Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

PROBLÈME NON-COERCIF POUR UNE INÉQUATION VARIATIONNELLE ELLIPTIQUE À DEUX CONTRAINTES

IORDAN V. IORDANOV

On considère une inéquation variationnelle à deux contraintes près du bord pour une forme dans $H^1(\Omega)$, qui est non-négative, mais non-coercive sur $H^1(\Omega)$. Grâce à l'existence de deux contraintes et à l'aide d'une régularisation convenable on démontre l'existence et l'unicité de la solution.

Soit $\Omega \subset R^n$ un domaine borné et soient E et F deux sous-ensembles fermés et non-vides du domaine fermé $\bar{\Omega}$. Fixons $\psi \in H^1(\Omega)$ et notons par K l'ensemble convexe et fermé dans $H^1(\Omega)$ de tous les $v \in H^1(\Omega)$, tels que: $v \geq \psi$ sur E et $v \leq \psi$ sur F au sens de $H^1(\Omega)$ (définition 1.1. du § 1). Il n'est pas difficile de voir que l'ensemble K ne dépend que de la restriction ψ sur $E \cup F$.

Au moyen des fonctions $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, bornées et mesurables dans Ω, et telles que $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq |\xi|^2$, $\nu > 0$, pour tout $\xi \in R^n$ et pour presque tout $x \in \Omega$, on définit la forme bilinéaire:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} [\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j}] dx, \quad u, v \in H^1(\Omega),$$

qui n'est pas coercive sur $H^1(\Omega)$ et ne satisfait que cette condition plus faible: $a(v, v) \geq \nu(\|v\|^2_{H^1(\Omega)} - \|v\|^2_{L_2(\Omega)})$, $v \in H^1(\Omega)$.

Malgré ça, comme il existe deux contraintes, on démontre l'existence et l'unicité de la solution d'un problème variationnel qui consiste à déterminer un élément $u \in K$, tel que $a(u, v-u) \geq 0$ pour tout $v \in K$.

A condition que la forme $a(u, v)$ soit symétrique, ce problème est équivalent à la recherche de $\min_{v \in K} a(v, v)$. Le problème est bien posé lorsque $\text{vrai}\max_E \psi \geq \text{vrai}\min_F \psi$. Dans le cas contraire ce problème admet plus d'une solution triviale (des constantes). Une autre singularité du problème est qu'on n'exige pas que la solution satisfasse des conditions données sur la frontière. (Par exemple dans [1], où la contrainte est à l'intérieur de Ω, on trouve la solution dans $H^1_0(\Omega)$, i. e. la solution est nulle sur la frontière. Evidemment ce problème est coercif.)

Le problème traité ici m'a été posé par T. Genčev. Je lui exprime ma gratitude profonde.

1. Notations et lemmes préliminaires. Soit $\Omega \subset R^n$ un domaine borné. Notons, comme d'habitude $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Supposons que localement Ω soit d'un seul côté de $\partial\Omega$, et que la frontière $\partial\Omega$ soit de classe C^1 c'est-à-dire: (1.1) *Il existe une famille* $N_1, \ldots, N_m$ *d' ouverts bornés de* R^n *recouvrant* $\partial\Omega$, *tels que pour chaque* $j=1, \ldots, m$, *il existe une application de classe* C^1 $y=\varphi_j(x)$ *de* N_j *sur* $O=\{y \mid |y|<1\}$, *possédant une application inverse différentiable* $x=\varphi_j^{-1}(y)$ *de* O *sur* N_j, *et telle que* $\varphi_j(\Omega\cap N_j)=\{y \mid y\in O, y_n>0\}$ *et* $\varphi_j(\partial\Omega\cap N_j)=\{y \mid y\in O, y_n=0\}$. *En outre si* $N_i\cap N_j\neq\emptyset$, *alors il existe un* C^1*-difféomorphisme* J_{ij} *de* $\varphi_i(N_i\cap N_j)$ *sur* $\varphi_j(N_i\cap N_j)$ *à jacobien positif, tel que* $\varphi_j(x)=J_{ij}(\varphi_i(x))$ *pour tout* $x\in N_i\cap N_j$.

