# Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

# Сердика

Българско математическо списание

# GEODÄTISCHE FORMEN AUF PSEUDORIEMANNSCHEN RÄUMEN

MARTIN BELGER

Die Arbeit enthält eine Übersicht von Resultaten über geodätische $p$-Formen in pseudoriemmanschen Mannigfaltigkeiten, welche den Zusammenhang zwischen diesen Formen und den geometrischen und physikalischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten hervorheben.

In seiner Arbeit [5] prägt P. Günther in Anologie zu dem von Duff eingeführten Begriff der geodätischen Lösung einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung den Begriff „geodätische $p$-Form". Diese Klasse von Doppeldifferentialformen zeigt ihrer Herleitung aus dem geodätischen Abstand gemäß eine enge Bindung an den Raum und gestattet so — insbesondere als Lösungstyp einiger mit der Metrik des Raumes verbundener Gleichungen — verschiedene geometrische, bzw. physikalische Einsichten.

Einige diesbezügliche, bisher unveröffentlichte oder auch auf den Fall indefiniter Metriken übertragene Ergebnisse des Verfassers sind in dieser Arbeit zusammengefaßt und mit knappen Hinweisen auf zugehörige Beweise bzw. entsprechende Quellenangaben versehen worden.

**1. Geodätische Formen, Begriffsbildung.** In einem $n$-dimensionalen pseudoriemannschen Raum $V \in C^\infty$ (mit positiv definiter oder indefiniter Metrik; der Trägheitsindex $\varkappa$ sei unabhängig von $x$) bilde man aus dem geodätischen Abstand $s(x, y)$ zwischen den benachbarten Punkten $x, y \in V$ die Doppeldifferentialformen

$$\begin{aligned} &\alpha^{(p)}(x, dx;\ y, dy) = ds \,.\, \mathbf{d}s \wedge \mathbf{\Lambda}[d\mathbf{d}s]^{p-1}, \\ (1)\qquad &\beta^{(p)}(x, dx;\ y, dy) = [d\mathbf{d}s]^p, \quad 1 \leq p \leq n, \\ &\alpha^{(0)} = \beta^{(0)} = 1\,; \end{aligned}$$

$d$ bzw. $\mathbf{d}$ sind die Differentiale bzgl. $x$ bzw. $y$, $[\ ]^p$ bezeichnet das $p$-fache alternierende Produkt, $[\ ]^0 = 1$. Benachbart bedeutet, daß die Punkte $x, y$ sich stets durch eine Geodätische $z^i = z^i(t)$ verbinden lassen, und diese Geodätische tragen alle den gleichen Indikator $e = g_{ij}(dz^i/dt)(dz^j/dt)$. Weiter sei bemerkt, daß alle auf $y$ bezüglich Operationszeichen fettgedruckt sind; $\mathbf{\Lambda}$ bedeuter z. b. das alternierende Produkt bzgl. $Y$.

Definition. *Jede Linearkombination* $\gamma^{(p)} := \gamma^{(p,p)}(x, dx;\ y, dy) = a(s)\alpha^{(p)} + b(s)\beta^{(p)}$ *aus den (für* $1 \leq p \leq n-1$ *über dem Ring der skalareu Funktionen von* $V$ *linear unabhängigen) Doppelformen* $\alpha^{(p)}$, $\beta^{(p)}$ *mit Koeffizienten* $a(s)$, $b(s) \in C^\infty$, $s \neq 0$, *heißt geodätische p-Form. Durch alternierende Multiplikationen von* $\gamma^{(p-1)}$ *mit* $ds$ *bzw.* $\mathbf{d}s$ *entstehen noch die geodätischen Formen der Bigrade* $(p, p-1)$ *bzw.* $(p-1, p)$:

$$\gamma^{(p,p-1)} = b(s)\,\beta^{(p-1)} \wedge ds, \quad \gamma^{(p-1,p)} = b(s)\beta^{(p-1)}\mathbf{\Lambda}\mathbf{d}s.$$

*SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 4, 1978, p. 43—49.*

Mit $\Phi^{(p)} := \Phi^{(p,p)}$, $\Phi^{(p,p-1)}$, $\Phi^{(p-1,p)}$ werden die Formenmoduln der geodätischen $p-$, $(p, p-1)-$, $(p-1, p)$-Formen bezeichnet; $\widetilde{V}$ sei stets ein pseudoriemannscher Raum konstanter Krümmung $K$.

