Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

РЕДУКТИВНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ КВАЗИОТРАЖЕНИЯМИ

Т. Ю. СЫСОЕВА

Линейное преобразование r конечномерного векторного пространства V будем называть квазиотражением, если ранг преобразования $r-e$, где e — тождественное преобразование пространства V, равен 1. В этой работе находятся все редуктивные алгебраические линейные группы над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, порожденные квазиотражениями.

Эти группы следующие:

1) конечные группы, найденные в работе Шепарда и Тодда [4];

2) группа $M(V)$ — всех мономиальных относительно некоторого базиса преобразований пространства V, т. е. таких линейных преобразований, матрицы которых в этом базисе имеют в каждом столбце и в каждой строке один ненулевой элемент;

3) группы $M_k(V)$, $k=1, 2, \ldots$, всех таких мономиальных относительно некоторого базиса преобразований, у матриц которых в этом базисе произведение всех ненулевых элементов равно корню степени k из 1;

4) $O(V)$ — группа преобразований, сохраняющих симметричную невырожденную билинейную форму;

5) $Sp(V)$ — группа преобразований, сохраняющих кососимметричную невырожденную билинейную форму;

6) $SL(V)_k=\{g\in GL(V):(\det g)^k=1\}$, $k=1, 2, \ldots$;

7) $GL(V)$ — полная линейная группа;

8) всевозможные прямые произведения всех перечисленных групп.

В работе, кроме того, доказывается, что алгебраическое замыкание любой линейной группы, порожденной квазиотражениями, само порождается квазиотражениями.

1. О линейных группах, порожденных квазиотражениями. Пусть $G\subset GL(V)$ — группа, порожденная квазиотражениями. Существует цепь инвариантных относительно G подпространств $\{0\}\subset V_1\subset V_2\subset\cdots\subset V_m=V$ и такие естественные гомоморфизмы $\varphi_i: G\to GL(V_i/V_{i-1})$, что группы $\varphi_i(G)$ неприводимы, $i=1,\ldots, m$. Если r — квазиотражение, принадлежащее G, то ранг $\varphi_i(r)-e$ не больше 1. Значит, $\varphi_i(r)$ — квазиоотражение, или e. Следовательно, $\varphi_i(G)$ — группы, порожденные квазиотражениями в $GL(V_i/V_{i-1})$.

Поэтому естественно рассматривать в первую очередь неприводимые группы, порожденные квазиотражениями.

Если G — вполне приводима и $V=W_1\dotplus\cdots\dotplus W_m$ — прямая сумма неприводимых инвариантных относительно G подпространств, то ограничения $G|_{W_i}$ группы G на подпространства W_i — неприводимы и порождаются квазиотражениями, причем группа G является прямым произведением групп $G|_{W_1},\ldots, G|_{W_m}$.

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 1, 1975, с. 337—345.

Лемма 1. *Пусть G — неприводимая линейная группа, порожденная квазиотражениями. Тогда любая система импримитивности группы G состоит из одномерных подпространств.*

Доказательство. Пусть $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ — система импримитивности группы G, где J — множество индексов. Для всяких g из G и α из J существует такой индекс β из J, что $g(V_\alpha) = V_\beta$.

Так как группа G неприводима, то для всякого α существует такое квазиотражение r из G, что $rV_\alpha \neq V_\alpha$. Следовательно, $rV_\alpha \cap V_\alpha = \{0\}$. Пусть Γ — гиперплоскость, на которой r действует тождественно. Тогда $\Gamma \cap V_\alpha = \{0\}$. Отсюда $\dim V_\alpha = 1$ для всякого α. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — неприводимая группа, порожденная квазиотражениями, и N — нормальный делитель в ней. Тогда итеет место один из трех случаев:*

1. *Представление N в V неприводимо.*
2. *Оно разлагается в сумму эквивалентных одномерных, т. е. $N \subset \{\lambda e\}$.*
3. *Оно разлагается в сумму неэквивалентных одномерных.*

Доказательство. Пусть представление N в V приводимо. Значит, оно вполне приводимо. Пусть $\{W_\alpha : \alpha \in J\}$ — совокупность всех неприводимых инвариантных относительно N ненулевых подпространств.