Même sous les hypothèses plus faibles que (1.1) pour $\partial\Omega$, il n'est pas difficile de voir qu'on peut prolonger chaque fonction lipschitzienne v dans Ω à obtenir une fonction lipschitzienne dans R^n à support borné, contenant Ω (éventuellement avec une nouvelle constante de Lipschitz). Au moyen d'une partition différentiable de l'unité $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_0$, correspondant à la couverture $N_1, \ldots, N_m, \Omega$ du compact $\bar\Omega$, le problème se ramène au prolongement des fonctions $v\alpha_j$, $j=1, \ldots, m$. On prolonge $v\alpha_j(\varphi_j^{-1}(y))$ par réflexion dans $\{y \mid y\in O, y_n<0\}$ et par la transformation réciproque de (1.1) on obtient la fonction $\widetilde{v\alpha_j}$, définie des deux côtés de $\partial\Omega$ et coïncidant avec $v\alpha_j$ dans $\Omega\cap N_j$. La fonction $\tilde v=\sum_{j=1}^{m}\widetilde{v\alpha_j}+v\alpha_0$ est le prolongement recherché de v en dehors de Ω. De cette construction on voit que $\tilde v$ est lipschitzienne et même de support compact dans R^n.

R e m a r q u e. Pour que les raisonnements prémentionnées soient valables il suffit de supposer que la frontière $\partial\Omega$ soit lipschitzienne, autrement dit pour tout $x_0\in\partial\Omega$ il existe un voisinage $N(x_0)\subset R^n$, tel qu'on peut représenter $\partial\Omega\cap N$ par $x_i=g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ pour un indice i quelconque, où la fonction g est lipschitzienne.

Notons par $H^1(\Omega)$ la complétion de $C^1(\bar\Omega)$ pour la norme

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)}=\int_\Omega\Big(u^2+\sum_{i=1}^{n}u^2_{x_i}\Big)\,dx.$$

Des considérations avant la remarque il est évident que les fonctions lipschitziennes dans $\bar\Omega$ appartiennent à $H^1(\Omega)$. En effet, si v est une telle fonction, on peut estimer facilement dans $L_2(R^n)$ les dérivées premières des régularisations de la fonction $\tilde v$ par une estimation des rapports différentiaux. Il reste à utiliser la remarque 1 de [5], p. 343. Par conséquent l'ensemble M des fonctions lipschitziennes dans $\bar\Omega$ est partout dense dans $H^1(\Omega)$.

Soit N une constante non-négative et $u\in H^1(\Omega)$. Rappelons [4] quelques propriétés de

$$\zeta(x)=\min(u, N)(x)=\begin{cases} u(x), & x\in\{u\le N\}\cap\Omega,\\ N, & x\in\{u>N\}\cap\Omega.\end{cases}$$

Evidemment ζ est définie p. p. dans Ω et $\zeta\le u$ p. p. dans Ω. Cette inégalité se ramène ou à une égalité, ou à l'inégalité $0\le N\le u$. Par conséquent $\zeta^2\le u^2$ p. p. dans Ω, i. e. $\zeta\in L_2(\Omega)$ et $\|\zeta\|_{L_2}\le\|u\|_{L_2}$.

De plus (on répète la démonstration du lemme 1.1. de [4]), si $\{u_m\}\subset M$ et $u_m\to u$ dans $H^1(\Omega)$ il est évident que $\zeta_m=\min(u_m, N)\in M$ et

$$\lim_{m\to\infty} \| \zeta-\zeta_m \|_{L_2(\Omega)} \leq \lim_{m\to\infty} \| u-u_m \|_{L_2(\Omega)}=0.$$

D'autre part

$$\limsup_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \| (\zeta_m)_{x_i} \|^2_{L_2(\Omega)} \leqq \sum_{i=1}^{n} \| u_{x_i} \|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Donc il existe une sous-suite $\{\zeta'_m\}$ qui converge faiblement dans $H^1(\Omega)$ vers ζ. D'après le théorème de Banach — Saks la suite $\{\zeta''_m\}$ des moyennes aritméthiques d'une certaine sous-suite de $\{\zeta'_m\}$ converge (fortement) dans $H^1(\Omega)$ vers ζ. Ainsi $\zeta \in H^1(\Omega)$ est vérifié et même:

$$\| \zeta \|_{H^1(\Omega)} \leq \| u \|_{H^1(\Omega)}. \tag{1.2}$$

En effet, étant donné $\varepsilon>0$, pour tous m suffisamment grand on a

$$\| \zeta'_m \|_{H^1(\Omega)} \leq \| u \|_{H^1(\Omega)}+\varepsilon.$$

La même constante majore $\| \zeta''_m \|_{H^1(\Omega)}$, d'où il suit que $\| \zeta \|_{H^1(\Omega)} \leq \| u \|_{H^1(\Omega)}+\varepsilon$, ainsi (1.2) est démontré.