B e i s p i e l. Die von Hodge und Kneser eingeführte „Parametrix" $\omega(x, y)$ ist eine geodätische $p$-Form [4]. Man setze dazu $a(s) = (-1)^p[(p-1)!\,(n-2)s_n]^{-1} . s^{p-n+1}$, $b(s) = (-1)^p[p!\,(n-2)s_n]^{-1} . s^{p-n+2}$, $s_n$: Volumen der Einheitssphäre im euklidischen $\mathbf{E}^n$.

**2. Geodätische Formen als Drehungsinvarianten.**

a) In $\widetilde{V}$ sein $H(y)$ die zu $y \in \widetilde{V}$ gehörige stabile Untergruppe der Bewegungsgruppe. Zur Lösung der Aufgabe, alle gegenüber $H(y)$ invarianten Doppeldifferentialformen $\iota(x, dx; y, dy)$ zu ermitteln, geht man davon aus, daß, $H(y)$ isomorph zur vollen Gruppe $O(n-\varkappa, \varkappa)$ der pseudoorthonormierten Matrizen vom Index $\varkappa$ ist. Man sucht zunächst ein Basissystem ganzrationaler absoluter Invarianten der sich bzgl. $O(n-\varkappa, \varkappa)$ kongredient transformierenden Vektoren $x:(x^i)$, $dx:(dx^j)$, $dy:(dy^k)$ zu gewinnen. Dazu wird die Theorie der Komplexsymbole benutzt [14]. Die in Normalskoordinaten $x^i$ bzgl. des Ursprungs $y=0$ geführte Rechnung gestattet es, in die gefundenen Basisinvarianten vermöge der bekannten Formeln $\partial s/\partial x^i = e\, x_i/s$, $\partial s/\partial y^j = -e\, x_j/s$ mit $x^i = -x_i$ für $i \leq \varkappa$ und $x^i = x_i$ für $i > \varkappa$ die Ableitungen von $s$ einzuführen.

S a t z 1. *Die einzigen drehungsinvarianten Doppelformen auf $\widetilde{V}$ sind jene aus den Moduln $\Phi^{(p)}$, $\Phi^{(p,p-1)}$, $\Phi^{(p-1,p)}$.*

Es ist klar, daß sich die geodätischen Formen ihrer Bildung nach bereits als Invarianten ausweisen. Daß aber außer mit den angegebenen Bigraden keine anderen Invarianten existieren, erweist erst die Lösung obiger Aufgabe der Invariantentheorie.

b) Es sei nun $\Delta = d\delta + \delta d$ der verallgemeinerte Laplaceoperator, $d$ bzw. $\delta$ Differential bzw. Kodifferential bzgl. $x$ in $V$. Da $\Delta$ ein bzgl. Isomerien invarianter Operator ist [10], führt er invariante Formen in ebensolche über. Deshalb gilt:

S a t z 2. *In $\widetilde{V}$ ist jeder der drei Formenmoduln $\Phi^{(p)}$, $\Phi^{(p,p-1)}$, $\Phi^{(p-1,p)}$ gegenüber $\Delta$ abgeschlossen: $\Delta\Phi^{(p)} \subset \Phi^{(p)}$, $\Delta\Phi^{(p,p-1)} \subset \Phi^{(p,p-1)}$, $\Delta\Phi^{(p-1,p)} \subset \Phi^{(p-1,p)}$.*

In [5] ist sogar gezeigt: In einem Riemannschen Raum konstanter Krümmung und nur in einem solchen ist die Menge $\cup_{p=1}^{n-1}\Phi^{(p)}$ der geodätischen Formen gegenüber den Operationen $\pm$, $\wedge\boldsymbol{\wedge}$, $*\boldsymbol{*}$, $d\mathbf{d}$, $\delta\boldsymbol{\delta}$ abgeschlossen ($*\boldsymbol{*}$ bedeutet Dualisierung bzgl. $x$ and $y$).