Для всякого α существует квазиотражение r из G, такое, что $rW_\alpha \neq W_\alpha$. rW_α — неприводимое инвариантное относительно N ненулевое подпространство. Значит, $rW_\alpha \cap W_\alpha = \{0\}$ и $\Gamma \cap W_\alpha = \{0\}$, где Γ — гиперплоскость, на которой r действует тождественно. Значит, $\dim W_\alpha = 1$ для всякого α.

Разобьем $\{W_\alpha : \alpha \in J\}$ на классы, считая, что W_1 и W_2 принадлежат одному классу тогда и только тогда, хогда представления N на W_1 и W_2 эквивалентны. Пусть k — число классов. Построим k сумм $Q_1, \ldots, Q_k$ подпространств W_α, входящих в один класс. $V = Q_1 \dot{+} \cdots \dot{+} Q_k$. Если $k > 1$, то $\{Q_\alpha : \alpha = 1, \ldots, k\}$ — система импримитивности группы G [3, § 16, вторая теорема Клиффорда]. По лемме 1 все Q_α одномерны. Значит, представление N в V разлагается в сумму неэквивалентных одномерных. Если $k = 1$, то представление N в V разлагается в сумму эквивалентных одномерных. Лемма доказана.

Будем говорить, что разложение $V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$ в тензорное произведение пространств $V_1, \ldots, V_m$ инвариантно относительно линейного преобразования h из $GL(V)$, если имеются такие h_i из $GL(V_i)$, что $h = h_1 \otimes \cdots \otimes h_m$, т. е. $hv = h_1 v_1 \otimes \cdots \otimes h_m v_m$ для любого вектора $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \in V$.

Будем всегда предполагать, что $\dim V_i > 1$, $i = 1, \ldots, m$.

Лемма 3. *Если разложение $V = V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_m$ инвариантно относительно нетождественного линейного преобразования h пространства V и ранг преобразования $h - e$ не больше 2, то либо $m = 1$, либо $m = 2$, причем в последнем случае либо $\dim V_1 = 2$, либо $\dim V_2 = 2$. Если $m = 2$ и $\dim V_1$ или $\dim V_2$ больше двух, то в жордановом базисе h имеет один из следующих двух видов:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 1 & 1 & & & 0 & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 & \\ & \lambda & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. 1. Пусть $\dim V_1 \geq 3$. Положим $\widetilde{V}_2 = V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$. Разложение $V = V_1 \otimes \widetilde{V}_2$ инвариантно относительно h, т. е. $h = h_1 \otimes h_2$, где $h_1 \in GL(V_1)$, $h_2 \in GL(\widetilde{V}_2)$.

Пусть x_1, y_1, z_1 — линейно независимые векторы в пространстве V_1 и x_2 — произвольный ненулевой вектор из пространства $\widetilde{V}_2$. Рассмотрим в пространстве V векторы $x = x_1 \otimes x_2$, $y = y_1 \otimes x_2$ и $z = z_1 \otimes x_2$. Векторы $hx - x$, $hy - y$, $hz - z$ должны быть линейно зависимыми. Существуют такие α, β и γ, не все равные 0, что $\alpha(hx - x) + \beta(hy - y) + \gamma(hz - z) = 0$. Отсюда, $h_1(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1) \otimes h_2 x_2 = (\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1) \otimes x_2$. Значит, $h_2 x_2 = \lambda x_2$, $h_1(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1) = (\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1)/\lambda$ для некоторого числа λ. Но x_2 — произвольный вектор из пространства $\widetilde{V}_2$. Значит, любой вектор в пространстве $\widetilde{V}_2$ является собственным для h_2. Отсюда $h_2 = \lambda e$, и, так как h_1 и h_2 определены с точностью до умножения на взаимно обратные константы, то можно считать, что $h_2 = e$ и $h = h_1 \otimes e$. Отсюда ранг $h_1 - e$ не больше 2, причем если он равен 2, то $h = h_1$ и $\dim \widetilde{V}_2 = 1$, т. е. $m = 1$. Если ранг $h_1 - e$ равен 1, то $\dim \widetilde{V}_2 \leq 2$. Отсюда, $\widetilde{V}_2 = V_2$ и $m \leq 2$.