On voit d'une manière analogue que si la constante $Q \leq 0$ et si $u \in H^1(\Omega)$, alors

$$\eta(x)=\max(u, Q)(x)=\begin{cases} u(x), & x \in \{u \geqq Q\} \cap \Omega, \\ Q, & x \in \{u<Q\} \cap \Omega \end{cases}$$

appartient à $H^1(\Omega)$ et

$$\| \eta \|_{H^1(\Omega)} \leq \| u \|_{H^1(\Omega)}. \tag{1.3}$$

Lemme 1.1. *Soit* $u \in H^1(\Omega)$ et

$$\| u_x \|^2_{L_2(\Omega)} = \| u \|^2_{H^1(\Omega)} - \| u \|^2_{L_2(\Omega)} = 0. \tag{1.4}$$

Alors $u=$ const *p. p.*

Démonstration. Il suffit de répéter le début de la démonstration de la représentation intégrale de Sobolev ([5, p. 368]). Soit $O_R(x_0)$ une sphère de centre x_0 et de rayon R, telle que $O_R(x_0) \subset \Omega$. De la condition (1.4) il suit

$$\| u_x \|^2_{L_2(O_R)}=0, \tag{1.4'}$$

d'où on obtient, que $u=$ const dans O_R. La sphère O_R, étant arbitraire, l'affirmation susdite sera valable sur chaque compact dans Ω et au moyen d'une suite croissante de compacts connexes convergente vers Ω, on obtiendra finalement le lemme.

Supposons pour plus de simplicité que le centre de O_R est $x_0=0$. Notons

$$p(y)=\begin{cases} c\cdot\exp\left(-\frac{h^2}{h^2-|y|^2}\right), & |y| \leq h, \\ 0 \qquad , & |y| \geq h, \end{cases}$$

où la constante c est telle que

$$\int_{R^n} p(y)dy = 1 \text{ et } 0 < h < R.$$

On a la représentation

$$u(x) = \int_{O_R} u(y)p(y)dy + \sum_{i=1}^{n} \int_{O_R} \frac{\partial u}{\partial y_i}(y) \frac{B_i(x, y)}{|x-y|^{n-1}} dy \tag{1.5}$$

p. p. dans Ω, où les noyaux $B_i(x, y)$ sont bornés. La condition (1.4′) montre que les dernières n intégrales dans (1.5) sont égales à zero, parce que les fonctions sous les signes d'intégration sont nuls p. p., i. e. la fonction $u(x)$ est équivalente à la constante $\int_{O_R} u(y)p(y)dy$ dans O_R. Le lemme est vérifié.

Soit $u, v \in H^1(\Omega)$ et $G \subset \bar{\Omega}$.

Définition 1.1. *On dit que* $u \geq v$ *sur l'ensemble* G *au sens de* $H^1(\Omega)$ *s'il existe des suites* $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ *de fonctions de* $C^1(\bar{\Omega})$, *qui convergent en norme dans* $H^1(\Omega)$ *resp. vers* u *et* v *et satisfont* $u_n \geq v_n$ *sur* G.

Définition 1.2. *On dit que* $u = v$ *sur* G *au sens de* $H^1(\Omega)$ *si simultanément* $u \geq v$ *et* $u \leq v$ *sur* G *au sens de* $H^1(\Omega)$.

Définition 1.3. *On dit que* $u > v$ *en* $x_0 \in \Omega$ *au sens de* $H^1(\Omega)$ *s'il existe un nombre* $\varrho > 0$ *et une fonction non-négative* $\alpha \in C_0^1(O_{2\varrho}(x_0))$, *où* $O_{2\varrho}(x_0)$ *est la sphère de centre* x_0 *et de rayon* 2ϱ, *tels que* $\alpha > 0$ *sur* $O_\varrho(x_0)$ *et* $u - \alpha \geqq v$ *au sens de* $H^1(\Omega)$ *sur* $O_{2\varrho}(x_0) \cap \bar{\Omega}$.

