.5.7) Proposition. *La classe* $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K} = \mathcal{K}_n$, $\mathfrak{N}_n$, $\mathfrak{N}'_n$, $\mathfrak{N}''_n$, $\mathfrak{F}''_n$, $\mathfrak{F}'_n$, $\mathfrak{F}_n$, $\mathfrak{F}_n$) *est une catégorie pour la loi de composition binaire*

$$H''.H' \quad (\hat{C}_n^{\cdot}, H'', \bar{C}_n^{\cdot}) \,.\, (\bar{C}_n^{\cdot}, H', C_n^{\cdot}) = (\hat{C}_n^{\cdot}, H''.H', C_n^{\cdot}), \ H'' \in \mathcal{K} \ \& \ H' \in \mathcal{K}$$

si et seulement si $\bar{C}_n^{\cdot} = \bar{C}_n^{\cdot}$. *La classe de structures correspondantes est une classe d'objets pour* $\mathcal{K}$, *identifiée à la classe* $\mathcal{K}_0$ *des unités de* $\mathcal{K}$.

(2.5.8) Proposition. *Les catégories* $\mathcal{K}$ *des structures n-aires partielles vérifient le diagramme de la fig. 4 où les flèches indiquent, que la catégorie source est incluse comme sous-catégorie pleine dans la catégorie but.*

Soit $\mathfrak{M}_0$ et $\hat{\mathfrak{M}}_0$ des univers tels que $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$; notons $\mathfrak{M}$ et $\hat{\mathfrak{M}}$ les catégories pleines d'applications, qui leur sont associées. Considérons les foncteurs d'oubli de $\mathcal{K}$ et de $\hat{\mathcal{K}}$ vers $\mathfrak{M}$ et $\hat{\mathfrak{M}}$ respectivement

$$p_{\mathcal{H}} = (\mathcal{M}, P_{\mathcal{H}}, \mathcal{H}) \text{ et } P_{\hat{\mathcal{H}}} = (\hat{\mathcal{M}}, P_{\hat{\mathcal{H}}}, \hat{\mathcal{H}})$$

$p_{\mathcal{H}}$ est la restriction de $P_{\hat{\mathcal{H}}}$ à $\mathcal{H} \subset \hat{\mathcal{H}}$ et $p_{\mathcal{H}} = P_{\hat{\mathcal{H}}/\mathcal{H}}$.

(2.5.9) Théorème. *$p_{\mathcal{H}}$ est un foncteur d'homomorphismes staturé, à limites projectives.*

Démonstration. Le quadruplet $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \mathcal{H}_\gamma)$ engendré par le foncteur $p_{\mathcal{H}}$ et où $\mathcal{H}_\gamma$ est la sous-catégorie des inversibles de $\mathcal{H}$ (isomorphismes entre éléments de $\mathcal{H}_0$) est une catégorie d'homomorphismes, $p_{\mathcal{H}}$ est un foncteur d'homomorphisme en vertu de [6]. Il est évident, que $p_{\mathcal{H}}(\mathcal{H})$ est une sous-catégorie de $\mathcal{M}$; en outre, comme $(p_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}_\gamma)) = \mathcal{M}_0$ (en vertu de la construction de $\mathcal{H}$), on a $\mathcal{M}_\gamma . \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_\gamma = p_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}_\gamma)$, puisque à toute application bijective est associé dans $\mathcal{H}$ un et un seul morphisme entre éléments de $\mathcal{M}$; on en déduit, que $p_{\mathcal{H}}$ est saturé. $p_{\mathcal{H}}$ étant un foncteur d'homomorphisme saturé et à noyau, ce qui découle des définitions, il est donc à p^{Γ}-noyau ; d'autre part $p_{\mathcal{H}}$ est à produit (démonstration analogue à celle qui concerne $p_{\mathcal{F}}$ voir [6]) ; ces deux conditions entraînent alors, en vertu du Corollaire de la Prop. 1 du paragraphe I.1 de [6], que $p_{\mathcal{H}}$ est à $\mathcal{M}_0$-limites projectives. $\square$

(2.5.10) Théorème. *Le foncteur $P_{\hat{\mathcal{H}}}$ est dénombrablement engendrant pour $\mathcal{M}$ résolvant à droite, à $\mathcal{M}_0$-produit.*