2. Пусть $\dim V_i \leq 2$, $i = 1, \ldots, m$, и $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$. Положим $\widetilde{V}_3 = V_3 \otimes \cdots \otimes V_m$. Тогда $V = V_1 \otimes V_2 \otimes \widetilde{V}_3$ и $h = h_1 \otimes h_2 \otimes h_3$, где

$$h_1 \in GL(V_1),\ h_2 \in GL(V_2),\ h_3 \in GL(\widetilde{V}_3).$$

Пусть x_1, y_1 — линейно независимые векторы в V_1, x_2, y_2 — линейно независимые векторы в V_2, x_3 — любой ненулевой вектор из пространства $\widetilde{V}_3$. Рассмотрим в пространстве V векторы $x = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$, $y = y_1 \otimes x_2 \otimes x_3$, $z = (\lambda x_1 + \mu y_1) \otimes y_2 \otimes x_3$. Векторы $hx - x$, $hy - y$ и $hz - z$ — линейно зависимы. Существуют такие α, β и γ, не все равные 0, что $\alpha(hx - x) + \beta(hy - y) + \gamma(hz - z) = 0$. Положим $\lambda x_1 + \mu y_1 = \alpha x_1 + \beta y_1$. Тогда

$$h_1(\alpha x_1 + \beta y_1) \otimes h_2(x_2 + \gamma y_2) \otimes h_3 x_3 = (\alpha x_1 + \beta y_1) \otimes (x_2 + \gamma y_2) \otimes x_3.$$

Отсюда $h_3 = e$, $h_2(x_2 + \gamma y_2) = x_2 + \gamma y_2$, $h_1(\alpha x_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta y_1$.

Если $\dim \widetilde{V}_3 \geq 2$, то из аналогичных рассуждений получим, что $h_2 = e$ и $h_1 = e$, откуда $h = e$. Значит, $m = 2$.

Следствие. *Пусть $G \subset GL(V)$ — группа, порожденная квазиотражениями и $V = V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_m$. Пусть $G_i \subset GL(V_i)$, $i = 1, \ldots, m$ — группы и $H = G_1 \otimes G_2 \otimes \cdots \otimes G_m$ — неприводимый нормальный делитель в группе G. Тогда либо $m = 1$, либо $m = 2$, причем в последнем случае либо $\dim V_1 = 2$, либо $\dim V_2 = 2$.*

Доказательство. Для всяких g из H и квазиотражения r из G элемент $h = rgr^{-1}g^{-1}$ принадлежит H. Значит, $h = h_1 \otimes \cdots \otimes h_m$, где $h_i \in G_i$.

h — произведение двух квазиотражений. Отсюда ранг $h-e$ не больше 2. Так как H неприводим, то существуют такие g и r, что $h \neq e$.

2. Замыкания линейных групп, порожденных квазиотражениями. Рассмотрим в топологии Зарисского в $GL(V)$ замыкания групп, порожденных квазиотражениями. Это алгебраические группы, которыми мы и будем заниматься.

Пусть G_r — группа, порожденная квазиотражением r бесконечного периода, $\overline{G}_r$ — замыкание в топологии Зарисского группы G_r. Тогда группа $\overline{G}_r$ связная.

