Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ТРАНЗИТИВНЫЕ-ПО-РАССТОЯНИЮ ГРАФЫ

НИКОЛА Й. МАРТИНОВ

Рассматривается группа автоморфизмов G^{Γ} конечного, связного, транзитивного-по-расстоянию графа Γ произвольной степени. Через ω обозначен диаметр Γ. Пусть M — произвольная вершина, а Q — совокупность из M и всех вершин, расстояние которых до M равно ω. Q называем экстремальным ω-классом, если расстояние между любыми двумя вершинами из Q равно ω. Если Γ содержит экстремальные ω-классы, то Γ называется ω-графом.

В настоящей статье доказывается, что G^{Γ} импримитивна тогда и только тогда, когда выполнено по крайней мере одно из условий: а) Γ — бихроматический граф; Γ — ω-граф. В этом случае областями импримитивности являются два одноцветных класса (для бихроматического графа) и экстремальные ω-класы (для ω-графа).

В теории графов употребляются разные терминологии. Здесь будем придерживаться терминологии [1], конечно, за исключением тех случаев, когда даем прямые определения.

Будем рассматривать один класс сильно симметрических графов, точнее т. н. транзитивных-по-расстоянию графов. Граф называется транзитивным-по-расстоянию (distance-transitive), если для любых четырех его вершин A, A_1, B, B_1, расстояния между которыми связаны условием $d(AB)=d(A_1B_1)$, существует автоморфизм, приводящий A в A_1 и B в B_1. Очевидно, что транзитивный-по-расстоянию граф является регулярным, транзитивным, но в общем случае не является дважды транзитивным. Это значит, что не исключена возможность для его группы автоморфизмов быть импримитивной. Если эта группа примитивна, граф называется автоморфическим.

Каждый регулярный граф степени 2 (простой цикл) — транзитивный-по-расстоянию граф. Он автоморфический тогда и только тогда, когда его обхват (длина цикла) — простое число. В [2] указаны все транзитивные-по-расстоянию графы степени 3; их число — двенадцать и в точности три из них автоморфические.

В настоящей статье рассматриваются транзитивные-по-расстоянию графы произвольной степени и определяются, когда они являются автоморфическими.

Пусть Γ — конечный, неориентированный, связной и транзитивный-по-расстояиию граф степени $\deg \Gamma \geq 3$. Обозначим через P совокупность вершин, G^{Γ} — группа автоморфизмов, ω — диаметр Γ. Для любого натурального числа $n \leq \omega$ вводим в P соотношение n-сравнимости. Будем говорить, что вершина A — n-сравнима с вершиной B тогда и только тогда, когда существует последовательность $X_1 X_2, \ldots, X_k$ вершин со свойством

$$d(AX_1)=d(X_1X_2)=\cdots=d(X_kB)=n.$$

Очевидно, что соотношение n-сравнимости — реляция эквивалентности. Классы, на которые разбивается P этим соотношением, будем называть n-классами.

Пусть $O \in P$ — фиксированная вершина. Обозначим через P_n тот n-класс, который содержит O. Очевидно $P_1 = P$. Обозначим также через G_0 стабилизатор O; G_0 является истинной подгруппой G^Γ.

Как известно (например, из [3]), определение областей импримитивности сводится к нахождению истинных подгрупп G^Γ, для которых G_0 — истинная подгруппа. Каждая группа G, для которой выполнено

$$G_0 \subset G \subset G^\Gamma, \tag{1}$$

разбивает P на области импримитивности; эта группа интранзитивна, и ее орбита, содержащая O, является областью импримитивности. Будем означать через P_G орбиту, содержащую O. Наоборот, каждая область импримитивности, содержащая O, является орбитой для подходящей группы G, для которой выполнено (1).

Лемма 1. *Пусть для группы G выполнено* (1), $M, N \in P_G$, $X \in P$ *и* $d(MN) = d(XM)$. *Тогда* $X \in P_G$.