Aus (1) ersieht man sofort, daß mit $\gamma^{(p)}$ auch $d\gamma^{(p)}$ geodätisch ist und zwar in beliebigem Raum $V$. Für $\delta$ ist die Situation anders:

S a t z 3. *Der pseudoriemannsche Raum $V$ ist dann und nur dann von konstanter Krümmung, wenn sein Kodifferential $\delta$ den Modul $\Phi^{(p)}$, $2 \leq p \leq n-1$, in den Modul $\Phi^{(p-1,p)}$ abbildet; in $\widetilde{V}$ ist auch $\delta\gamma^{(1)} \in \Phi^{(0,1)}$. $d$ bildet $\Phi^{(p)}$, $0 \leq p \leq n$ für beliebige $V$ in $\Phi^{(p+1,p)}$ ab.*

Für einen $\widetilde{V}$ mit positiv definiter Metrik enthält [5] bereits das Resultat $\delta\Phi^{(p)} \subset \Phi^{(p-1,p)}$, und dieses läßt sich ohne weiteres auf den Fall indefiniter Metrik übertragen ([1]). Zum Beweis der Umkehrung geht man in $V$ von der Voraussetzung $\delta\gamma^{(p)} = f(s)\beta^{(p-1)} \boldsymbol{\wedge} \mathbf{d}s$ aus; $\gamma^{(p)}$ ist geodätisch. Dabei sei $\delta = -\nabla^i e_i$, $e_i$ der $e$-Operator (diese Arbeit (5)). Die Voraussetzung wird speziell für $\gamma^{(p)} = \alpha^{(p)}$ ausgewertet. Dies führt auf die Gleichung $\pi^{(1)} = -f(x, y)\beta^{(1)}$ mit $\pi^{(1)}(x, y) = q^i(x)\Gamma^h_{ik}(x)g_{hj}(y)dx^k dy^j$, $s \neq 0$, wobei $q:(q^i)$, $q^i q_i = e$ der Tangenteneinheitsvektor an die Geodätische $\overline{yx}$ ist. Die Behauptung liefert dann der folgende

Hilfssatz. *Ist $\pi^{(1)}(x, y)$ pseudogeodätische Form in $V$, d. h. von der Gestalt $a(x, y)\alpha^{(1)}+b(x, y)\beta^{(1)}$, so ist $V$ für $n \geq 3$ von konstanter Krümmung. Für $n=2$ gilt dies, wenn $\pi^{(1)}$ geodätisch ist.*

Der Beweis des Hilfssatzes für $n \geq 3$ beruht auf der Entwicklung der Koeffizienten von $\pi^{(1)}$ nach affinen Normaltensoren ([13]) im Ursprung $y=0$ eines Normalkoordinatensystems. Der Zusammenhang zwischen dem 1. Normaltensor und dem Krümmungstensor führt auf die bekannte Bedingung für die Konstanz der Krümmung. Für $n=2$ hat man zwischendurch zu überlegen: Wenn $F(s)$ für $s \neq 0$ eine Funktion ist, mit welcher $F(s)d\mathbf{d}s$ bzgl. $x$ eine Taylorreihe $T_{ij}(x^1, \ldots, x^n)dx^i dy^j$ besitzt, dann gilt mit $c=\lim_{s\to 0}(s^{-3}F(s))$ die Gleichung $\lim_{x\to y} \partial_\mu \partial_\nu (F(s)d\mathbf{d}s)=2c(g_{i(\mu}(y)g_{|j|\nu)}(y)-g_{\nu\mu}(y)g_{ij}(y))dx^i dy^j$.

## 3. Transportformen als geodätische $p$-Formen in den Räumen $V$.

a) In $\widetilde{V}$ schreibt man geodätische $p$-Formen zweckmäßig in der Form $\gamma^{(p)}=u(s)\sigma^{(p)}+v(s)\tau^{(p)}$, $u(s)$, $v(s) \in C^\infty$, $s \neq 0$, mit

$$\sigma^{(p)}=(p!)^{-1}[\sigma^{(1)}]^p, \quad \tau^{(p)}=\alpha^{(1)} \wedge \boldsymbol{\wedge} \sigma^{(p-1)}, \quad 1 \leq p \leq n,$$