Теорема 1. *Замыкания в топологии Зарисского в $GL(V)$ групп, порожденных квазиотражениями, сами порождаются квазиотражениями.*

Доказательство. Пусть G — замыкание в топологии Зарисского в $GL(V)$ группы U, порожденной квазиотражениями, и пусть U порождается всеми квазиотражениями, содержащимися в G. Множество

$$M_1=\{r\in G: rg\,(r-e)\leq 1\}=G\cap\{r\in GL(V): rg\,(r-e)\leq 1\}$$

замкнуто по Зарисскому в $GL(V)$. Множество $M_k=\{r_1\ldots r_k: r_i\in M_1\}$ густо в своем замыкании, как образ прямого произведения $\underbrace{M_1\times\cdots\times M_1}_{k}$ при рациональном отображении.

Пусть $M_1=\bigcup_{i=1}^{n_1}M_1^i,\ldots,M_k=\bigcup_{i=1}^{n_k}M_k^i,\ldots$ — разложение множеств $M_1,\ldots,M_k,\ldots$ на неприводимые в топологии Зарисского компоненты. Заметим, что $gM_ig^{-1}=M_i$ для любого множества M_i и любого элемента g из G. Если $M_i=M_i^1\cup\cdots\cup M_i^{n_i}=gM_i^1g^{-1}\cup\cdots\cup gM_i^{n_i}g^{-1}$ — два разложения M_i на неприводимые компоненты, в силу единственности такого разложения имеем, что для всяких M_i^j и g из G найдется такое k, что $gM_i^jg^{-1}=M_i^k$. Таким образом, для каждого i имеем гомоморфизм $\varphi_i: G\to S_{n_i}$ в группу подстановок множества из n_i элементов. $\mathrm{Ker}\,\varphi_i$ — алгебраический нормальный делитель конечного индекса в G. Значит, $\mathrm{Ker}\,\varphi_i$ для всякого i содержит G_e — связную компоненту единицы группы G.

Рассмотрим множество $X=\{M_i^j: e\in M_i^j\}$. Положим $H=\bigcup_{M_i^j\in X}M_i^j$. Тогда H — нормальный делитель в G и лежит в U. Берем любой элемент $M_{i_1}^{j_1}$ из X. Если $H\neq M_{i_1}^{j_1}$, то существует такой элемент M_x^y в X, что $M_x^y\not\subset M_{i_1}^{j_1}$. Тогда $M_{i_1}^{j_1}\cdot M_x^y\subset M_{i_2}^{j_2}\in X$ для некоторых i_2 и j_2, т. е. существует такой элемент $M_{i_2}^{j_2}$ в X, что $M_{i_1}^{j_1}\subset M_{i_2}^{j_2}\neq M_{i_1}^{j_1}$. Если $H\neq M_{i_2}^{j_2}$, то существует такой элемент $M_{i_3}^{j_3}$ в X, что $M_{i_2}^{j_2}\subset M_{i_3}^{j_3}\neq M_{i_2}^{j_2}\ldots$

Имеем цепь из неприводимых множеств: $M_{i_1}^{j_1}\subset M_{i_2}^{j_2}\subset\cdots$ Рассмотрим цепь из замыканий по Зарисскому: $\overline{M}_{i_1}^{j_1}\subset\overline{M}_{i_2}^{j_2}\subset\cdots$ Она стабилизируется. Значит, существует такое число k, что любой элемент M_i^j из X лежит в $\overline{M}_{i_k}^{j_k}$. Тогда $M_{i_k}^{j_k}\subset\bigcup_{M_i^j\in X}M_i^j=H\subset\overline{M}_{i_k}^{j_k}\subset H$. Отсюда $H=\overline{M}_{i_k}^{j_k}$ и H густо в своем замыкании. Значит, H — связная алгебраическая группа [2, § 4, теорема 3].

Любой элемент u из U принадлежит множеству M_i^j для некоторых i и j. Для всякого элемента g из G_e элемент g и $g^{-1}u^{-1} \in M_i^j \cdot u^{-1} \subset H$. Отсюда $[G_e, G] \subset H$.