Démonstration. Soit $\overline{\mathcal{M}}$ la saturante de $\mathcal{M}$ dans $\hat{\mathcal{M}}$ et $P_{\mathcal{H}} = P_{\mathcal{N}'_n}$ soit le n-graphe multiplicatif $C_n^{\cdot} \in \mathcal{N}'_{n0}$ et $M \in \overline{\mathcal{M}}_0$ une classe $\emptyset \neq M \subset C$, où C est le support de $C_n^{\cdot}$; alors $u_i(M) \in \overline{\mathcal{M}}_0$ pour tout $i \in I$ et on a :

$$\hat{M} = M \cup (\bigcup_{i \in I} u_i(M)) \in \overline{\mathcal{M}}_0$$

puisque $\mathcal{M}_0$ est un univers ; le sous-n-graphe multiplicatif de $C_n^{\cdot}$ engendré par $M \in C$ est la sous-n-classe $\hat{M}_n$ de $C_n^{\cdot}$, qui appartient à la saturante $\overline{\mathcal{N}}'_n$ de $\mathcal{N}'_n$ dans $\hat{\mathcal{N}}'_n$; (i) et (ii) de la proposition 2, § 2 de [7] étant vérifiées pour p^n, il est $^{\Gamma}$-engendrant pour $\mathcal{M}$. Soit $C_{n(i)}^{\cdot}$ des sous-n-graphes multiplicatifs de $C_n^{\cdot} \in \mathcal{N}'_{n0}$, tels que $C_i \subset C_{i+1}$ pour tout $i \in N$, avec $C_i \in \hat{\mathcal{M}}$ et $\hat{C} = \bigcup_{i \in N} C_i$; si $f \in C$, il existe $i \in N$ tel que $f \in C_i$ et on a

$$u_j(f) \in C_i \subset \hat{C}, \quad \forall j \in I,$$

donc $\hat{C}_n$ est un sous-n-graphe multiplicatif de $C_n^{\cdot}$ et $P_{\mathcal{N}'_n}$ est dénombrablement engendrant pour $\mathcal{M}$. Si $C_n^{\cdot} \in \mathcal{F}_{n0}$ et $C_n^{\cdot}$ est la sous-n-catégorie engendrée par M, $P_{\hat{\mathcal{F}}}(\hat{C}_n^{\cdot}) \in \mathcal{M}_0$, $\hat{C}_n^{\cdot}$ étant l'image de $L^n_{\mathcal{F}}[C]$ par l'application $\tilde{k}$ (notations suivant [9]) ; et $P_{\hat{\mathcal{F}}}$ est engendrant ; supposons que $C_{n(i)}^{\cdot} \in \hat{\mathcal{F}}_{n0}$ pour tout $i \in N$ et que $C_i \subset C_{i+1}$; si $f_j \in C$ et $(f_j | j \in I) \in {}^n_* C_n$, ils existent des indices i_s tels que $f_j \in C_{n(i_s)} = C_{n(j)}$ et on déduit que

$$(f_j \ j \in I) \in C_{n(q)}, \text{ où } q = \sup(i_s \mid s \in I);$$

donc $(f_j \ j \in I) \in \hat{C}_n$ et $\hat{C}_n$ est une sous-n-catégorie de C_n; en vertu de la proposition de [7] citée ci-dessus, $P_{\hat{\mathcal{F}}}$ est dénombrablement engendrant pour $\mathcal{M}$, ce qui termine la démonstration. Les cas intermédiaires (i. e. où $P_{\mathcal{H}} = P_{N''}$, $P_{\mathcal{F}^{\#}}$, $P_{\mathcal{F}''}$, $P_{\mathcal{F}'}$) se traitent de la même manière. Comme $P_{\hat{\mathcal{H}}}$ est à noyau, il est, en vertu de la définition, résolvant à droite. Le foncteur $P_{\hat{\mathcal{H}}}$ est compatible avec les applications produits naturalisé donc en vertu de Déf. 6. § 1, ch. IV de [6] il est à $\mathcal{M}_0$-produit. □

(2.5.11) Corollaire 2. *Les catégories $\mathcal{H} = \mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}'_n$, $\mathcal{F}''_n$ $\mathcal{F}^{\#}_n$, sont à $\mathcal{M}_0$-limites inductives.*

Démonstration. Comme $\mathcal{H}$ est une sous-catégorie pleine de $\hat{\mathcal{H}}$, comme on a $P_{\hat{\mathcal{H}}}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{M}$, comme $P_{\mathcal{H}}$ est à noyaux, à $\mathcal{M}_0$-produits et engendrant pour $\mathcal{M}$ la catégorie est à $\mathcal{M}_0$-limites inductives.