$$\sigma^{(1)}=k^{-1}\sin ks\beta^{(1)}, \quad \sigma^{(0)}=1, \quad \tau^{(0)}=0,$$

$$k=\sqrt{eK} \text{ für } eK>0, \quad k=i\sqrt{|K|} \text{ für } eK<0.$$

$\sigma^{(p)}$ bzw. $\tau^{(p)}$ genügen in $\widetilde{V}$ dem Differentialgleichungssystem der Parallelverschiebung längs $\overline{yx}$ [5; 1]:

$$q^i \nabla_i \sigma^{(p)}=0, \quad q^i \nabla_i \tau^{(p)}=0. \tag{2}$$

Die Differentiation $q^i \nabla_i$ bezieht sich auf $x$. Da nun $\sigma^{(p)}+\tau^{(p)}$ für $x \to y$ die eindeutig bestimmte Grenzform $(p!)^{-1}.(-e)^p E^{(p)}$ ($E^{(p)}$: Einheitsdoppelform) besitzt, ist das Anfangswertproblem

$$q^i \nabla_i T^{(p)}(x, y)=0 \quad \text{mit} \quad T^{(p)}(y, y)=E^{(p)} \tag{3}$$

in $\widetilde{V}$ gelöst. (An $T^{(p)}$ wurden die Argumente $dx$, $dy$ einfachheitshalber weggelassen.)

b) Definition. *Die in $V$ für eine Kurve $\widehat{yx}$ mit dem Tangenteneinheitsvektor $q$ durch (3) charakterisierte Doppelform $T^{(p)}(x, y)$ heißt Transportform dieser Kurve.*

$T^{(p)}(x, y)$ hängt im allgemeinen vom Verlauf von $\widehat{yx}$, für Geodätische $\overline{yx}$ jedoch nur von $x$, $\dot{y}$ ab. $T^{(p)}(x, y)$ leistet den Paralleltransport von Einfachdifferentialformen der Stufe $p$ längs $\widehat{yx}$ von $y$ nach $x$.

In [1] ist nun die Frage erörtert, in welchen pseudoriemannschen Räumen $V$ die Transportformen für Geodätische $\overline{yx} \subset V$ geodätisch sind. Es gilt

Satz 4. *Genau dann ist für $\overline{yx} \subset V$, $T^{(p)}(x, y) \in \Phi^{(p)}$, wenn $V$ von konstanter Krümmung ist, und in einem solchen Raum lautet die Transportform für $\overline{yx}$*

$$T^{(p)}(x, y)=(-e)^p p!(\sigma^{(p)}+\tau^{(p)}). \tag{4}$$

Daß (4) in $V$ gilt, folgt aus (2) und aus dem nach (2) notierten Grenzverhalten von $\sigma^{(p)}+\tau^{(p)}$. Der Beweis der Umkehrung des Satzes nimmt den gleichen Verlauf wie jener zur Umkehrung von Satz 3: Aus $q^i \nabla_i T^{(p)}(x, y) = q^i \nabla_i (a(s)\alpha^{(p)} + b(s)\beta^{(p)}) = 0$ und $\lim\limits_{x\to y} (a(s)\alpha^{(p)}+b(s)\beta^{(p)}) = E^{(p)}$ in $V$ ist konstante Krümmung für $V$ zu erschließen. Nach kleinerer Rechnung stößt man bald zu der Gleichung $(p-1)a(s)\pi^{(1)} = e((p-1)a - sa')\beta^{(1)}$ für $p \geqq 2$ und für $p=1$ zu $b(s)\pi^{(1)} = e(b-sb')\beta^{(1)}$ vor. Der Hilfssatz liefert dann die Behauptung.

c) Interessant ist folgende „geometrische" Deutung von $\sigma^{(p)}$ und $\tau^{(p)}$: Zerlegt man eine Form $\omega$ bzgl. des Tangenteneinheitsvektors $q:(q^i)$ an $\overline{yx}$ in eine Tangential- bzw. Normalkomponente

$$\omega_{|q} = ds \wedge q^i e_i[\omega] \quad \text{bzw.} \quad \omega_{|q}^{\perp} = \omega - \omega_{|q}, \quad \text{wobei}$$