Доказательство. Так как Γ — транзитивный-по-расстоянию граф, существует автоморфизм φ, так что $(M)\varphi = M$ и $(N)\varphi = X$. Из $M, N \in P_G$ следует, что существуют $\alpha, \beta \in G$, для которых $(O)\alpha = M$ и $(O)\beta = N$. Тогда $\varphi_1 = \alpha\varphi\alpha^{-1} \in G_0$ и $\varphi = \alpha^{-1}\varphi_1\alpha \in G$. Следовательно, $\beta\varphi \in G$ и $(O)\beta\varphi = X \in P_G$.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha \in G^\Gamma$, $\alpha \notin G_0$, $(O)\alpha = A$, $d(OA) = n$ *и* $G = \{G_0, \alpha\}$. *Тогда* $P_G = P_n$.

Доказательство. 1. Пусть $M \in P_n$. Тогда существуют вершины $X_1, X_2, \ldots, X_k$, так что $d(OA) = d(OX_1) = d(X_1X_2) = \cdots = d(X_kM)$. Отсюда в соответствии с леммой 1 находим последовательно, что $X_1, X_2, \ldots, X_k$ и M принадлежат P_G.

Прежде чем доказать, что каждая точка P_G принадлежит P_n, покажем, что как α, так и каждый элемент G_0 сохраняет P_n.

1a. Пусть $(M)\alpha = M'$ и $(X_i)\alpha = Y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Тогда $d(Y_{i-1}Y_i) = d(X_{i-1}X_i) = n$ $(i = 2, 3, \ldots, k)$. Следовательно, $d(OA) = d(A_1Y_1) = d(Y_1Y_2) = \cdots = d(Y_kM')$, т. е. $M' \in P_n$.

1б. Пусть $\varphi \in G_0$, $(M)\varphi = M''$ и $(X_i)\varphi = Z_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Тогда $d(Z_{i-1}Z_i) = d(X_{i-1}X_i) = n$ $(i = 2, 3, \ldots, k)$; также $d(OZ_1) = d(Z_kM'') = n$. Следовательно, $d(OZ_1) = d(Z_1Z_2) = \cdots = d(Z_kM'') = n$, т. е. $M'' \in P_n$.

2. Пусть $N \in P_G$. Тогда существует автоморфизм $\psi \in G$, $(O)\psi = N$. Здесь ψ является произведением множителей $\psi_i = \alpha\varphi_i$, где $\varphi_i \in G_0$. В соответствии с 1a и 1б каждый из этих множителей сохраняет P_n. Но $O \in P_n$. Следовательно, $N \in P_n$. Этим доказательство леммы закончено.

Лемма 3. *Пусть для группы G выполнено условие* (1), $M, N \in P_G$ *и* $d(MN) = n$. *Тогда* $P_n \subseteq P_G$.

Доказательство. Из $M \in P_G$ следует, что существует автоморфизм $\varphi \in G$, $(M)\varphi = O$. Из $N \in P_G$ и $\varphi \in G$ получаем $(N)\varphi \in P_G$. Следовательно, существует автоморфизм $\alpha \in G$, который приводит O в $A = (N)\varphi$. Пусть $H = \{G_0, \alpha\}$. Поскольку $d(OA) = d(MN) = n$, то в соответствии с леммой 2 $P_H = P_n$. Но $\alpha \in G$ и $G_0 \subset G$, т. е. $H \subseteq G$. Получается, что $P_n = P_H \subseteq P_G$.