Рассмотрим фактор-группу $F = G/H$. Ее связная компонента единицы F_e лежит в ее центре. Пусть $M_1^1, \ldots, M_1^m$ не лежат в H, а $M_1^{m+1}, \ldots, M_1^n$ лежат в H. Из каждого M_1^i, $i = 1, \ldots, m$, выберем по одному квазиотражению r_i. Тогда $e \in r_i^{-1} \cdot M_1^i \subset H$. Для всякого элемента u из U существует такое конечное произведение x, составленное из элементов $r_1^{-1}, \ldots, r_m^{-1}$, что $xu \in H$. Отсюда элементы $r_1H, \ldots, r_mH$ порождают группу, всюду плотную в F.

Коммутант $[F, F]$ группы F конечен. Рассмотрим канонический гомоморфизм $\varphi : F \to F/[F, F]$. Элементы $\varphi(r_1H), \ldots, \varphi(r_mH)$ порождают группу, всюду плотную в $F/[F, F]$. Квазиотражения $r_1, \ldots, r_m$ имеют конечный период, так как не принадлежат H. Значит, $\varphi(r_1H), \ldots, \varphi(r_mH)$ тоже имеют конечный период. Кроме того, $F/[F, F]$ коммутативна. Значит, $F/[F, F]$ конечна. Отсюда $F = G/H$ — конечна и, значит, H имеет в G конечный индекс. Следовательно, $H = G_e \subset U$.

Так как любая компонента связности группы G содержит элемент из U, то $G = U$.

3. Доказательство основного результата. В дальнейшем будем предполагать, что G — неприводимая бесконечная алгебраическая группа, порожденная квазиотражениями.

1. Если G — полупроста, то коммутант $[G_e G_e]$ равен G_e. Значит, $\det G_e = \{1\}$ и $\det G$ — конечная группа. Следовательно, все квазиотражения в группе G имеют конечное число собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, причем $\lambda_j = e^{i\varphi_j}$ и φ_j соизмеримы с π, $j = 1, \ldots, n$.

2. Если алгебраическая группа $\det G$ бесконечна, то она совпадает с группой $\mathbb{C}^*$ всех комплексных чисел по умножению. В этом случае существует элемент g в группе G, такой, что $\det g$ не является корнем из 1. Следовательно, существует квазиотражение в G с собственным значением, не являющимся корнем из 1. Значит, существует кривая, в некотором базисе имеющая вид $\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ и лежащая в G.

3. G_e — нормальный делитель в G. По лемме 2 из п. 1 либо представление G_e в V неприводимо, либо оно разлагается в сумму неэквивалентных одномерных представлений, либо оно разлагается в сумму эквивалентных одномерных. В последнем случае $G_e = \{\lambda e\}$ и $\det G = \mathbb{C}^*$. Следовательно, по п. 2 настоящего параграфа в группе G_e существует кривая, в некотором базисе имеющая вид $\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Значит, $G_e \neq \{\lambda e\}$, и для G_e остаются две возможности.

Лемма 4. *В группе G_e существует кривая, в некотором базисе* *имеющая вид* $\begin{pmatrix} \lambda & & & & 0 \\ & 1/\lambda & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что алгебра Ли $\mathcal{G}$ группы G содержит полупростой элемент ранга 2 со следом 0.

1. Если в G существует унипотентное квазиотражение, то $\mathcal{G}$ содержит нильпотентный элемент X ранга 1. По теореме Морозова X лежит в некоторой простой трехмерной подалгебре. В $\mathcal{G}$ существует такой нильпотентный элемент Y, что коммутатор $[X, Y]$ полупростой и не равен 0. Нетрудно видеть, что $rg[X, Y]=2$ и, следовательно, $[X, Y]$ — искомый полупростой элемент.