(5) $e_i[\omega^{(p)}] = p\omega_{i i_2 \ldots i_p} dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ der $e$-Operator ist ([2; 11]), so ergibt sich für $\sigma$ und $\tau$:

$$\sigma_{|q}^{(p)} = \tau_{|q}^{(p)\perp} = 0, \quad \sigma_{|q}^{(p)\perp} = \sigma^{(p)}, \quad \tau_{|q}^{(p)} = \tau^{(p)}. \tag{6}$$

Hier sei $\omega$ eine einfache Form; siehe diese Zerlegung allgemeiner in [7]. Man beweist dies unter Benutzung einfacher Rechenregeln für $e_i$ [2] sehr leicht mittels der Beziehungen

$$q^i \frac{\partial^2 s}{\partial x^i \partial y^j} = 0, \quad q^i \frac{\partial s}{\partial x^i} = 1, \tag{7}$$

die ihrerseits in Normalkoordinaten bestätigt werden können. Aus (2) und (4) folgt nun:

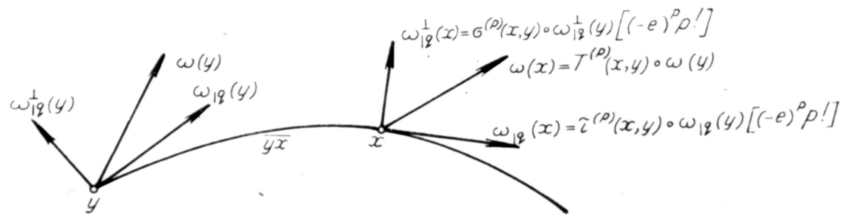


Fig. 1

Satz 5. *Bis auf den Faktor* $(-e^p p)!$ *sind* $\sigma^{(p)}$ *bzw.* $\tau^{(p)}$ *gerade die Normal-bzw. Tangentialkomponenten der Transportform* $T^{(p)}(x, y)$ *in* $\tilde{V}$. *Sie leisten den Paralleltransport der Normal- bzw. Tangentialkomponenten von Einfachdifferentialformen* $\omega(x, dx)$ *längs* $\overline{yx}$ *von* $y$ *nach* $x$ *(siehe Abb.;* $\circ$ *bedeutet die Überschiebung).*

Übrigens gelten die Formeln (6) anstelle von $\sigma^{(p)}$, $\tau^{(p)}$ gleichlautend für $\beta^{(p)}$, $\alpha^{(p)}$ in $V$, da (7) bereits in $V$ gilt.

**4. Harmonische geodätische $p$-Formen in $V$, die Grundlösung der Laplacegleichung.** Die Produktformel

$$\Delta(f(s)\Theta^{(p)}(x,y)) = -2ef'(s)q^i \nabla_i \Theta^{(p)} + f(s)\Delta\Theta^{(p)} - e(f''(s) + (n-1)k \cot ks . f'(s))\Theta^{(p)}$$

für den Laplaceoperator gestattet es, Einsicht in eine Methode von *P.* Günther [5; 1] zu gewinnen, nach der in $\tilde{V}$ die Laplacegleichung $\Delta\gamma^{(p)} = 0$ für Formen aus $\Phi^{(p)}$ einem System aus zwei gewöhnlichen homogenen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung äquivalent ist: Es gilt

(i) $\Delta\Phi^{(p)} \subset \Phi^{(p)}$ also $\Delta(u(s)\sigma^{(p)} + v(s)\tau^{(p)}) \in \Phi^{(p)}$, (Satz 2)

(ii) $q^i \nabla_i \sigma^{(p)} = q^i{}_i \nabla \tau^{(p)} = 0$, (Formel (2)).