Лемма 4. *При условии леммы 3, если $n = 2$, то $P_G = P_2$.*

Доказательство. По лемме 3, при $n = 2$ будем иметь $P_2 \subseteq P_G$. Допустим, что $P_G \neq P_2$, т. е., что $P_2 \subset P_G$. Тогда существует точка $B \in P_G$ и $B \notin P_2$. Для этой точки расстояние $d(OB)$ — нечетное число. Обозначим через C предпоследнюю точку по простой цепи OB, длина которой определяет расстояние $d(OB)$. Тогда $d(BC)=1$, а $d(OC)$ — четное число, что означает, что $C \in P_2 \subset P_G$. Из $B, C \in P_G$ и $d(BC)=1$ по лемме 3 получаем $P=P_1 \subseteq P_G$. Но по условию (1) $P_G \subset P$. Это противоречие исключает $P_G \neq P_2$, что мы допустили.

Рис. 1

Лемма 5. *Пусть для группы G выполнено условие* (1). *Если в P_G имеется пара точек на расстоянии $n<\omega$, то $P_G=P_2$.*

Доказательство. Если $n=1$, по лемме 3 будем иметь $P=P_1 \subseteq P_G$, но по условию $P_G \subset P$. Таким образом получаем $n \neq 1$. При $n=2$ лемма сводится к лемме 3. Рассматриваем случай, когда $n \geq 3$. Пусть $A, B \in P_G$ и $d(AB)=n$. Выбираем один из маршрутов длиной n, связывающий A и B, и на нем точку, следующую A, обозначим через M, а точку, предшествующую B — через M_1 (рис. 1). Поскольку $n<\omega$, существует вершина C, для которой $d(AC)=n+1$ и $d(BC)=1$. (Если $A_1, C_1 \in P$, $d(A_1C_1)=n+1$ и B_1 предшествует точку C_1 на (A_1-C_1)-маршруте длиной $n+1$, то можно рассматривать C как образ C_1 при автоморфизме, приводящем A_1 и B_1 соответственно в A и B). Так как $\deg \Gamma \geq 3$, то существуют вершины L_1 и L_2, $L_1 \neq M$, $L_2 \neq M$, $L_1 \neq L_2$, для которых $d(AL_1)=d(AL_2)=1$. Для расстояний между B и этими вершинами будет выполнено

$$n-1 \leq d(BL_i) \leq n+1 \quad (i=1, 2). \tag{2}$$

Следовательно, для чисел $d(BL_1)$ и $d(BL_2)$ выполнена в точности одна из следующих трех возможностей: по крайней мере одно из них n; два числа $n+1$; по крайней мере одно из них $n-1$.

1. Пусть $d(BL_1)=n$. Тогда из $A, B \in P_G$ и $d(BL_1)=d(BA)$ согласно лемме 1 получаем, что $L_1 \in P_G$. Отсюда и из условия $d(AL_1)=1$ по лемме 3 следует, что $P=P_1 \subseteq P_G$. Но $P_G \subset P$. Следовательно, этот случай невозможен.

2. Пусть $d(BL_1)=d(BL_2)=n+1$. Тогда $d(BL_i)=d(BM_1)+d(M_1A)+d(AL_i)$ и, следовательно, $d(M_1L_i)=n$ $(i=1, 2)$. Автоморфизм, приводящий M_1 в B, приведет L_1 и L_2 в две точки из $P_n \subseteq P_G$, расстояние между которыми равно $d(L_1L_2)$. Но $(L_1L_2) \leq 2$. Если $d(L_1L_2)=1$, то по лемме 3 приходим к противоречию $P_G=P$. Если $d(L_1L_2)=2$, согласно лемме 4 получаем $P_G=P_2$.

3. Пусть $d(BL_1)=n-1$. Тогда из $d(CL_1) \leq d(CB)+d(BL_1)=n$ и $d(CL_1)+d(L_1A) \geq d(CA)=n+1$ находим, что $d(CL_1)=n$, но $d(CM)=n$, а $d(ML_1) \leq 2$. Отсюда, как в случае 2, находим пару точек из $P_n \subseteq P_G$, расстояние между которыми не превосходит 2, и, следовательно, опять получаем $P_G=P_2$. Этим доказательство леммы закончено.