Avec la catégorie $\mathcal{H}$ on définit par les méthodes de [6,7] les *sous-structures et les structures quotient n-aires partielles.*

3. Structures algébriques des classes des simplexes et des relations. Dans 3.1 nous précisons la notion de simplexe; une loi de composition interne n-aire est construite et pour cette loi la classe $\mathcal{S}$ est une n-catégorie.

Les définitions fondamentales de la théorie élémentaire des n-relations sont données dans 3.3. La classe des n-relations $\mathfrak{R}$ est munie d'une loi de composition n-aire interne k'_n, pour laquelle le couple $(\mathfrak{R}, k'_n)$ est une n-catégorie.

3.1. La n-catégorie des n-simplexes. Soit la classe $M \in \mathcal{M}_0$ et soit $\mathcal{S} = M^n = M \times \cdots \times M \in \mathcal{M}_0$. Alors:

(3.1.1) Définition. *Un n-simplexe sur M est un élément de $\mathcal{S}$.*

Si dans un n-simplexe tous les éléments du n-uplet sont identiques en tant qu'éléments de M, on parle de n-simplexe identique et on pose

$$\bar{e} = (e, e, \ldots, e).$$

Soit U_s une application localement n-polaire $U_s = \{u_i | i \in I\}$ dont les composantes u_i sont les applications:

on en déduit que $u_i : \mathcal{S} \to \mathcal{S}_0$, $u_i(a^j \ j \in I) = a^i = (a^i, a^i, \ldots, a^i)$

$$\mathcal{S}_0 = \{\bar{e} | e \in C_0\} = \Delta_S = \Delta(M)^n.$$

La classe $(M)^n$ peut être munie de la loi de composition n-aire:

$$k^M_n : {}^n\mathcal{S} \to \mathcal{S}, \ k^M_n((a^j_i | j \in I) | i \in I) = (a^i_i | i \in I)$$

si et seulement si $a^j_i = a^i_j$, $i \in I$, $j \in I$, $i \neq j$.

(3.1.2) Proposition. *Le triplet $(\mathcal{S}, U_s, k^S_n)$ est une n-catégorie, qui sera notée dans la suite M_n et appelée n-catégorie des n-simplexes.*

Démonstration. Le couple $(\mathcal{S}, U_s)$ est manifestement un n-graphe La loi de composition k^S_n définit sur $\mathcal{S}$ la structure de n-classe; donc le triplet $(\mathcal{S}, U_s, k_n^S)$ est une n-classe polaire. Soit la suite composable de n-simplexes $((a_i^j \mid j \in I) \mid i \in I) \in {}^{n}_{*}\mathcal{S}$ et soient u_j ot v_j la j-ème projection de U_s et la j-ème projection de $\varprojlim F_U$ vers $\mathcal{S}$; alors on a

$$u_j \,.\, k_n^S((a_i^r \mid r \in I) \mid i \in I) = u_j(a_i^i \mid i \in I) = \overline{a^j} = (a^j, a^j, \ldots, a^j),$$

$$u_j \,.\, v_j((a_i^r \mid r \in I) \mid i \in I) = u_j(a_j^r \mid r \in I) = \overline{a^j} = (a^j, a^j, \ldots, a^j)$$

d'où l'on obtient

$$u_j \,.\, k_n^S((a_i^r \mid r \in I) \mid i \in I) = u_j \,.\, v_j((a_i^r \mid r \in I) \mid i \in I)$$

et l'axiome (N.1) est vérifié. La condition de composabilité par k_n^S étant $a_i^j = a_j^i$, on peut écrire $a_i^j = (a_i^j, a_i^j, \ldots, a_i^j) = (a_j^i, a_j^i, \ldots, a_j^i) = a_j^i$ et avec les projections de U_s on a $u_i((a_j^i \mid i \in I)) = u_j((a_i^j \mid j \in I))$; l'axiome (N.2) est vérifié et pour la classe des composables on pose

$${}^{n}_{*}\mathcal{S} = ((a_j^i \mid i \in I) \mid j \in I) \mid u_j(a_i^j \mid j \in I) = u_i(a_j^i \mid i \in I).$$