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\sigma^{(p)}$ und $\tau^{(p)}$ für $1 \leq p \leq n-1$ gilt $\Delta(u\sigma^{(p)} + v\tau^{(p)}) = 0$ genau dann, wenn die Koeffizienten vor $\sigma^{(p)}$ und $\tau^{(p)}$ in der geodätischen $p$-Form $\Delta(u\sigma^{(p)} + v\tau^{(p)})$ verschwinden, was obengenanntes Differentialgleichungssystem liefert. (Für $p = n$ ist $\sigma^{(p)} = 0$, für $p = 0$ ist $\tau^{(p)} = 0$, was in beiden Fällen nur noch zu einer Differentialgleichung 2. Ordnung für $u$ und $v$ führt.) Die Lösung des Systems gelingt im Rahmen der Fuchsschen Theorie:

Satz 6. (a) *Hat ein pseudoriemannscher Raum konstante Krümmung, so gibt es in seinem Formenmodul $\Phi^{(p)}$ vier über dem Körper der reallen Zahlen linear unabhängige harmonische p-Formen $\gamma_i^{(p)}(x, y)$, $i = 1, 2, 3, 4$.*

(b) *Zwei davon lösen noch die p-stufigen Maxwellschen Gleichungen $d\gamma_i^{(p)} = 0$, $\delta\gamma_i^{(p)} = 0$, $i = 1,2$, eine, $\gamma_4^{(p)}$ etwa, ist die Grundlösung der Laplacegleichung:*

$$\gamma_4^{(p)} = 2^n(2-n)^{-1} s^{2-n} \cdot \tilde{\gamma}_1^{(p)} + \begin{cases} A(n, p)\gamma_1^{(p)} \log\sqrt{z} + C\gamma_1^{(p)} & \text{für } n \geq 4 \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{8}$$

*Dabei bedeuten $\tilde{\gamma}_1^{(p)} = \gamma_1^{(p)} + O(|x|^2)$, $z = \sin ks/2$, $|x|^2 = \Sigma_{i=1}^n (x^i)^2$, $C$ eine beliebige $A$ eine eindeutig bestimmte Konstante.*

**5. Pseudoriemannsche Räume mit vier bzw. drei harmonischen geodätischen Formen.**

a) Die Frage, ob Satz 6(a) eine Umkehrung besitzt, ist in [1] erörtert worden:

Satz 7. *Gibt es in dem Formenmodul $\Phi^{(p)}$ eines pseudoriemannschen Raumes V vier oder nur drei linear unabhängige harmonische p-Formen $\gamma_i^{(p)} = a_i(s)\alpha^{(p)} + b_i(s)\beta^{(p)}$, $i = 1, 2, 3 \mid 4$; $1 \leq p \leq n-1$, so ist V von konstanter Krümmung.*

Linear unabhängig heißt hier im Falle von vier Formen, daß die Wronskideterminante $W(s) = \|a_i, a_i', b_i, b_i'\|$ von $\gamma_i^{(p)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, für $s \neq 0$ nicht verschwindet, für drei Formen bedeute linear unabhängig $W_1(s) = \|a_i, a_i', b_i\| \neq 0$ oder $W_2(s) = \|a_i, b_i, b_i'\| \neq 0$ für $s \neq 0$. Aus $W(s) \neq 0$ folgt dann die lineare Unabhängigkeit der vier Formen $\gamma_i^{(p)}$ über dem Körper der reellen Zahlen, aus jeder der Bedingungen $W_1(s) \neq 0$, $W_2(s) \neq 0$ für sich folgt jene von drei Formen $\gamma_i^{(p)}$, $1 \leq p \leq n-1$ vorausgesetzt.

Das Beweisprinzip zum Satz 7 ist das gleiche wie für die Sätze 3 und 4: Ausgehend von der Voraussetzung $\Delta(a_i(s)\alpha^{(p)} + b_i(s)\beta^{(p)}) = 0$, $i = 1, 2, 3 \mid 4$ des Satzes gelingt es wieder, zu einer Gleichung zwischen der Form $\pi^{(1)}$ und einer pseudogeodätischen bzw. geodätischen Form vorzustoßen. Der Hilfssatz liefert dann die Behauptung.

b) Von Interesse ist die Frage, ob pseudoriemannsche Räume mit nur zwei linear unabhängigen harmonischen Formen in $\Phi^{(p)}$ harmonisch sind und umgekehrt. Nach einer Überlegung von P. Günther hat ein harmonischer Raum $H$ jedenfalls zwei solche Formen in $\Phi^{(1)}$: $ddf$ und $ddg$. Denn $\Delta f = 0$ hat definitionsgemäß in $H$ eine nichtkonstante Lösung $f(s)$. Deshalb ist dies auch für

$\Delta g = 1$ der Fall. Damit gilt $\delta d\mathbf{d}f = \mathbf{d}(\delta df) = \mathbf{d}\Delta f = 0$ und $\delta d\mathbf{d}g = \mathbf{d}(\delta dg) = \mathbf{d}\Delta g = 0$ also $\Delta(d\mathbf{d}f) = d\delta(d\mathbf{d}f) + \delta d(d\mathbf{d}f) = 0$ und $\Delta(d\mathbf{d}g) = d\delta(d\mathbf{d}g) + \delta d(d\mathbf{d}g) = 0$.