Lemme 1.2. *Soit* F *un sous-ensemble mesurable de* Ω *et* $u \in H^1(\Omega)$ *tel que :* $u =$ const *sur* F *au sens de* $H^1(\Omega)$. *Alors*

$$\int_F \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \, dx = 0.$$

Démonstration Grâce à la condition (1.1) on prolonge la fonction u en dehors de Ω à une fonction de $H_0^1(R^n)$ ([2, théorème 8.1, p. 53]). Il reste à se référer à la démonstration du théorème analogue de la fin de l'appendice dans [1].

2. Description du problème. Fixons des sous-ensembles fermés E et F de Ω avec mes $E \neq 0 \neq$ mes F et une fonction $\psi \in H^1(\Omega)$. Désignons par K l'ensemble fermé et convexe de toutes les fonctions $v \in H^1(\Omega)$, satisfaisant au sens de $H^1(\Omega)$ les inégalités: $v \geq \psi$ sur E et $v \leq \psi$ sur F.

Soient $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, des fonctions bornées et mesurables dans Ω telles que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \nu = \text{const} > 0, \tag{2.1}$$

pour tout $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$ et pour presque tout $x \in \Omega$.

Par ces fonctions on définit la forme bilinéaire (éventuellement non-symétrique) sur $H^1(\Omega)$:

$$a(u, v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} dx, \qquad u, v \in H^1(\Omega),$$

qui satisfait évidemment

(2.2) $$a(u, u) \geq \nu(\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - \|u\|^2_{L_2(\Omega)}).$$

Au moyen de (2.2) et en tenant compte de l'existence des deux contraintes $E \neq \emptyset$, $F \neq \emptyset$ on démontre qu'il existe une solution unique du problème variationnel suivant:

Trouver un élément $u \in K$ tel que:

(2.3) $$a(u, v-u) \geq 0$$

pour tout $v \in K$.

Sous l'hypothèse que la forme $a(u, v)$ est symétrique, ce problème est équivalent à la recherche de $\min_{v \in K} a(v, v)$.

Donnons d'abord une formule équivalente au problème (2.3). C'est un résultat bien connu de Minty.

Lemme 2.1. *A condition que la forme $a(u, v)$, définie et bilinéaire sur $H^1(\Omega)$, est non-négative, c'est-à-dire $a(v, v) \geq 0$ pour tout $v \in H'(\Omega)$, le problème* (2.3) *est équivalent à la recherche d'un élément $u \in K$ tel que*

(2.3′) $$a(v, v-u) \geq 0, \quad v \in K.$$

Remarque. Par exemple pour assurer la non-négativité de la forme $a(u, v)$, définie plus haut, il suffit de supposer que $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0$ pour tout $\xi \in R^n$ et pour presque tout $x \in \Omega$.

Démonstration. Supposons que (2.3) soit vérifié pour $u \in K$. Comme il suit de la condition du lemme que $a(v-u, v-u) \geq 0$, d'où $a(v, v-u) \geq a(u, v-u)$ pour tout $v \in K$, l'inéquation (2.3′) est valable.

Supposons (2.3′). L'élément $w = (1-t)v + tv$, $v \in K$, $t \in (0, 1)$, appartient à K, parce que c'est un ensemble convexe. Par conséquent, il suit de (2.3′) que $a(w, w-u)$ i. e. $a((1-t)v + tu, (1-t)v - (1-t)u) \geq 0$. En divisant par $1-t$ et en laissant $t \to 1-0$, nous obtenons $a(u, v-u) \geq 0$ ($v \in K$ étant arbitraire), c. q. f. d.

3. Théorème d'unicité. D'abord on établit quelques estimations. Notons $N = \operatorname{vrai}\max_E \psi$, $M = \operatorname{vrai}\min_F \psi$. Il est évident que si $N < M$, alors le problème considéré a plusieurs solutions. Par exemple les constantes $c \in [N, M]$ sont des solutions, car elles appartiennent à K et $a(c, v-c) = 0$ pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$.