Soit une suite composable de n-simplexes, formée d'éléments de Δ_S et d'un seul élément de $\mathcal{S}$: $(U(f), f)_j \in {}^{n}_{*}S$; en vertu de la composabilité on a $f^i = a_i^j = a_i$ et le composé est $[(U(f), f)] = [(f^j \mid j \in I)] = f$ donc l'axiome (N.3) est vérifié. Soit une suite $((a_j^i; i \in I), j \leq 2n-1)$ et

$$((a_q^i \mid i \in I) \mid r < q < r+n-1) \in {}^{n}_{*}\mathcal{S}, \quad r \leq n,$$

et que l'on a

$$((a_1^i \mid i \in I), \ldots, (a_{r-1}^i \mid i \in I), ((a_q^i \mid i \in I), \ r < q < r+n-1), (a_{r+n}^i \mid i \in I), \ldots,$$
$$(a_{2n-1}^i \mid i \in I)) \in {}^{n}_{*}\mathcal{S};$$

de manière générale on a la condition de composabilité $a_{r+s}^p = a_{r+p}^s$ en vertu de la première condition indiquée ci-dessus; d'autre part, puisque tout composé intermédiaire est de la forme

$$((a_{r+s}^i \mid i \in I) \mid s \in I) = (a_{r+i}^i \mid i \in I)$$

on a encore les conditions

$$a_j^i = a_i^j \text{ si } i < r \text{ et } j < r, \text{ où } i < r+n \text{ et } j < r+n,$$

$$a_j^{r+1} = a_c^j \text{ si } j < r+1,$$

$$a_{r+n+s}^j = a_{r+n+p}^s$$

les trois conditions entrainent que $a_j^i = a$ pour tout $(i, j) \in I \times I$ si $3 < i+j < 3n-2$, ce qui donne

$$(a_1^1, a, \ldots, a, a_{2n-1}^{2n-1}) \in {}^{n}_{*}\mathcal{S}$$

donc l'axiome (N.4) est vérifié. $\square$

(3.1.3) Remarque 1. Dans un $2n-1$-uplet qui est associativement composable les n-simplexes du 3-ème au $2n-3$-ème sont identiques.

(3.1.4) Remarque 2. Si la conditton de composabilité est définie par

$$a_i^j = a_j^{\varphi(i)},$$

la loi k_n^M sera notée $k_n^{\varphi M}$ et $(\mathcal{S}, U_s, k_n^{\varphi M})$ est une n-catégorie conjuguée à M_n

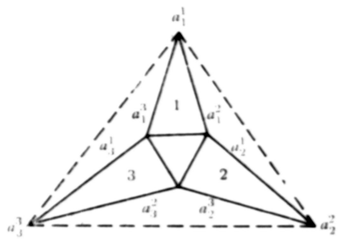

Fig. 5

3.2. La 3-catégorie des triplets (3-simplexes). Soient trois triplets de points (fig. 5) dans le plan: $(a_i^1, a_i^2, a_i^3) \in T$ $(i=1, 2, 3)$ et considérons la loi de composition ternaire k_3^T, par laquelle à trois triplets de points est associé un triplet-composé, si et seulement si chaque couple de triplets a exactement un point commun aux deux triplets. Soit l'application tripolaire U_3^t, qui associe à tout triplet trois triplets de points formés chacun sur un sommet du triangle défini par le triplet de points. Alors (T, U_3^t, k_3^T) est une 3-catégorie.

Remarque. On pourrait être tenté à introduire dans les 3-catégories la notion de 3-groupoïdes, généralisation de la noition de groupoïde. En prenant pour base de la définition les relations suivantes:

$$(a, a, a) = (a, a', a'')(a', a, a'')(a'', a', a),$$

$$(a', a', a') = a', a'', a)(a'', a', a,)(a, a, a'),$$

$$(a'', a'', a'') = (a'', a, a')(a, a'', a')(a', a', a''),$$

il serait simple de défirir un 3-groupoïde comme une 3-catégorie dont tout élément possède six éléments associés avec lesquels il se compose et donne des pôles correspondants. Mais cette définition n'est pas unique.

