Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПУАССОНОВОСТИ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА ПРИ ЭРЛАНГОВОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОТЕРЯМИ

ХРИСТО В. ПАВЛОВ

В настоящей работе найден ряд условий пуассоновости потока, входящего в систему $GI/G/1/0$ в терминах ее характеристик: стационарные вероятности, математическое ожидание цикла, т. е. математическое ожидание времени между двумя последовательными поступлениями заявок в свободную систему и др. Построенные критерии пуассоновости входящего потока полезны, когда нет полной информации о входящем потоке. (При счетчике Гейгера — Мюллера, например, неизвестно даже количество необнаруженных частиц за единицу времени).

1. Некоторые свойства распределений из класса *NBU (New Better then Used)*. Этот класс распределений ввели и изучали А. Маршалл и Ф. Прошан [5].

Определение 1. *Функция распределения $F(x)=P(\xi<x)$ неотрицательной случайной величины ξ является NBU-распределением ($F(x)$ принадлежит классу NBU), если*

$$\bar{F}(x+y)\leq\bar{F}(x)\bar{F}(y) \tag{1}$$

для $\forall\, x\geq 0,\ y\geq 0$, *где* $\bar{F}(x)=1-F(x)$.

Заметим, что класс *NBU* шире класса стареющих распределений.

Лемма 1. *Пусть $F(x)$ является не сосредоточенным в нуле NBU-распределением. Тогда существуют константы a, X, такие, что*

$$\bar{F}(x)\leq\exp(-ax) \quad \text{для } x>X. \tag{2}$$

Доказательство. Если положить $\varphi(x)=-\ln\bar{F}(x)$, (1) можно записать

$$\varphi(x+y)\geq\varphi(x)+\varphi(y) \quad \text{для } \forall x\geq 0,\ y\geq 0. \tag{3}$$

Из самого определения $\varphi(x)$ видно, что это неотрицательная, неубывающая и непрерывная слева функция. Так как $F(x)$ — несосредоточенное в нуле распределение, то существует $x_0>0$, такое, что $\bar{F}(x_0)>0$, или, что то же самое, $\varphi(x_0)>0$. Покажем, что для $a=\varphi(x_0)/2x_0$ существует X, такое, что (2) выполняется. Действительно, из самого выбора a следует, что $\varphi(x_0)>ax_0$. Рассмотрим $\varphi(x)$ на интервале $[x_0, 2x_0)$. Так как $\varphi(x)$ не убывает, будем иметь

$$ax<a2x_0=[\varphi(x_0)/2x_0]2x_0=\varphi(x_0)\leq\varphi(x) \quad \text{для } x_0\leq x<2x_0. \tag{4}$$

А теперь методом индукции покажем, что для любого целого положительного i будет верно неравенство

$$\varphi(iQx_0)>aiQx_0 \quad \text{для} \quad 1\leq Q<2. \tag{5}$$

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 1, 1975, с. 311—316.

Для $i=1$ (5) эквивалентно (4). Допустим, что (5) верно. Тогда при помощи (3) и (4) получим, что если Q — произвольное число из интервала $[1, 2)$, то

$$\varphi[(i+1)Qx_0]=\varphi(iQx_0+Qx_0)\geq\varphi(iQx_0)+\varphi(Qx_0)>aiQx_0+aQx_0=a(i+1)Qx_0.$$

Но соотношение (5) означает, что для любого целого положительного i $\varphi(x)$ будет больше ax на интервалах $\Delta_i=[ix_0, 2ix_0)$, и так как $\cup\Delta_i=[x_0, \infty)$, что

$$\varphi(x)>ax \quad \text{для} \quad x\geq x_0. \tag{6}$$

В терминах функций распределения (6) записывается $F(x)<\exp\{-ax\}$ для $x\geq x_0$. Тем самым мы показали справедливость леммы.