2. Пусть все квазиотражения в G — полупростые и $\mathcal{G}$ не содержит нильпотентных элементов ранга 1. Так как $\mathcal{G}\neq\{\lambda e\}$, то существуют такие g из $\mathcal{G}$ и квазиотражение r из G, что $rg\neq gr$. Рассмотрим элемент $a=rgr^{-1}-g\in\mathcal{G}$. В некотором базисе $r=\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. В том же базисе

$$a=\left(\begin{array}{c|c} 0 & (\lambda-1)\,g_{12}\ \ldots\ (\lambda-1)g_{1n} \\ \hline (1/\lambda-1)\ g_{21} & \\ \vdots & 0 \\ (1/\lambda-1)\ g_{n1} & \end{array}\right).$$

Ранг a не превосходит 2, след a равен 0, $a\neq 0$.

Покажем, что существуют такие r и g, что a — полупростой ненулевой элемент. Если $\mathcal{G}$ приводима, то она состоит только из полупростых элементов. Если $\mathcal{G}$ неприводима, то для любого квазиотражения r из $\mathcal{G}$ существует такой элемент g в $\mathcal{G}$, что $a=rgr^{-1}-g\neq 0$. Положим

$$b=r^2gr^{-2}-g=\left(\begin{array}{c|c} 0 & (\lambda^2-1)\,g_{12}\ \ldots\ (\lambda^2-1)g_{1n} \\ \hline (1/\lambda^2-1)\,g_{21} & \\ \vdots & 0 \\ (1/\lambda^2-1)\,g_{n1} & \end{array}\right).$$

Нильпотентный элемент $b-(\lambda+1)a$ имеет ранг не больше 1, значит $b-(\lambda+1)a=0$, откуда $\lambda=-1$. Значит, все квазиотражения в группе G имеют период 2.

Рассмотрим в $\mathcal{G}$ инволютивный оператор Adr и подпространство $\mathcal{F}=\{rgr^{-1}-g : g\in\mathcal{G}\}=\{g\in\mathcal{G} : (Adr)g=-g\}$. Из теории симметрических операторов известно, что в пространстве $\mathcal{F}$ имеются ненулевые полупростые элементы, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть G — неприводимая бесконечная алгебраическая группа, порожденная квазиотражениями, и пусть представление G_e в V разлагается в сумму неэквивалентных одномерных. Тогда либо $G=M(V)$, либо $G=M_k(V)$, где k может быть любым натуральным числом.*

Доказательство. Пусть $\{W_\alpha : \alpha \in J\}$ — совокупность неприводимых инвариантных отнотительно G_e подпространств. Рассмотрим квазиотражение r, принадлежащее G, и сумму W всех подпространств W_α, не инвариантных относительно r.

Пусть $\dim W = m > 0$. Значит, $r \notin G_e$ и, не равное 1, собственное значение квазиотражения r является корнем некоторой степени из 1. Подпространство W инвариантно относительно r. Ограничение $r|_W$ — квазиотражение, и $Tr\, r|_W = 0 = (m-1) + e^{i\varphi}$. Отсюда $m = 2$ и $e^{i\varphi} = -1$. Таким образом, любое квазиотражение, принадлежащее G, действует на множестве J или как транспозиция, или тождественно.

Так как группа G неприводима, то она действует на множестве J транзитивно. Значит, G действует на J как полная группа подстановок множества J.

1. $\det G$ — бесконечное множество. Тогда в группе G_e существует кривая, в некотором базисе имеющая вид $\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Значит, в некотором базисе $G_e = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C} \right\}$ и $G = M(V)$.

2. $\det G_e = \{1\}$. По лемме 4 в группе G_e существует кривая, в некотором базисе имеющая вид $\begin{pmatrix} \lambda & & & & 0 \\ & 1/\lambda & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$. Значит, в некотором базисе

$$G_e = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1} & \\ 0 & & & 1/\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1} \end{pmatrix} : \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Рассмотрим наименьшее общее кратное порядков всех квазиотражений, принадлежащих централизатору $Z_G(G_e)$ группы G_e в группе G. Пусть оно равно k. В $Z_G(G_e)$ найдется квазиотражение r_0 порядка k.