3.3. Généralités sur les n-relations. La notion de n-relation étant peu connue, rappelons quelques définitions. Soit $\mathfrak{M}_0$ un univers et $I \subset I \subset N$ des classes d'indices.

(3.3.1) Définition. *Une relation binaire homogène* $C_1 \in \mathfrak{M}_0$ *vers* $C_2 \in \mathfrak{M}_0$ *est un sous-classe* $R_{(C_1, C_2)}$ *de la classe-produit* $C_1 \times C_2 \in \mathfrak{M}_0$ *(*où $C_1 = C_2$*)*:

$$R_{(C^1, C^2)} = R' \subset C^1 \times C^2.$$

La notation habituelle est $R = (C^2, R', C^1)$; ayant en vue les généralisations nous lui préférons la notation $R = (R'; C^1, C^2)$.

(3.3.2) Définition. *Une n-relation (homogène) entre les éléments de la famille de classes* $\mathcal{E} = (C^i | i \in I, C^i \in \mathfrak{M}_0)$ *est une sous-classe du produit* $\prod C^i = \prod C^i$(où $C^i = C$, $\forall i \in I$):

$$R_g = R \subset \prod C^i.$$

Une n-relation sur $\mathcal{E}$ sera notée $R = (R_g;\ C^1, \ldots, C^n) \in \mathcal{R}(\mathcal{E})$.

Des cas particuliers de cette définition donnent des relations importantes pour les applications.

(3.3.3) Définition. *Une n-relation (homogène) contenue dans une n-relation donnée est toute relation sur la même famille de classes-supports et telle que $R'' \subset R'$ où $R' \subset \prod C^i$ et $R'' \subset \prod C^i$.*

Cette définition donne la relation de „*contenance*" dans $\mathcal{R}(\mathcal{E})$.

On appelle *diagonale* de A^n la classe $\Delta_A \subset A^n$ formée de n-uplets dont tous les éléments sont identiques $\Delta_A = \{(m, m, \ldots, m) | m \in A\}$.

(3.3.4) Définition. *Une n-relation identique* (*homogène*) *est une n-relation $I(A)$ telle que*

$$I(A) = (\Delta_A; A, \ldots, A).$$

A toute n-relation homogène on associe de manière unique une relation homogène; il n'en est plus de même pour une relation non-homogène.

(3.3.5) Définition. *Une n-relation identique homogène associée à une n-relation est la n-relation*

$$I(A^j) = (\Delta_{A^j}; A^j, \ldots, A^j),$$

où Δ_{A^j} est la diagonale de $(A^j)^n$ construit sur la j-ème classe de $\mathcal{E}$.

(3.3.6) Proposition. *A toute n-relation R est associée une suite de n-relations identiques homogènes, qui est unique*

$$U(R) = (I_j | j \in I) = (u_j(R) | j \in I)$$

où I_j est la diagonale de la puissance n-ème de la j-ème classe de $\mathcal{E}$.

Evidemment $\mathcal{E} \in \mathfrak{M}_0$ et tout $A^j \in \mathcal{E}$ est tel que $A^j \in \mathfrak{M}_0$.

(3.3.7) Définition. *Une j-projection de la n-relation R est une $n-1$-relation notée $pr^j R$, qui est définie par la relation*

$$\mathrm{pr}_j R = \complement \{(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n) / (a_1, \ldots, a_n) \in R\}.$$

3.4. n-catégorie des n-relations. Notons $\mathcal{R}_2^h$ la classe des n-relations homogènes sur $C \in \mathfrak{M}_0$

$$\mathcal{R}_2^h = \{(A; C, C, \ldots, C / A \subset C^n\}.$$

Considérons l'application k_n suivante:

$$k_n : (\mathcal{R}_2^h)^n \to \mathcal{R}_2^h$$

telle que pour tout $(R_i | i \in I) \in (\mathcal{R}_2^h)^n$ on ait

$$k_n(R_1, R_2, \ldots, R_n) = R = (A; C, C, \ldots, C)$$

où la classe A est définie comme suit

$$A = A_1 . A_2 \ldots A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | \exists (a_i^k),\ (a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i, \ldots, a_i^n) \in R_i\}.$$