Следствие 1. *Если $F(x)$ есть NBU-распределение, то у него существуют все моменты.*

В [3] фактически доказана

Лемма 2. *Если $F(x)$ есть NBU-распределение, то*

$$U(h)+U(t)\leq U(t+h), \tag{7}$$

$$U(h)\leq\lambda h, \tag{8}$$

где $\lambda^{-1}=\int F(x)dx$, $U(h)=\sum F^{k*}(h)$; $F^{k*}(h)$ k-кратная свертка $F(x)$.

Оказывается верна

Лемма 3. *Если $F(x)$ есть непоказательное NBU-распределение, то*

$$U(h)<\lambda h \tag{9}$$

для $h>0$, где $\lambda^{-1}=\int F(x)dx$.

Доказательство. Допустим, что существует $x_0>0$ такое, что

$$U(x_0)=\lambda x_0. \tag{10}$$

Тогда, используя (7), (8) и (10), получим

$$\lambda 2x_0\geq U(2x_0)=U(x_0+x_0)\geq U(x_0)+U(x_0)=2U(x_0)=\lambda 2x_0,$$

откуда $U(2x_0)=2\lambda x_0$.

Применяя индуктивный метод, можно показать, что

$$U(kx_0)=\lambda kx_0. \tag{11}$$

В [1] показано, что если $F(x)$ является непоказательным NBU-распределением, то $\mu_2/2\mu_1^2-1<0$, где μ_1 и μ_2 — первый и второй моменты $F(x)$, существование которых гарантирует следствие 1. Если воспользоваться хорошо известным фактом [3, теорема 2.7], что $U(t)=t/\mu_1+(\mu_2/2\mu_1^2-1)+o(1)$, получим, что существует достаточно большое N, такое, что

$$U(t)<t/\mu_1=\lambda t \quad \text{для} \quad t>N. \tag{12}$$

Если выбрать $k>N/x_0$, при помощи (11) и (12) получим $\lambda kx_0=U(kx_0)<\lambda kx_0$. Это противоречие гарантирует справедливость леммы.

Следствие 2. *Если $F(x)$ непоказательное NBU-распределение, то*

$$f(s)<\lambda/(\lambda+s), \quad \text{где} \quad f(s)=\int\exp\{-sx\}dF(x).$$

Доказательство. Если помножим (9) на $s\exp\{-sh\}$ и проинтегрируем от 0 до ∞, получим $f(s)/(1-f(s))<\lambda/s$, что эквивалентно утверждению следствия 2.

2. Нахождение некоторых характеристик системы. Пусть t_n — момент прихода n-го требования в систему. Поскольку входящий поток рекуррентен, то случайные величины $t_{n+1}-t_n$, $n=\overline{1,\infty}$, — независимые и одинаково распределенные. Пусть $P\{t_{n+1}-t_n\}=F(x)$. Времена обслуживания непотерянных заявок не зависят от входящего потока и являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами. Пусть $P\{\eta_k<x\}=G(x)$, где η_k — время обслуживания k-той непотерянной заявки. Будем считать, что математические ожидания случайных величин $t_{n+1}-t_n$ и η_k существуют и что $\int\bar{F}(x)dx=\lambda^{-1}$, $\int[1-G(x)]dx=\nu^{-1}$.

А теперь займемся нахождением математического ожидания цикла τ. Пусть $\varkappa$ есть число потерянных заявок во время обслуживания первой заявки. При помощи тождества Вальда [2] получим

$$M\tau=M[(t_2-t_1)+(t_3-t_2)+\cdots+(t_{\varkappa+2}-t_{\varkappa+1})]=M(t_{n+1}-t_n)M(\varkappa+1)=\lambda^{-1}(M\varkappa+1). \tag{13}$$

Так как $P\{\varkappa=k\}=\int[F^{k*}(y)-F^{(k+1)*}]dG(y)$, будем иметь

$$M\varkappa=\sum_1^\infty kP\{\varkappa=k\}=\sum_1^\infty k\int_0^\infty[F^{k*}(y)-F^{(k+1)*}(y)]dG(y)$$
$$=\int_0^\infty\sum_1^\infty k[F^{k*}(y)-F^{(k+1)*}(y)]dG(y)=\int_0^\infty\left(\sum_1^\infty F^{k*}(y)\right)dG(y)$$
$$=\int U(y)dG(y)=MU(\eta). \tag{14}$$