On suppose dorénavant, que

(3.1) $$N \geq M.$$

Lemme 3.1. *Soit $u \in K$ une solution de* (2.3). *Alors $M \leq u \leq N$ sur Ω au sens de $H^1(\Omega)$ et donc p. p. dans Ω.*

Démonstration. Notons par ζ la fonction $\min(u, N) \in H^1(\Omega)$. Evidemment $\zeta \in K$, parce que sur E: $u, N \geq \psi$, d'où $\zeta \geq \psi$ et sur F: $u \leq \psi$, d'où $\zeta \leq \psi$. Posant dans (2.3) $v = \zeta$ on trouve:

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(-u)_{x_i}(\zeta-u)_{x_j}\,dx \leq 0.$$

D'autre part, utilisant le lemme 1.2 on obtient

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\zeta_{x_i}(\zeta-u)_{x_j}dx = \int\limits_{\Omega\cap\{\zeta<N\}} \cdots + \int\limits_{\Omega\cap\{\zeta=N\}} \cdots = 0.$$

Combinant par la dernière inégalité on trouve $a(\zeta-u, \zeta-u) \leqq 0$, d'où il suit $\|(u-\zeta)_x\|_{L_2(\Omega)}=0$. A l'aide du lemme 1.1 on conclut que $u-\zeta=c$, $c=$ const. Cette constante est non-négative, puisque $u\geqq\zeta$. On va démontrer que $c=0$.

Supposons le contraire, i. e. $c>0$. Il n'est pas difficile de voir, que dans l'ensemble F, sur lequel $u\leqq\psi$ au sens de $H^1(\Omega)$ il existe un point $x_F\in F$, tel que $u\leqq M$ en x_F au sens de $H^1(\Omega)$. En effet, du contraire, i. e. $u>M$ sur F, il suit que sur F: $\psi>M$, parce que $\psi\geqq u>M$. Cela signifie que pour chaque point $x\in F$ il existe une fonction $\alpha_x\in C_0^1(O_\varrho(x))$, $\alpha_x\geqq 0$ et $\alpha_x|_{O_{\varrho/2}(x)}>0$, telle que $\psi-\alpha_x\geqq M$ sur $\bar\Omega\cap O_\varrho(x)$ au sens de $H^1(\Omega)$. Choisissons une famille finie de sphères $O_{\varrho/2}(x^i)$, $i=1,\ldots,f$ recouvrant le compact F. Donc

$$\psi\geqq M+\min_{1\leqq i\leqq f}\min\{\alpha_{x^i}(x)\,|\,x\in O_{\varrho/2}(x^i)\}$$

p. p. sur F, qui est en contradiction avec le choix de la constante M, i. e. ensuite que $M=\operatorname{vrai\,min}_F \psi$.

Les inégalités $u-c\geqq\zeta$ et $c>0$ montrent que $u>\zeta$ sur $\bar\Omega$ au sens de $H^1(\Omega)$. Par conséquent $\zeta=\min(u, N)=N$ dans $\bar\Omega$. On obtient $u>N$ sur $\bar\Omega$ au sens de $H^1(\Omega)$. On le combine avec $N\geqq M$ pour conclure qu' au point x_F: $u>M$. Mais c'est en contradiction avec $u\leqq M$ au point x_F. Il suit que $c=0$, i. e. $u=\zeta\leqq N$ au sens de $H^1(\Omega)$ et d'autant plus presque partout. D'une manière analogue on voit que $u\geqq M$ sur Ω au sens de $H^1(\Omega)$. Il faut utiliser l'existence d'un point $x_E\in E$ pour lequel $u\geqq N$ au sens de $H^1(\Omega)$.

C o r o l l a i r e 3.1. *Il existe des points $x_E\in E$ et $x_F\in F$ pour lesquels resp. $u=N$ et $u=M$ au sens de $H^1(\Omega)$.*

C o r o l l a i r e 3.2. Si $\psi|_E=N$ *et* $\psi|_F=M$ *au sens de* $H^1(\Omega)$, *où les constantes N, M satisfont $N\geqq M$, alors $u|_E=N$ et $u|_F=M$ au sens de* $H^1(\Omega)$.