(3.4.1) Définition. *Le produit n-aire* (*dans la suite produit*) *d'une suite à n-éléments de n-relations homogènes est la n-relation R telle que*

$$R = k_n(R_1, \ldots, R_n).$$

Pour la loi n-aire partout définie dans $\mathcal{R}_2^h$ on a:

(3.4.2) Proposition. *La n-relation identique Δ_C associée à tout n-relation homogène de $\mathcal{R}_2^h$ est une unité pour la loi k_n*

$$k_n(\Delta_C, \Delta_C, \ldots, \Delta_C, R_C, \Delta_C, \ldots, \Delta_C) = R_C \in \mathcal{R}_2^h,$$

où R est dans une position arbitraire de 1 à n; Δ_C est unique.

Démonstration. Soit $A = \{(a_1, \ldots, a_n)\}$ et $\Delta_C = \{(a, a, \ldots, a)\}$. Pour la classe produit $\bar{A} = \Delta_C . \Delta_C \ldots \Delta_C . A . \Delta_C \ldots \Delta_C$ on a:

$$\bar{A} = \{(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) | a^k_i : (a^1_i, \ldots, a'_i, \ldots, a^n_i) \in R_i\}$$

mais il s'en suit, que $\bar{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = A$, car $n-1$ des n-relations sont des n-relations identiques, ce qui donne donc

$$k_n(\Delta_C, \ldots, \Delta_C, R, \Delta_C, \ldots, \Delta_C) = R_C.$$

Soit un autre élément $\bar{\Delta}_C \in \mathcal{R}_2^h$ avec la même propriété; de $\tilde{A} = A$ suit que $\bar{\Delta}_C$ est une diagonale de C^n; celle-ci étant unique on a $\bar{\Delta}_C = \Delta_C$. □

La définition de n-groupe [5] donne lieu à la définition de structures plus pauvres, généralisations du demi-groupe:

(3.4.3) Définition. *Un n-demi-groupe est un ensemble (classe) muni d'une loi de composition n-aire, interne et partout définie sur C^n qui vérifie les axiomes suivants:*

$(D_n.1)$ *La loi de composition est associative:*

$$[[c_1, c_2, \ldots, c_n], c_{n+1}, \ldots, c_{2n-1}] = \cdots = [c_1, \ldots, c_i, [c_{i+1}, \ldots c_{i+n}], \ldots, c_{2n-1}] = \cdots = [c_1, \ldots, c_{n-1}, [c_n, \ldots, c_{2n-1}]].$$

$(D_n.2)$ *Il existe un et un seul élément-unité dans C^n, soit u, tel que pour toute position dans le n-uplet d'un élément $c \neq u$ on a le composé $[u, u, \ldots, u, c, u, \ldots, u] = c$.*

(3.4.4) Proposition. *Le couple $(\mathcal{R}_2^h, k_n)$ est un n-demi-groupe.*

Démonstration. $(D_n.2)$ est démontré dans (3.4.3); k_n est partout définie, la classe $\mathcal{R}_2^h$ étant celle des n-relations homogènes sur C. L'associativité découle de l'associativité du produit

$$((A_1 . A_2 \ldots A_n) . A_{n+1} \ldots A_{2n-1}) = (A_1 \ldots A_i . (A_{i+1} \ldots A_{i+n}) . . A_{2n-1}). \ \square$$

La situation ainsi décrite et dont les éléments essentiels sont dans [17] se généralise pour la classe des n-relations sur $\mathfrak{M}_0$.

Construisons sur $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n(\mathfrak{M}_0)$ les applications suivantes

$$\mu : \mathcal{R}_n \to (\mathfrak{M}_0)^n \text{ avec } \mu(R_i) = (C^j_i \, i \in I) = \mathcal{E}_i$$

qui à toute n-relation de $\mathcal{R}_n$ associe la classe de classes supports $\mathcal{E}_i$ et

$$U_R : \mathcal{R}_n \to (\mathfrak{M}_0)^n \text{ avec } U_R = \{u_i | i \in I\} \text{ et } u_i(R_i) = \Delta_{C^j_i},$$

où $\Delta_{C^j_i} = (\bar{\Delta}_{C^j_i}; C^j_i, C^j_i, \ldots, C^j_i)$, qui associe à toute n-relation le n-uplet des n-relations identiques construites sur les classes du support $\mathcal{E}_i$ de R_r. Avec ses notations on construit la loi k^r_n suivante:

$$k_n^r((R_i|i\in I))=(A;k_n^{\mathfrak{M}_0}((\mu(R_i)|i\in I)))$$

si et seulement si $C_j^i=C_i^j$ pour tout couples $(i,j)\in I\times I$ et où on a posé

$$A=k_n^M((h_i\, i\in I))/h_i|i\in I)\in \overset{n}{*}(M^{\perp}),\ h_i\in A_i\ \ \forall i\in I$$

avec la notation

$$M=\bigcup_{C\in\mathfrak{M}_0} C\in\hat{\mathfrak{M}}_0,\ \mathfrak{M}_0\in\hat{\mathfrak{M}}_0.$$

On a le théorème important :

(3.4.5) Théorème. *Le triplet* $(\mathcal{R}_n, U_R, k_n^r)$ *est une n-catégorie. L'application* μ *définit un n-foncteur de* $\mathcal{R}_n$ *vers* $(\mathfrak{M})_n^{\perp}$

$$\mu=((\mathfrak{M}_0)_n^{\perp},\ \mu,\ \mathcal{R}_n).$$

Démonstration. Dans $(\mathcal{R}_n, U_R, k_n^r)$, $(\mathcal{R}_n, U_R)$ est un n-graphe et $(\mathcal{R}, k_n)$ est une n-classe, donc $(\mathcal{R}_n, U_R, k_n^r)$ est une n-classe polaire. Soit $R=[(R_i|i\in I)]$ le composé de $(R_i|i\in I)$, supposé composable dans $(\mathcal{R}_n, U_R, k_n^r)$; puisque $R_i=(A_i;C_i^n, C_i^{n-1},\ldots, C_i^1)$ et $R=(A;C_1^n, C_2^{n-1},\ldots, C_n^1)$ on a

$$u_j\,.\,k_n^r(R_i\, i\in I)=u_j(A;C_1^n, C_2^{n-1},\ldots, C_n^1)=\bar{\Delta}_{C_i^j}\ \text{et encore}$$

$$u_j\,.\,v_j(R_i|i\in I)=u_j(R_j)=u_j(A_j;C_j^n, C_j^{n-1},\ldots, C_j^j)=\Delta_{C_j^j}$$

ce qui donne $u_j\,.\,k_n^r=u_j\,.\,v_j$ et l'axiome (N.1) est vérifié. Puisque la loi de composition est définie si et seulement si on a $C_j^i=C_i^j$, cette condition entraîne

$$(\Delta_{C_j^i};C_j^i, C_j^i,\ldots, C_j^i)=\bar{\Delta}_{C_j^i}=\bar{\Delta}_{C_i^j}=(\Delta_{C_i^j};C_i^j, C_i^j,\ldots, C_i^j)$$

mais en vertu de la définition des applications $u_s(\forall s\in I)$ on a $u_i(R_j)=u_j(R_i)$ et la classe des u-uplets composables est

$$\overset{n}{*}(\mathcal{R}_n)=\{(R_i|i\in I)/u_i(R_j)=u_j(R_i),\ \forall(i,j)\in I\times I,\ i\neq j\},$$

qui est un produit fibré généralisé, donc l'axiome (N.2) est vérifié. Supposons $(U(R);R)_j\in\overset{n}{*}(\mathcal{R})$; on peut alors écrire

$$(\bar{\Delta}_{C^1},\ldots,\bar{\Delta}_{C^{j-1}}, R, \bar{\Delta}_{C_n^j},\ldots,\bar{\Delta}_{C^n})\in\overset{n}{*}(\mathcal{R}_n)$$

où $\bar{\Delta}_{C^i}=(\Delta_{C^i};C^i,\ldots,C^i)\in\mathcal{R}_n^h(C^i)$; le composé est alors une n-relation sur

$$\mathcal{E}=(C^n, C^{n-1},\ldots, C^1)$$

donc sur la classe des supports de R; d'autre part on a

$$A=k_n^M(h_i\, i\in I)/(h_i\, i\in I)\in M_n,\ h_i\in A_i=\bar{\Delta}_{C^i},\ \text{si } i\neq j \text{ et } A_j\simeq R_j)$$

mais comme par hypothèse $(U_s(h), h)_j\in\overset{n}{*}M_n^{\perp}\Rightarrow[(U_s(h)_s\, h)_j]=h$ on a $A=A_R=A_j$ et en définitive $(U(R), R)_j=R$; l'axiome (N.3) est vérifié. L'axiome de l'associativité découle de l'associativité dans la classe des n-simplexes sur $\mathfrak{M}_0$. □

(3.4.6) Remarque 1. Si $n>2$ les $2n-1$-uplets pour lesquels l'associativité est vérifiée sont formés de $2n-5$ relations identiques homogènes sur une même classe. C'est une conséquence de l'associativité des n-simplexes.