Замечание. Интеграл $\int U(y)dG(y)$ имеет смысл, если $\int_0^\infty xdG(x)<\infty$. Действительно, элементарная теорема восстановления [4] дает $U(y)/y\xrightarrow[y\to\infty]{}\lambda$. Следовательно, существует достаточно большое Y, такое, что

$$U(y)/y\leq 2\lambda \quad \text{для} \quad y\geq Y. \tag{15}$$

При помощи (15) и факта, что $U(y)$ не убывает, получаем

$$U(y)\leq\tilde{U}(y)=\begin{cases}U(Y) & \text{для} \quad y<Y,\\ 2\lambda y & \text{для} \quad y\geq Y.\end{cases}$$

Так как $\int\tilde{U}(y)dG(y)=U(Y)G(Y)+2\lambda\int_Y^\infty ydG(y)<\infty$, то

$$\int U(y)dG(y)<\infty.$$

Из (13) и (14) получаем

$$M\tau=\lambda^{-1}[MU(\eta)+1]. \tag{16}$$

Ясно, что рассматриваемая система может находиться в двух состояниях: e_0 — система свободна, e_1 — система занята.

Обозначим через $\chi^{(i)}(T)$ суммарное время пребывания в состоянии e_i до момента T. Точнее,

$$\chi^{(i)}(T)=\int_0^T e_i(u)du, \quad \text{где} \quad e_i(u)=\begin{cases}1, & \text{если } e_i=X(u),\\ 0, & \text{если } e_i\neq X(u),\end{cases}$$

$X(u)$ — состояние системы в момент u.

В [2] показано, что

$$k_i=\lim_{T\to\infty}\chi^{(i)}(T)/T=M\chi^{(i)}/M\tau, \tag{17}$$

где $\chi^{(i)}$ — суммарное время пребывания в состоянии e_i за один цикл. В нашем случае $\chi^{(1)}=\eta$, откуда при помощи (16) и (17) имеем

$$k_1=\lambda M\eta\,[MU(\eta)+1]^{-1}. \tag{18}$$

Пусть $p_i^*(t)$ — вероятность, что в момент t система находится в состоянии e_i. Так же как в [1] можно показать, что если существуют $\lim\limits_{t\to\infty}p_i^*(t)=p_i^*$, то $p_i^*=k_i$, т. е. в нашем случае, если существуют стационарные вероятности, то

$$p_1^*=k_1=\lambda\nu^{-1}(MU(\eta)+1)^{-1},\ p_0^*=1-p_1^*. \tag{19}$$

Если входящий поток простейший, будем иметь $U(y)=\lambda y$, откуда при помощи (19) получаются формулы

$$M\tau=\lambda^{-1}(M\lambda\eta+1)=\nu^{-1}+\lambda^{-1}, \tag{20}$$

$$p_1^*=\lambda/(\lambda+\nu), \quad p_0^*=\nu/(\lambda+\nu). \tag{21}$$

З а м е ч а н и е. Формулы Эрланга для системы $M/M/1$ совпадают с формулами (21). Таким образом, мы изложили еще один способ доказательства теоремы Севастьянова в случае одноканальной системы.

3. Критерии для пуассоновости входящего потока при системе $GI/G/1/0$. В этом параграфе будут доказаны несколько условий пуассоновости входящего потока при системе $GI/G/1/0$.

У т в е р ж д е н и е 1. *При системе $GI/D/1/0$ входящий поток является пуассоновским тогда и только тогда, когда для любого положительного ν*

$$M\tau=\lambda^{-1}+\nu^{-1}. \tag{22}$$

Н е о б х о д и м о с т ь следует из (20).