Рассмотрим группу G_{r_0}, порожденную r_0. Нетрудно видеть, что если $g \in Z_G(G_e)$, то в G_{r_0} найдется такое квазиотражение r, что $\det g = \det r$, и если $g \in Z_{GL(V)}(G_e)$ и $(\det g)^k = 1$, то $g \in Z_G(G_e)$. Следовательно, $G = M_k(V)$.

Лемма 5. *Если G_e полупростая, то либо она проста, либо равна $SO(4)$.*

Доказательство. $G_e = G_1 \otimes \cdots \otimes G_m$ — тензорное произведение своих простых нормальных делителей $G_1, \ldots, G_m$. Из теоремы 2 ясно, что G_e неприводима. По лемме 4 G_e существует кривая, в некотором базисе имеющая вид $\begin{pmatrix} \lambda & & & & 0 \\ & 1/\lambda & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$. Отсюда, по лемме 3 из п. 1 и ее следствию получаем, что либо $m = 1$, т. е. G_e — простая группа, либо $m = 2$ и $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$. В этом случае для групп G_1 и G_2 имеется единственная возможность: $G_1 = G_2 = SL(2)$. Следовательно, $G_e = SL(2) \otimes SL(2) = SO(4)$.

Лемма 6. *Если $G_e = SO(V)$, то $G = O(V)$.*

Доказательство. Перейдем к такаму базису, в котором любой элемент A из $SO(V)$ удовлетворяет условиям: $AA^* = A^*A = e$. В этом базисе любое преобразование из алгебры Ли $\mathcal{G}$ группы G записывается кососимметрической матрицей. Нетрудно видеть, что ни одно линейное преобразование ранга 1 ни в каком базисе не записывается кососимметрической матрицей, и, значит, не принадлежит $\mathcal{G}$. Отсюда следует, что G не содержит ни одного унипотентного квазиотражения.

$r^{-1}Ar \in G_e$ для любого квазиотражения r из G и элемента A из G_e. Значит, $r^{-1}Arr^*A^*(r^{-1})^* = e$, откуда rr^* коммутирует со всеми элементами группы G_e. Значит, rr^* — скалярная, r коммутирует с r^* и rr^* — квазиотражение с собственным значением λ^2, где λ — собственное значение для r. Отсюда $\lambda^2 = 1$ и $rr^* = e$. Следовательно, $r \in O(V)$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Если $G_e = Sp(V)$ и $\dim V > 2$, то $G = G_e = Sp(V)$.*

Доказательство. В условиях леммы все автоморфизмы группы G_e — внутренние автоморфизмы. Значит G — прямое произведение группы G_e и конечной группы $\{\lambda_1 e, \ldots, \lambda_n e\}$ скалярных матриц.

Пусть r — полупростое квазиотражение в группе G. Тогда $r = g\lambda_i$, где g принадлежит $Sp(V)$, $1 \leq i \leq n$. В некотором базисе
$$g = \begin{pmatrix} \det r \cdot \lambda_i^{-1} & & & 0 \\ & \lambda_i^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_i^{-1} \end{pmatrix}.$$
Но элемент с такими собственными значениями не может принадлежать группе $Sp(V)$, если $\dim V > 2$. Значит, G порождается унипотентными квазиотражениями и, следовательно, $G = G_e = Sp(V)$.

Заметим, что группа $Sp(V)$ содержит унипотентные квазиотражения и, значит, порождается ими.

Лемма 8. *Если $G_e = SL(V)$, то $G = SI(V)_k$, причем k может быть любым натуральным числом.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что группы $SL(V)_k$ порождаются квазиотражениями. Никаких других алгебраических групп со связной компонентой единицы, равной $SL(V)$, не существует.

Теорема 3. *Пусть G — неприводимая бесконечная алгебраическая группа, порожденная квазиотражениями. Если G_e — полупростая, то либо $G = O(V)$, либо $G = Sp(V)$, либо $G = SL(V)_k$, $k = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. По леммам 5 и 6 либо G — простая, либо $G = O(4)$.