**6. Zur Gültigkeit des Huygensschen Prinzips (H. P.) bei den Maxwellschen Gleichungen und der Laplacegleichung in $\tilde{V}$.** Hinsichtlich dieser Gleichungen ist über dieses Prinzip in [3] und [8] Grundlegendes ausgeführt.

a) Für die Maxwellschen Gleichungen der Stufe $p$ $d\omega^{(p)}(x, dx) = 0, \delta\omega^{(p)}(x, dx) = 0$ in einem Raum $V \in C^\infty$ mit $\varkappa = 1$, gilt das H. P. für $1 \leq p \leq n-1$ genau dann, wenn für alle $x$, $y$ gilt: $d\delta V^{(p)}(x, y; \lambda)|_{\lambda=2} = 0$. Deutet man für $n = 4$, $p = 2$ die Koeffizienten von $\omega^{(p)}(x, dx)$ als Komponenten eines elektromagnetischen Feldes, so handelt es sich um die bekannten Maxwellschen Gleichungen bei Abwesenheit von Ladungen und Strömen. $V^{(p)}(x, y; \lambda)$ ist die Rieszsche Kernform in $V$, so bestimmt, daß

$$\Delta V^{(p)}(x, y; \lambda+2) = \Delta V^{(p)}(x, y; \lambda) \tag{9}$$

ist, mit geeigneten Anfangsbedingungen. Daraus läßt sich folgern, daß das Prinzip für ungerade $n$ nicht gilt. Für $n = 2m \geq 4$ zeigt die Kernform in Verbindung mit (9), daß $V^{(p)}(x, y; 2)$ bis auf eine Konstante der Faktor des logarithmischen Gliedes der Hadamardschen Grundlösung von $\Delta\omega^{(p)}(x, dx) = 0$ ist. Da sich die Formen $V^{(p)}(x, y; \lambda)$ in $\tilde{V}$ als geodätisch herausstellen, kann nur sein: $V^{(p)}(x, y; 2) = \text{const} \cdot \gamma_1^{(p)}$. Nach Satz 6 (b) gilt dann $d\delta V^{(p)}(x, y; 2) = 0$.

Satz 8. *In einem pseudoriemannschen Raum $\tilde{V} \in C^\infty$ konstanter Krümmung, der Dimension $n = 2m \geq 4$, vom Trägheitsindex $\varkappa = 1$ gilt für die $p$-stufigen Maxwellschen Gleichungen, $1 \leq p \leq n-1$, stets das Huygenssche Prinzip.*

b) Die Gültigkeit des H. P. in einem $\tilde{V} \in C^\infty$ mit $\varkappa = 1$, $n = 2m \geq 4$ für die Laplacegleichung ist mit dem Verschwinden des logarithmischen Bestandteils $A(n, p)\gamma_1^{(p)} \log\sqrt{z}$ ihrer Grundlösung $\gamma_4^{(p)}$ verbunden, also mit dem Verschwinden des Koeffizienten $A$. Für ungeraden $n$ gilt das H. P. hier nicht. Zur Berechnung von $A$, die bisher nur für die Spezialfälle $n = 4{,}6$ erfolgt ist [1], setzt man die Form $\gamma_4^{(p)}$ mit den in Satz 6 bezeichneten harmonischen Lösungen $\gamma_i^{(p)} \in \Phi^{(p)}$, $i = 1, 2$, der Maxwellschen Gleichungen nach der Methode der Variation der Konstanten an. Im Verlaufe der sich anschließenden Rechnung werden nur noch diejenigen Ausdrücke beobachtet, aus denen sich logarithmische Bestandteile ergeben. Dies führt auf

$$A(n, p) = 2(-1)^{m+1} m^{-1} k^{n-2} B(n, p),$$

$$B(n, p) = \sum_{h=0}^{m-1} (-1)^h \binom{m}{h+1} B_h, \quad B_h = \sum_{l=0}^{h} (p a_l a_{h-l} + (n-p) b_l b_{h-l}).$$