Д о с т а т о ч н о с т ь. При помощи (16) и (22) получим

$$M\tau=\lambda^{-1}[MU(\eta)+1]=\lambda^{-1}+\nu^{-1},$$

откуда имеем

$$MU(\eta)=\lambda/\nu. \tag{23}$$

В рассматриваемом леммой случае

$$G(y)=\begin{cases}0 & \text{для } y\leq\nu^{-1},\\ 1 & \text{для } y>\nu^{-1},\end{cases}$$

откуда при помощи (23) следует, что для любого $\nu>0$

$$U(1/\nu)=\lambda/\nu \tag{24}$$

или, что то же самое, $U(t)=\lambda t$ для $\forall t>0$. Но последнее соотношение выполняется тогда и только тогда, когда входящий поток простейший.

Утверждение 2. *При системе $GI/M/1/0$ входящий поток пуассонов тогда и только тогда, когда при любом изменении интенсивности обслуживания ν остается в силе соотношение* (22).

Необходимость следует из (20).

Достаточность. Точно как в доказательстве достаточности утверждения 1, доказывается справедливость (23). Так как $G(x)=1-\exp\{-\nu x\}$, будем иметь

$$MU(\eta)=\int\sum_1^\infty F^{k*}(x)dG(x)=\sum_1^\infty\int F^{k*}(x)dG(x)= \tag{25}$$

$$=\sum_1^\infty\int\exp\{-\nu x\}dF^{k*}(x)=\sum_1^\infty f^k(\nu)=f(\nu)/(1-f(\nu)),$$

где $f(\nu)=\int\exp\{-\nu x\}dF(x)$.

Из (23) и (25) следует

$$\lambda/\nu=f(\nu)/(1-f(\nu)) \text{ для } \forall\nu>0, \tag{26}$$

откуда, применив теорему единственности преобразований Лапласа — Стилтьеса, имеем $F(x)=1-\exp\{-\lambda x\}$, или, что входящий поток пуассоновский.

Лемма 4. *Формулы Эрланга* (21) *выполняются тогда и только тогда, когда $MU(\eta)=\lambda/\nu$.*

Достаточность получается заменой $MU(\eta)$ на λ/ν в (19).

Необходимость доказывается путем сравнения p_1^* из (19) и (21).

Теорема 1. *Если $F(x)$ — непоказательное NBU-распределение, то для системы $GI/G/1/0$ входящий поток пуассоновский тогда и только тогда, когда хотя бы для одного $G(x)=P(\eta_k<x)$ выполняются формулы Эрланга.*

Достаточность. Из выполнений формул Эрланга и леммы 4 следует (23). Если допустим, что $F(x)$ — непоказательное распределение, лемма 4 дает (9), которое противоречит (23).

Необходимость. Из пуассоновости входящяго потока следует (23), которое вместе с леммой 4 подтверждает справедливость формул Эрланга.

Точно также можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Если $F(x)$ — непоказательное NBU-распределение, то для системы $GI/G/1/0$ входящий поток пуассоновский тогда и только тогда, когда хотя бы для одного $G(x)=P(\eta_k<x)$ выполняется $M\tau=\nu^{-1}+\lambda^{-1}$.*

Лемма 5. *Если $F(x)$ — непоказательное NBU-распределение, то*

$$p_0^*<\nu/(\lambda+\nu),\quad p_1^*>\lambda/(\lambda+\nu). \tag{27}$$

Доказательство. Лемма 3 дает

$$MU(\eta)=\int U(y)dG(y)<\int\lambda y dG(y)=\lambda/\nu. \tag{28}$$

Из (19) и (28) следует (27).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Обретенов. Математическа теория на надеждността. София, 1973, с. 46, 293, 90—92.
2. Е. Барзилович, Ю. Каштанов. Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем. Москва, 1971, с. 18.
3. Р. Барлоу, Ф. Прошан. Математическая теория надежности. Москва, 1969, с. 32.
4. Д. Кокс, В. Смит. Теория восстановления. Москва, 1967, с. 160.
5. A. Marshall, F. Proshan. Classes of distributions applicable in replacement, with renewal theory implications. Scientific research laboratories. Boeing. August 1970.

Высший педагогический институт
Шумен Болгария

Поступила 12. 4. 1974