Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ЗАВИСИМОСТЬ НАИЛУЧШЕИ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПОЛЮСОВ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

ПЕТЪР Г. БОЯДЖИЕВ

Пусть D — открытое множество в комплексной плоскости, E — компакт, содержащийся в D, и P — компакт, непересекающийся с E. Изучается наилучшее приближение аналитических в D функций на компакте E в равномерной метрике рациональными функциями, все полюсы которых принадлежат компакту P. Найдена оценка сверху, которая, по-видимому, точна.

1. Пусть D — открытое множество комплексной плоскости $\overline{C}$ и $E\subset D$ — компакт. Множество функций, однозначных и аналитических в D, будем обозначать через $A(D)$; множество всех рациональных функций порядка $\leq n$ будем обозначать через $\mathfrak{R}_n$; множество всех рациональных функций, все полюсы которых принадлежат фиксированному компакту $P\subset\overline{C}$, будем обозначать через $\mathfrak{R}_n(P)$. Если $f\in A(D)$, то через $R_n(f)=\inf\|f-r\|_E$ обозначается наилучшее равномерное приближение f рациональными функциями из $\mathfrak{R}_n$; здесь inf берется по всем функциям $r\in\mathfrak{R}_n$, а $\|\varphi\|_E=\max\limits_{z\in E}|\varphi(z)|$; через $R_n(f, P)$ обозначается наилучшее равномерное на E приближение функции f рациональными функциями из $\mathfrak{R}_n(P)$.

Если положим $F=\overline{C}\setminus D$, то пара (E, F) обычно называется плоским конденсатором (см., например, [2]). Конденсатор называется регулярным, если гармоническая мера ∂F относительно открытого множества $G=D\setminus E$ непрерывна в замыкании G, и правильным, если $\partial E\cup\partial F$ состоит из конечного числа аналитических кривых Жордана. Если $u(z)$ — гармоническая мера ∂F относительно G, то число $c=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial\nu}ds$ называется емкостью конденсатора (E, F); здесь Γ — гомологический класс гладких кривых Жордана для G, а ν — нормаль к Γ, направленная в сторону возрастания $u(z)$.

Хорошо известно [5], что если логарифмическая емкость хотя бы одного из компактов E и F равна нулю, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}[R_n(f)]^{1/n}=0$ для любой $f\in A(D)$. Если логарифмическая емкость обоих компактов E и F положительна, то положительна также и емкость конденсатора (E, F). Тогда, как было показано Уолшем [5] для правильного конденсатора и Багби [1], и Уайдомом [4] для общего случая регулярного конденсатора, для любой функции $f\in A(D)$ имеет место неравенство $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}[R_n(f)]^{1/n}\leq e^{-1/c}$. Позднее Левиным и Тихомировым [3] для правильного конденсатора и Уайдомом [4] для общего случая было показано, что это неравенство точно; именно, если $R_n=\sup R_n(f)$, где sup

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 1, 1975, с. 331—336.

берется в классе всех функций из $A(D)$, ограниченных по модулю 1, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{1/n} = \exp(-1/c)$. Таким образом, постоянная $\exp(-1/c)$ является мерой того, насколько хорошо любая функция $f \in A(D)$ может быть приближена рациональными функциями без никаких ограничений на расположение полюсов. Однако вопрос о том, как рациональное приближение зависит от множества полюсов приближающих функций, остался открытым. Поставленный так вопрос не совсем ясен, поэтому мы конкретизируем его следующим образом: даны множества D, E и F, как выше. Требуется найти величину

$$R = \sup_{f \in A(D)} \lim_{n\to\infty} [R_n(f, P)]^{1/n},$$

которая, очевидно, является мерой того, насколько хорошо любая функция $f \in A(D)$ может быть равномерно на E приближена рациональными функциями, все полюсы которых лежат на компакте P. Настоящая статья посвящена этой задаче. В конце статьи доказана теорема, в которой дается оценка величины R сверху. Автор полагает, что это оценка точна, что пока не доказано. Исследования делаются в терминах одной экстремальной задачи, аналогичной рассматриваемой в [2].

2. Пусть (E, F) — произвольный регулярный конденсатор и P — компакт, принадлежащий $\mathbb{C} \setminus E$. Положим

$$\sigma_n = \sigma_n(E, F, P) = \inf\left(\max_E |r(z)| / \min_F |r(z)|\right)^{1/n},$$

где inf берется по всем $r \in \mathcal{R}_n(P)$.

Лемма 1. *Предел* $\sigma = \sigma(E, F, P) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ *существует.*

Доказательство. Ясно, что без ограничения общности можно предполагать множество $E \cup F \cup P$ ограниченным.