T h é o r è m e 3.1. *La solution du problème* (2.3) *est unique.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient u_1 et u_2 deux solutions de (2.3). Après addition des inéquations $a(u_1, u_2-u_1)\geqq 0$ et $a(u_2, u_1-u_2)\geqq 0$ on obtient $a(u_1-u_2, u_1-u_2)\leqq 0$, d'où d'après le lemme 1.1 : $u_1=u_2+c$, $c=$ const. Puisque u_2 et u_2+c sont des solutions, la supposition que $c\neq 0$ nous amène en contradiction avec le corollaire 3.1.

4. Théorème d'existence. On ne peut pas employer le théorème de L i o n s et S t a m p a c c h i a [3] pour démontrer un théorème d'existence, parce que la forme $a(u, v)$ n'est pas coercive. On remplacera la coercivité par la propriété (2.2). Des raisonnements analogues à ceux du lemme 3.1, basés sur l'existence de deux contraintes et sur la condition (3.1), auront une grande importance.

L e m m e 4.1. *Soit $\tilde K\neq\emptyset$ un sous-ensemble fermé, convexe et borné de $H^1(\Omega)$. Alors il existe une solution $u\in \tilde K$ du problème* (4.1) $a(u, v-u)\geqq 0$ *pour tout $v\in\tilde K$.*

R e m a r q u e 4.1. S'il existe plusieurs solutions de ce problème, alors la différence de deux solutions arbitraires sera une constante (cf. lemme 1.1).

Démonstration du théorème. Notons par $(.,.)$ le produit scalaire dans $L_2(\Omega)$ et considérons la forme

$$b_\varepsilon(u, v) = a(u, v) + \varepsilon(u, v), \ \varepsilon > 0.$$

Evidemment elle est coercive sur $H^1(\Omega)$:

$$b_\varepsilon(u, u) \geqq \min(\varepsilon, \nu) . \|u\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{4.2}$$

Le problème de la recherche d'un élément $u_\varepsilon \in \widetilde{K}$, tel que

$$b_\varepsilon(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \geqq 0 \tag{4.3}$$

pour tout $v \in \widetilde{K}$ admet une solution u_ε unique pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé d'après le théorème de Lions et Stampacchia [3]. Comme $\widetilde{K}$ est borné on a $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqq$ const uniformément par rapport à ε. Choisissons une suite $\{u_{\varepsilon_n}\}$, $\varepsilon_n \to 0$, faiblement convergente dans $H^1(\Omega)$ vers un élément $u \in \widetilde{K}$ (puisque $\widetilde{K}$ est fermé et convexe). L'inéquation

$$b_{\varepsilon_n}(v, v - u_{\varepsilon_n}) \geqq 0, \ v \in \widetilde{K}, \tag{4.3'}$$

est équivalente à (4.3) avec $\varepsilon = \varepsilon_n$ (lemme 2.1). Pour la limite faible u de $\{u_{\varepsilon_n}\}$ quand $\varepsilon_n \to 0$ on obtient $a(v, v-u) \geqq 0$ par quoi on achève la démonstration du fait que $u \in \widetilde{K}$ est une solution de (4.1).

Théorème 4.1. *Il existe une solution u du problème* (2.3).

Démonstration. Notons

$$K_R = \{v \mid v \in K, \ \|v\|_{H^1(\Omega)} \leqq R\}.$$

Pour toutes valeurs suffisamment grandes du nombre R, l'ensemble $K_R \neq \emptyset$. (Par exemple $\psi \in K_R$ pour tout $R \geqq \|\psi\|_{H^1(\Omega)}$, où ψ est la fonction de 2.) Il est clair que K_R sont fermés et convexes et que $K = \bigcup_R K_R$. D'après le lemme 4.1 il existe $u_R \in K_R$ tel que $a(u_R, v - u_R) \geqq 0$ pour tout $v \in K_R$. Nous allons répéter les raisonnements du lemme 3.1, en supposant provisoirement que

$$N \geqq 0 \geqq M. \tag{4.4}$$

A la fin de la démonstration on peut se libérer de cette hypothèse complémentaire.