В алгебре Ли максимального тора группы G содержится подалгебра, в некотором базисе имеющая вид
$$\left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \\ 0 & -\lambda & \\ & & 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C}\right\}.$$
Значит, все веса, кроме двух, принадлежат некоторой гиперплоскости в сопряженном пространстве. Значит, существует корень, не принадлежащий этой гиперплоскости. Так как любой длинный корень является линейной комбинацией коротких, то найдется короткий корень α, не принадлежащий гиперплоскости. Этому корню отвечает простая трехмерная подалгебра $\mathcal{G}_\alpha$ в алгебре Ли группы G.

Под действием $\mathcal{G}_\alpha$ все пространство раскладывается в прямую сумму неприводимых подпространств. В каждом неприводимом подпространстве существует не более одного веса, принадлежащего нашей гиперплоскости, а ей принадлежит $n-2$ веса. Значит, число k неприводимых подпространств не меньше, чем $n-2$.

Для простых групп имеется оценка:

(1) $kr \leq nr-n+1$, где r — ранг G, а n — размерность представления (рассуждение и формула (1) взяты из [1]).

(2) $(n-2)r \leq nr-n+1$, откуда $n \leq 2r+1$.

Если воспользоваться таблицей представлений малых размерностей простых групп и формулой (2), то в результате несложных вычислений получим, что либо $G_e = SO(2r+1, \mathbb{C})$, либо $G_e = SO(2r, \mathbb{C})$, либо $G_e = SL \times (r+1, \mathbb{C})$, либо $G_e = Sp(2r, \mathbb{C})$. Искомое утверждение непосредственно вытекает из лемм 6, 7 и 8.

Теорема 4. *Если G — неприводимая бесконечная алгебраическая группа, порожденная квазиотражениями, ее связная компонента G_e — неприводимая и не полупростая, то $G = GL(V)$.*

Доказательство. G_e имеет бесконечный центр, который может состоять лишь из скалярных матриц. Отсюда $\det G_e \neq \{1\}$. Значит, в G существует кривая, в некотором базисе имеющая вид $\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, все веса, кроме одного, лежат в некоторой гиперплоскости в сопряженном пространстве.

Рассмотрим G_1 — полупростую компоненту группы G_e. Если G_1 не проста, то найдется инвариантное относительно G_e разложение $V = V_1 \otimes \ldots \otimes V_m$ пространства V, причем по лемме 3 и ее следствию из п. 1 получаем, что $m=2$ и $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$. Отсюда следует, что G_e — прямое произведение группы $SO(4)$ и группы $\{\lambda e : \lambda \in \mathbb{C}\}/\{e, -e\}$. Таким образом, $G = G_e$, или $G = O(4) \times \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{C}\}/\{e, -e\}$. Но эти группы нельзя породить квазиотражениями.

Значит, G_1 — проста и $k \geq n-1$. Применяя формулу (1), получаем, что $n \leq r_1+1$, где r_1 — ранг G_1. Отсюда $G_1 = SL(n, \mathbb{C})$. Следовательно, группа G имеет ранг n и равна $GL(n, \mathbb{C})$. Теорема доказана.

Из теорем 1—4 следует окончательный результат, сформулированный в введении.

В заключение мне хотелось бы выразить искреннюю благодарность Э. Б. Винбергу, под руководством которого выполнена эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. М. Андреев, В. Л. Попов. О стационарных подгруппах точек общего положения в пространстве представления полупростой группы Ли. *Функц. анализ и его прилож.* 5, 1971. № 4. 1—8.
2. Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик. Семинар по алгебраическим группам и группам Ли. Москва. 1969.
3. Д. А. Супруненко. Группы матриц. Москва. 1972.
4. G. C. Shephard, J. A. Todd. Finite unitary reflection groups. *Can. J. Math.*, 6. 1954. № 2.

Московский университет.
Мех.-мат. факультет
Москва 117234 СССР

Поступила 10. 7. 1974