(3.4.7) Remarque 2. La loi de composition des n-relations peut être généralisée sensiblement en considérant la loi k_n^r comme construite à partir des lois $(k_n^{\mathfrak{M}_0})$ et (k_n^M) de n-simplexes.

(3.4.8) Corollaire 1. *La classe des n-relations homogènes $C \in \mathfrak{M}^0$ est un n-demi-groupe pour la loi de composition k_n^{rh} partout définie sur $\mathfrak{R}_n^h(C)$.*

(3.4.9) Corollaire 2. *Si $n=2$ la classe $(\mathfrak{R}_2, k_2)$ est la catégorie des relations. La classe $\mathfrak{R}_2^h(C)$ est un demi groupe.*

La première partie est une conséquence de (2.4.9); la seconde partie — des propriétés des relations linéaires homogènes.

(3.4.10) Remarque 3. La classe A de la relation-composée de (3.4.5) peut être présentée sous la forme équivalente

$$A=\{(a_i^i \mid i \in I) \mid \exists!(a_j^i) \sqcap a_j^i = a_i^j \; \& \; (a_j^i \mid i \in I) A_j, \; \forall j \in I\}.$$

La théorie qui est exposée dans ce travail est une des généralisations n-aires de la théorie des catégories. Pour obtenir un axiome analogue à l'axiome (G.1) des catégories qui est remplacé par (N.1) dans les n-catégories on construit des unités „locales" formées de $n-1$ éléments et qui avec un élément donné $f \in C$ forment un n-uplet composable tel que le composé soit f. Une étude détaillée sur ce sujet paraîtra sous peu.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Benabou. Structures algébriques dans les catégories (thèse). *Cahiers de Top. et de Géom. diff.*, **9**, 1967.
2. N. Bourbaki. Théorie des ensembles. Paris, 1962.
3. N. Bourbaki. Algèbre. Paris, 1964. Chap. 1.
4. P. M. Cohn. Universal Algebra. New York, 1965.
5. W. Dörnte. Untersuchung über einen veralgemeintern Gruppenbegriff. *Math. Zeit.* **29**, 1928, 1—19.
6. Ch. Ehresmann. Catégories et structures. Paris, 1965.
7. Ch. Ehresmann. Structures quasi-quotient. *Math. Ann.*, **171**, 1967, 293—363.
8. Ch. Ehresmann. Introduction to the theory of structured categories. Lawrence, Kansas, 1966.
9. Ch. Ehresmann. Problèmes universels relatifs aux catégories n-aires. *C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris*, **264**, 1967, 273—276.
10. А. Г. Курош. Лекции по общей алгебре. Москва, 1962.
11. H. Prüffer. Theorie der Abelschen Gruppen. *Math Zeit.*, **20**, 1920, 165—187.
12. А. К. Сушкевич. Теория обобщенных групп. Киев, 1937.
13. В. В. Вагнер. Теория отношений и алгебра частичных отображений. *Теория полугрупп и ее приложения*, Саратов, 1965 вып. 1, 3—178.
14. В. В. Вагнер. Теория обобщенных груд и обобщенных групп. *Матем. сб.*, **32** (74), 1953, 545—632.
15. В. В. Вагнер. К теории грудоидов. *Изв. вузов, Математика*, **5** (48), 1965, 31—43.
16. V. Topentcharov. Eléments d'une théorie des catégories n-aires. *C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris*, **264**, 1967, 269—272.
17. I. Copi, F. Harary. Eléments d'une théorie des catégories n-aires. *Portug. Math.*, **12**, 1953, 4, 143—152.

Centre de Mathématiques Appliquées
1000 Sofia P. O. Box 376

Reçu le 24. 7. 1971