Notons $\zeta_R = \min(u_R, N)$. Evidemment $\zeta_R \in K$ et en vertu de (1.2) et (4.4) on a $\|\zeta_R\|_{H^1(\Omega)} \leqq \|u_R\|_{H^1(\Omega)} \leqq R$, i. e. $\zeta_R \in K_R$. Comme dans le lemme 3.1, on trouve $u_R = \zeta_R$, d'ou $u_R \leqq N$ p. p. dans Ω.

D'une pareille manière on démontre, que $u_R \geqq M$ en utilisant essentiellement les conditions (4.4) et (1.3).

Ainsi donc on a démontré que les inéqualités $M \leqq u_R \leqq N$ p. p. dans Ω sont valables uniformément par rapport à R, d'où il suit

$$\|u_R\|_{L_2(\Omega)} \leqq \text{const}. \tag{4.5}$$

Montrons qu'il existe une constante c, qui ne dépend pas de R et telle que

$$\|u_R\|_{H^1(\Omega)} \leqq c \tag{4.6}$$

pour tout R suffisamment grand. Soit $v \in K_{R_0}$ (par exemple on peut prendre $v = \psi$) et $R \geq R_0$. De l'inégalité $a(u_R, v) \geq a(u_R, u_R) \geq \nu \|(u_R)_x\|^2_{L_2(\Omega)}$ et en tenant compte que les fonctions $a_{ij}(x)$ sont bornées, on obtient

$$|a(u_R, v)| \leq \text{const}\, \|v_x\|_{L_2(\Omega)} \|(u_R)_x\|_{L_2(\Omega)},$$

et on trouve finalement que $\|(u_R)_x\|_{L_2(\Omega)} \leq$ const uniformément par rapport à R. La dernière inégalité avec (4.5) donne (4.6).

On peut choisir une sous-suite $\{u_{R_n}\}$ faiblement convergente vers un élément $u \in K$, car K est un ensemble fermé et convexe. Soit $v \in K$ un élément arbitraire. Par conséquent il existe un nombre R_0, tel que $v \in K_{R_0}$. Pour tout $R_n \geq R_0$ on a $a(v, v-u_{R_n}) \geqq 0$, parce que u_{R_n} est une solution de l'inéquation variationnelle $a(u_{R_n}, v-u_{R_n}) \geq 0$ sur K_R (lemme 2.1). En passant en limite quand $R_n \to \infty$, on obtient $a(v, v-u) \geq 0$. Maintenant, au moyen du lemme 2.1, on achève la démonstration du théorème 4.1 sous l'hypothèse supplémentaire (4.4).

Prenons une fonction ψ, telle que éventuellement (4.4) ne soient pas vérifiées. Certainement (3.1) est supposé. Choisissons la constante C de telle façon que pour la fonction $\bar{\psi} = \psi + C$ soient vérifiées $\bar{N} \geq 0 \geq \bar{M}$, où les constantes $\bar{N}$ et $\bar{M}$ sont analogues à N et M. A l'aide de $\bar{\psi}$ on définit l'ensemble $\bar{K}$, de même manière que K. Il est évident que $\bar{K} = \{\bar{v} \mid \bar{v} = v + C, v \in K\}$. Le problème (2.3) pour $\bar{K}$ est résoluble dans le cas considéré. Soit $\bar{u}$ sa solution. Alors la fonction $u = \bar{u} - C$ évidemment appartient à K et pour tout $v \in K$ satisfait l'inéquation (2.3). En effet, $v + C \in \bar{K}$ et par conséquent $a(\bar{u}, v + C - \bar{u}) \geq 0$. Il suffit de noter que $a(\bar{u}, v + C - \bar{u}) = a(u + C, v - u) = a(u, v - u)$. Le théorème 4.1 est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Levy, G. Stampacchia. On the regularity of the solution of a variational inequality. *Comm. Pure Appl. Math.*, **22**, 1969, 153—180.
2. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. Неоднородные граничные задачи и их приложения. Москва, 1971.
3. J. L. Lions, G. Stampacchia. Variational inequalities. *Comm. Pure Appl. Math.*, **20**, 1967, 493—519.
4. W. Littman, G. Stampacchia, H. F. Weinberger. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, **17**, 1963, 43—77.
5. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 5. Москва, 1959.

Centre for Research and Training in Mathematics and Mechanics
1000 Sofia P. O. Box 373

Reçu le 19. 10. 1973