Один ω-класс — Q будем называть экстремальным, если любые две точки из Q являются диаметрально-противоположными (расстояние между ними ω). Очевидно, что если Q — экстремалный ω-класс и $M \in Q$, то Q состоит из M и ее диаметрально-противоположных вершин.

Существуют графы, которые не имеют экстремальных ω-классов. Например, граф Хивуда (рис. 2) транзитивен по-расстоянию, но не имеет

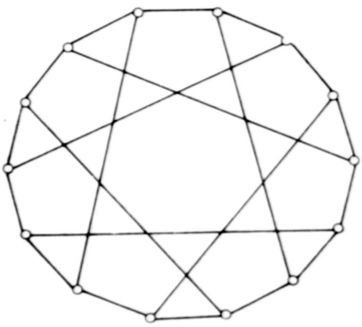

Рис. 2

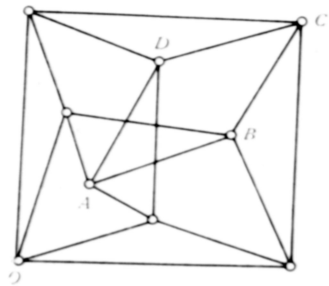

Рис. 3

экстремальных ω-классов. Для него $\omega = 3$, каждая вершина имеет четыре диаметрально-противоположеные, однако эти четыре вершины не являются диаметрально-противоположными — расстояние между любыми двумя из них равно 2.

Граф, который имеет экстремальные ω-классы, будем называть ω-графом. Очевидно, что если Γ — ω-граф (так как он транзитивен), каждая его вершина принадлежит в точности одному экстремальному ω-классу. Так, например, куб разбивается на четыре таких класса, каждый из которых имеет две вершины, а граф $K_{3,3}$ содержит два экстремальных ω-класса, каждый из которых имеет три вершины.

Теорема. *Граф Γ — неавтоморфический (G^Γ импримитивна) тогда и только тогда, когда он является бихроматическим или ω-графом. В этом случае области импримитивности — это два одноцветных класса (для бихроматического графа) и все экстремальные ω-классы (для ω-графа).*

Доказательство. По лемме 5 получаем, что области импримитивности, содержащие O, могут быть только P_2 и P_ω. По лемме 2 каждый из классов P_2 и P_ω является орбитой O и, следовательно, будет областью импримитивности тогда и только тогда, когда не совпадает с P.

Класс P_2 различен от P тогда и только тогда, когда Γ бихроматический. Тогда P_2 и его дополнение — это два одноцветных класса (две области импритивности).

Рассмотрим класс P_ω ($\omega \geq 3$). Пусть P_ω — область импримитивности и $P_\omega \neq P_2$. По лемме 5 P_ω не содержит пары точек на расстоянии меньше чем ω, т. е. P_ω — экстремальный ω-класс.

Наоборот, пусть Γ — ω-граф. Тогда P_ω — экстремальный ω-класс и точки, которые находятся на расстоянии 2 от O, не принадлежат P_ω ($\omega \geq 3$). Это означает, что $P_\omega \subset P$ и $P_\omega \neq P_2$, т. е., что P_ω область импримитивности, несовпадающая с P_2. Этим доказательство теоремы закончено.

Пример автоморфического графа указан на рис. 3. Легко сообразить, что этот граф транзитивен-по-расстоянию. Он не бихроматический, так как содержит треугольники; он не является ω-графом, поскольку вершины A, B, C, D, которые диаметрально-противоположны O, не являются диаметрально-противоположными между собой. Граф на рис. 2 является примером бихроматического графа, который не есть ω-граф. Куб и додекаэдр — это примеры ω-графов; один из них бихроматический, а другой — нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Харари. Теория графов. Москва, 1973.
2. N. L. Biggs, D. H. Smith. On trivalent graphs. *Bull. Lond. Math. Soc.*, **3**, 1971, 155—158.
3. А. Г. Курош. Теория групп. Москва, 1967.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 18. 10. 1974