Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

EINE VERMUTUNG VON ILIEFF ÜBER NICHTFORTSETZBARKEIT VON POTENZREIHEN

ROLF TRAUTNER

Gegeben sei eine Potenzreihe

$$\psi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \tag{1}$$

deren Koeffizienten folgende Bedingungen erfüllen sollen:

Für eine Teilfolge $\{n_k\}$ $(n_k \in \mathbb{N})$ gilt

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} |a_{n_k}|^{1/n_k} = 1 \\ |a_n| \leq c^n, \quad \text{für} \quad n \neq n_k, \quad 0 \leq c < 1. \end{cases} \tag{2}$$

Ilieff sprach in seiner Monographie [2 p. 23 f] folgende Vermutung aus: Ist die Folge $\{n_k\}$ nicht von einer gewissen Stelle an periodisch, so ist ψ nicht über den Einheitskreis analytisch fortsetzbar. Ilieff gibt selbst einige Folgerungen dieser weitreichenden Vermutung an:

Hat die Folge $\{n_k\}$ eine Dichte $\lim\limits_{k\to\infty} k/n_k = q$, so erhält man für $q=0$ einen Teil des Fabryschen Lückensatzes; für $q=1$ oder q irrational ergäben sich neue Sätze über Nichtfortsetzbarkeit.

Pólya [4] (siehe auch Bieberbach [1 p. 62, Satz 2. 2. XIII] zeigt, daß der Fabrysche Satz in dem folgenden Sinn bestmöglich ist: Zu $\{n_k\}$ mit $\limsup\limits_{k\to\infty} k/n_k > 0$ existiert eine Reihe (1) mit $a_n = 0$ für $n \neq n_k$, die über ihren Konvergenzkreis fortsetzbar ist; jedoch ist bei Pólya's Beispiel nicht notwendig (2) erfüllt.

Ziel dieser kurzen Note ist die Widerlegung der Ilieffschen Vermutung. Unser Ergebnis lautet:

Satz: *Gegeben sei eine Folge* $\{n_k\}$, $(n_k \in \mathbb{N})$ *mit einer Dichte*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{n_k} = q > 0. \tag{3}$$

Dann existiert eine Potenzreihe (1), *die über den Einheitskreis analytisch fortsetzbar ist und deren Koeffizienten die Bedingung* (2) *erfüllen.*

Beweis: Sei $\{m_k\}$ die zu $\{n_k\}$ bezüglich $\mathbb{N}$ komplementäre Folge. Wegen (3) hat $\{m_k\}$ die Dichte

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{m_k} = d = 1 - q < 1. \tag{4}$$

Wir bilden die ganze Funktion

SERDICA. Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 1, 1975, p. 409—410.

$$(5) \qquad F(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{m_k^2}\right).$$

Dann gilt nach einem Satz von F. Carlson (siehe Levinson [3, p. 89 Theorem XXX]: Für jedes $\varepsilon>0$ existiert ein $M(\varepsilon)$, so daß für $r>0$ und $0\leq\varphi\leq 2\pi$ gilt

$$(6) \qquad |F(re^{i\varphi})|\leq M(\varepsilon)\exp\{\pi dr|\sin\varphi|+\varepsilon r\},$$

$$1/|F(re^{i\varphi})|\leq M(\varepsilon)\exp\{-\pi dr|\sin\varphi|+\varepsilon r\},\ |re^{i\varphi}-m_k|\geq 1/8.$$

Wir erklären eine Potenzreihe (1), indem wir setzen $a_n=F(n)$ $n=0, 1, 2, \ldots$ Dann gilt nach (5) $a_{m_k}=0$ und nach (6) $\lim\limits_{k\to\infty}|a_{n_k}|^{1/n_k}=1$, also ist (2) erfüllt. Aus (6) folgt weiter, daß F die Ordnung 1 hat und daß für den Strahltypus $h_F(\varphi)=\limsup\limits_{r\to\infty}\log|F(re^{i\varphi})|/r$ gilt

$$(7) \qquad h_F(\varphi)=d\pi|\sin\varphi|.$$

Für die Menge $K=\{z=re^{i\varphi}|\operatorname{Re}(ze^{i\varphi})\leq h_F(\varphi),\quad 0\leq\varphi\leq 2\pi\}$ erhalten wir aus (7) (K ist das Indikatordiagramm von F) $K=\{z=x+iy|\ x=0,\ |y|\leq d\pi\}$. Nach einem weiteren Satz von F. Carlson (Bieberbach [1, p. 7. Satz 1. 3. I, hier speziell p. 12, Satz 1. 3. VI] ist ψ analytisch fortsetzbar in das Komplement von $e^{-K}=\{w|\ |\arg w|\leq\pi d,\ |w|=1\}$. Wegen $d<1$, laut (4) ist also ψ analytisch bei $w=-1$, womit der Satz bewiesen ist.

LITERATUR

1. L. Bieberbach. Analytische Fortsetzung. Berlin, 1955.
2. L. Ilieff. Analytische Nichtfortsetzbarkeit und Überkonvergenz einiger Klassen von Potenzreihen. Berlin, 1960.
3. N. Levinson. Gap and density theorems. *Amer. Math. Soc., Coll. Publ.*, **26**, 1940.
4. G. Pólya. On converse gap theorems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **52**, 1942. 65—71.

Abteilung für Mathematik II
Universität Ulm
7900 Ulm (Donau) Oberer Eselsberg
Bundesrepublik Deutschland

Eingegangen am 8. 10. 75.