Так как $P \cap E = \emptyset$, то функция $1/(z - z_0)$, $z_0 \in P$ принадлежит всем $\mathcal{R}_n(P)$, откуда получаем, что $\bar{\sigma} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sigma_n \leq 1$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда существует целое число $q = q(\varepsilon)$, что $\sigma_q \leq \underline{\sigma} + \varepsilon$, где $\underline{\sigma} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sigma_n$. Далее, как следует из результатов ([5], гл. 12), существует функция $s_q \in \mathcal{R}_q(P)$, такая что

$$\sigma_q = \left(\max_E |s_q(z)| / \min_F |s_q(z)|\right)^{1/q}.$$

Пусть n_k — последовательность натуральных чисел, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n_k} = \bar{\sigma}$. Пусть $n_k = q \cdot m_k + l_k$, где $0 \leq l_k < q$ — целое. Рассмотрим функцию $r_{n_k}(z) = [s_q(z)]^{m_k}$. Все полюсы $r_{n_k}(z)$ принадлежат P, и ее порядок не превосходит $q \cdot m_k$. Так как $q \cdot m_k \leq n_k$, то следует, что $r_{n_k} \in \mathcal{R}_{n_k}(P)$. Тогда для величины σ_{n_k} получим

$$\sigma_{n_k} \leq \left(\max_E |r_{n_k}(z)| / \min_F |r_{n_k}(z)|\right)^{1/n_k}$$

$$= \left(\max_E |s_q(z)| / \min_F |s_q(z)|\right)^{m_k/n_k} = \sigma^{q m_k / n_k} \leq (\underline{\sigma} + \varepsilon)^{q m_k / n_k},$$

откуда $\overline{\sigma} = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n_k} \le \sigma + \varepsilon$, т. е. $\overline{\sigma} \le \sigma$. Так как всегда $\sigma \le \overline{\sigma}$, то лемма доказана.

Лемма 2. *Существует последовательность рациональных функций $\{\omega_n(z)\}$, $\omega_n \in \mathcal{R}_n(P)$, нули которых принадлежат E, и такая, что*

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} (\max_E |\omega_n(z)| / \min_F |\omega_n(z)|)^{1/n}. \tag{2}$$

Доказательство. Как было замечено при доказательстве леммы 1, существует рациональная функция $s_n \in \mathcal{R}_n(P)$, такая, что

$$\sigma_n = (\max_E |s_n(z)| / \min_F |s_n(z)|)^{1/n}.$$

Пусть $b_{n_1}, b_{n_2}, \ldots, b_{nn}$ — полюсы функций $s_n(z)$. Рассмотрим функцию n переменных

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (z_i - z_j) / \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n-1} |z_i - b_{nj}|,$$

где $z_i \in E$, $1 \le i \le n$. $V(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ непрерывна на $E^n = E \times E \times \ldots \times E$ и, значит, достигает там своего максимума V_n. Выберем точки $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{nn}$, $a_{n_k} \in E$ таким образом, чтобы $V_n = V(a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{nn})$. Положим

$$\omega_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - a_{nk}) / (z - b_{nk}).$$

Функция $\omega_n(z)$ очевидно принадлежат $\mathcal{R}_n(P)$. Утверждается, что она — искомая в лемме функция.

Действительно, рассмотрим функцию

$$\psi_n(z) = \ln |s_n(z)| - \ln \max_{z\in E} |s_n(z)| - \sum_{k=1}^{n} g(z, b_{nk}),$$

где $g(z, \zeta)$ — функция Грина для $\mathbb{C} \setminus E$ с полюсом в ζ. Она субгармонична в $\mathbb{C} \setminus E$, и по принципу максимума следует, что $\psi_n(z) \le 0$, $z \notin E$. Если положим

$$\mu_n = \min_F [n^{-1} \sum_{k=1}^{n} g(z, b_{nk})],$$

то из этого неравенства получаем

$$\sigma_n = (\max_E |s_n(z)| / \min_F |s_n(z)|)^{1/n} \ge e^{-\mu_n}, \tag{3}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} &\overline{\lim_{n\to\infty}} (\max_E |\omega_n(z)| / \min_F |\omega_n(z)|)^{1/n} \ge \overline{\lim_{n\to\infty}} \sigma_n \ge \exp(-\underline{\lim_{n\to\infty}} \mu_n), \\ &\underline{\lim_{n\to\infty}} (\min_E |\omega_n(z)| / \min_F |\omega_n(z)|)^{1/n} \ge \underline{\lim_{n\to\infty}} \sigma_n \ge \exp(-\overline{\lim_{n\to\infty}} \mu_n), \end{aligned} \tag{4}$$

где мы воспользовались тем, что $\sigma_n \leq \max_E |\omega_n(z)| / \min_F |\omega_n(z)|)^{1/n}$.