Dabei sind die $a_l$ bzw. $b_l$ die Reihenkoeffizienten der Entwicklung der Gaußschen hypergeometrischen Funktionen $F(p-m,\ m+1-p,\ 1-m;\ z)$ bzw. $F(p-m+1,\ m-p,\ 1-p;\ z)$ nach $z$.

Zur Berechnung der $B_h$ geht man getrennt nach geraden und ungeraden $h$ vor. Es gelingt dann, zu erkennen: $B(n, m+r) = B(n, m-r)$ (d. h. $B(n, p) = B(n, n-p)$). Setzt man daher $p = m+r$, $r = 0, 1, \ldots$, so läßt sich bezüglich $r$ induktiv beweisen:

$$B(n, p) = (-1)^{n-m-1} 2((m-1)!)^{-2} [\, p!\,(2m-p)!\,/\,(2p-2m+1)\,(2p-2m-1)].$$

Es gilt also:

Satz 9. *Es sei* $\tilde{V} \in C^\infty$ *ein n-dimensionaler pseudoriemannscher Raum von konstanter Krümmung K mit dem Trägheitsindex* $\varkappa = 1$. *In* $\tilde{V}$ *gilt für die verallgemeinerte Laplacegleichung für p-Formen,* $0 \leq p \leq n$, *das Huygenssche Prinzip nur, wenn* $K = 0$ *und* $n = 2m \geq 4$ *ist.*

## LITERATUR


1. M. Belger. Geodätische und harmonische geodätische Formen in (Pseudo-) Riemannschen Räumen konstanter Krümmung mit Anwendungen zum Huygensschen Prinzip. *Diss.*, K.-Marx-Univ. Leipzig, 1969.
2. M. Belger. Transportformen und Grundlösung der Laplacegleichung in Fubiniräumen, I. *Beiträge zur Analysis*, **11**, 1978.
3. М. Белгер, Р. Шиминг. Разпространението на вълни и принципът на Хюйгенс като проблем в теорията на хиперболичните диференциални уравнения. *Физ.-мат. сп.*, **17**, 1974, 34—46.
4. G. De Ram. Sur la théorie des formes différentielles harmoniques. *Ann. Univ. Grenoble*, **22**, 1946, 135—152.
5. P. Günther. Harmonische geodätische *p*-Formen in nichteuklidischen Räumen. *Math. Nachr.*, **28**, 1965, 291—305.
6. P. Günther. Sphärische Mittelwerte für Differentialformen in nichteuklidischen Räumen. *Beiträge zur Analysis u. angew. Mathem.*, 1968/9 (Ml)., 45—55.
7. P. Günther. Sphärische Mittelwerte für Differentialformen in nichteuklidischen Räumen mit Anwendungen auf die Wellengleichung u.die Maxwellschen Gleichungen. *Math. Nachr.*, **50**, 1971, 177—204.
8. P. Günther. Einige Sätze über huygenssche Differentialgleichungen. *Wiss. Z. K.-Marx-Univ. Leipzig*, **14**, 1965, 497—507.
9. J. Hadamard. Lectures on Cauchys Problem in linear partial differential equations. Yale, 1923.
10. S. Helgasson. Differential geometry and symmetric spaces. New York, 1962.
11. E. Kähler. Innerer und äusserer Differentialkalkül. *Abh. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin*, 1960, Nr. 4.
12. H. S. Ruse, A. G. Walker, T. Y. Willmore. Harmonic spaces. Roma, 1961.
13. O. Velben. Invariants of quadratic differentialforms. Cambridge, 1927.
14. R. Weitzenböck. Invariantentheorie. Groningen, 1923.


*Sektion Mathematik*
*Karl-Marx-Universität Leipzig*
*701 Leipzig, Karl-Marx-Platz 10*

*Eingegangen 28. 9. 1977*