Обратно, пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Так как E — регулярный компакт, то существует множество L_ε, состоящее из конечного числа гладких жордановых кривых в совокупности, охватывающих E, такие, что $g(t, p) \leq \varepsilon$ для любых $t \in L_\varepsilon$ и $p \in P$. Тогда, как было показано Шеном [6], существует постоянная M, зависящая только от ε, и такая, что $|\omega_n(z)| / |\omega_n(t)| \leq M(n+2)$ для любых $z \in E$ и $t \in L_\varepsilon$. Но при фиксированном $z \in E$ функция

$$\varphi(t) = \ln(|\omega_n(z)| / |\omega_n(t)|) + \sum_{k=1}^{n} g(t, b_{nk})$$

гармонична в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ и для $t \in L_\varepsilon$ удовлетворяет неравенству $\varphi_n(t) \leq \ln M(n+2) + n\varepsilon$. Тогда это неравенство выполняется везде вне L_ε, т. е.

$$(|\omega_n(z)| / |\omega_n(t)|)^{1/n} \leq [M(n+2)]^{1/n} e^{\varepsilon} \cdot \exp[-n^{-1} \sum_{k=1}^{n} g(t, b_{nk})]$$

для любых $z \in E$ и t, принадлежащее тем компонентам дополнения L_ε, которые не пересекаются с E. Отсюда следует, что

$$\sigma_n \leq \max_E |\omega_n(z)| / \min_F |\omega_n(z)|)^{1/n} \leq [M(n+2)]^{1/n} \cdot e^{\varepsilon - \mu_n}. \tag{5}$$

Так как ε произвольно, то из (5) при $n \to \infty$ получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sigma_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} (\max_E |\omega_n(z)| / \min_F |\omega_n(z)|)^{1/n} \leq \exp(-\underline{\lim_{n\to\infty}} \mu_n);$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \sigma_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} (\max_E |\omega_n(z)| / \min_F |\omega_n(z)|)^{1/n} \leq \exp(-\overline{\lim_{n\to\infty}} \mu_n). \tag{6}$$

Из неравенств (4) и (6) вместе с равенством $\sigma = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sigma_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} \sigma_n$ вытекает, что последовательности $\{\mu_n\}$ и $\{(\max_E |\omega_n(z)| / \min_F |\omega_n(z)|)^{1/n}\}$ сходится и

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} (\max_E |\omega_n(z)| / \min_F |\omega_n(z)|)^{1/n} = \exp(-\lim \mu_n). \tag{7}$$

Таким образом, лемма доказана, а вместе с тем доказано и следующее

Следствие 1. *Если $b_{n_1}, b_{n_2}, \ldots, b_{nn}, b_{nk} \in P$ — полюсы минимизирующей последовательности $S_n(z)$ для σ_n, то последовательность*

$$\mu_n = \min_F [n^{-1} \sum_{k=1}^{n} g(z, b_{nk})]$$

$(n = 1, 2, 3)$ *сходится и* $\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n = -\ln \sigma$.

Если в соотношениях (4) и (6) вместо F пишем F_1, то получим следующее

Следствие 2. *Пусть $F_1 \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ — произвольный компакт и $\{\omega_n(z)\}$ — последовательность, построенная выше. Тогда*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\max_E|\omega_n(z)|/\min_{F_1}|\omega_n(z)|)^{1/n}=\exp(-\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(F_1)),$$

где $\mu_n(F_1)=\min_{F_1}[n^{-1}\sum_{k=1}^{n}g(z, b_{n_k})]$.

Лемма 3. *Пусть* $\{\beta_{nk}\}$, $n=1, 2, \ldots, k=1, 2, \ldots, n$, *таблица точек, принадлежащих* P. *Положим*

$$\lambda_n=\min_F[n^{-1}\sum_{k=1}^{n}g(z, \beta_{nk})]$$

и пусть $\lambda=\underline{\lim_{n\to\infty}}\lambda_n$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *найдется* $\delta>0$, *такое, что*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\min_{F_\delta}[n^{-1}\sum_{k=1}^{n}g(z, \beta_{nk})]\geq\lambda-\varepsilon,$$

где F_δ — *множество точек, расстояние которых до* F *не превышает* δ.

Доказательство. Положим $\theta_n(z)=n^{-1}\sum g(z, b_{nk})$. Если $\varepsilon>0$, то по определению числа λ найдется число N, такое, что для $n>N$ имеет место неравенство $\lambda_n\geq\lambda-\varepsilon$. Но тогда для любого $z\in F$ имеем $\theta_n(z)\geq\lambda-\varepsilon$. Функция $\theta_n(z)$ супергармонична в $\mathbb{C}\setminus E$; в частности, она супергармонична в $G=D\setminus E$. Тогда, так как $\min_{\partial E}\theta_n(z)=0$, $\min_{\partial F}\theta_n(z)=\lambda_n$, если $u(z)$ — гармоническая мера ∂F относительно G, то будет выполняться неравенство $\theta_n(z)\geq\lambda_n\cdot u(z)+0\cdot(1-u(z))$, т. е. для $n>N$ и $z\in\overline{G}$ имеем $\theta_n(z)\geq\lambda_n u(z)$. Пусть положительное число δ настолько мало, что $\partial F_\delta\cap G\subset\{z:1-\varepsilon<u(z)<1\}$. Тогда $\theta_n(z)\geq(\lambda-\varepsilon)(1-\varepsilon)$ для $n>N$ и $z\in\partial F_\delta\cap G$. Но так как $\theta_n(z)$ — супергармонична и F_δ содержится в той компоненте дополнения множества $\partial F_\delta\cap G$, которая содержит F, то последнее неравенство имеет место на F_δ. Тем самым $\min_{F_\delta}\theta_n(z)\geq(\lambda-\varepsilon)(1-\varepsilon)$, $n>N$. Но это означает, что $\underline{\lim_{n\to\infty}}\min_{F_\delta}\theta_n(z)\geq(\lambda-\varepsilon)(1-\varepsilon)$, что и требовалось доказать.

Изложенные выше леммы дают возможность установить следующую теорему, являющуюся основным результатом настоящей статьи.

Теорема. *Имеет место следующая оценка*:

$$\sup_{f\in A(D)}\overline{\lim_{n\to\infty}}[R_n(f, P)]^{1/n}\leq\sigma.$$

Доказательство. Пусть $\{a_{nk}\}$ и $\{b_{nk}\}$ — построенные в лемме 2 таблицы и $\omega_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-a_{nk})/(z-b_{nk})$. Тогда по лемме 3 и следствию 2 леммы 2 имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\max_E|\omega_n(z)|/\min_{F_\delta}|\omega_n(z)|)^{1/n}$$

$$= \exp\{-\overline{\lim_{n\to\infty}} \min_{F_\delta} [n^{-1} \sum_{k=1}^{n} g(z, b_{nk})]\} = e^{-\mu+\varepsilon},$$

где $\delta=\delta(\varepsilon)$ и F_δ определены в лемме 3, а μ — в следствии 1 леммы 2. Следовательно, для любого $n>N(\varepsilon)$ будет иметь место неравенство

$$\max_E |\omega_n(z)| / \min_{F_\delta} |\omega_n(z)| \leq \exp[n(2\varepsilon-\mu)]. \tag{8}$$

Без ограничения общности можем предполагать, что ∂F_δ состоит из конечного числа гладких кривых Жордана. Пусть $f\in A(D)$ и $r_n(z)$ — рациональная функция с полюсами в $\{b_{nk}\}$, $(1\leq k\leq n-1)$, интерполирующая $f(z)$ в точках $\{a_{nk}\}$ $(1\leq k\leq n)$. Тогда для $z\in E$ имеем

$$f(z)-r_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F_\delta} \frac{f(t)}{t-z}\cdot\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)}\cdot\frac{z-b_{nn}}{t-b_{nn}}\,dt,$$

откуда, при $n>N(\varepsilon)$, на основании (8) получаем $\|f-r_n\|_E\leq M\cdot e^{n(-\mu+2\varepsilon)}$, где M — постоянная, не зависящая от n. Из этого неравенства следует

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}[R_n(f,P)]^{1/n}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\|f-r_n\|_E^{1/n}\leq e^{-\mu+2\varepsilon}. \tag{9}$$

Но так как $\varepsilon>0$ произвольно и $\sigma=e^{-\mu}$ (следствие 1 леммы 2), из (9) вытекает утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Th. Bagby. On interpolation by rational functions. *Duke Math. J.*, **36**, 1969, 95—103.
2. А. А. Гончар. О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями. *Мат. сб.*, **78**, 1969, № 4, 640—654.
3. А. Л. Левин, В. М. Тихомиров. Об одной задаче Ерохина. *Успехи мат. наук*, **23**, 1968, № 1, 119—132.
4. H. Widom. Rational approximation and *n*-dimentional diameter. *J. Appr. theory*, **5**, 1972, 343—361.
5. Дж. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. Москва, 1961.
6. Y. Shen. On interpolation and approximation by rational functions with preassigned poles. *J. Chinese Math. soc.*, **1**, 1936, 154—173.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

1000 София П. Я. 373

Поступила 10. 7. 1974