Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

СЛУЧАЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НАД СООТВЕТСТВУЮЩИМИ ГРАФАМИ

ЛЮБЕН Р. МУТАФЧИЕВ

Рассматривается класс $\mathfrak{M}_n$ днозначных отображений конечного множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя. На $\mathfrak{M}_n$ зад но распределение вероятностей, отличное от равномерного. В этом случае изучены некоторые асимптотические свойства характеристик случайного отображения, возникающие, когда компоненты случайного отображения классифицируются по объему. Доказано, что числа α_m компонент с объемом m $(1 \leqq m \leqq n)$ в пределе при $n \to \infty$ асимптотически независимы и пуассоново распределены.

1. Введение. Рассмотрим класс $\mathfrak{M}_n$ однозначных отображений конечного множества $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ в себя. Число элементов в классе $\mathfrak{M}_n$ равно n^n. Отображение $T \in \mathfrak{M}_n$ можно представить ориентированным графом G_T, вершинами которого являются элементы множества X: вершины i и j соединены в G_T другой, выходящей из i и входящей в j, тогда и только тогда, когда $j = T_i$. В силу однозначности отображения T граф G_T состоит из связанных компонент, каждая из которых имеет один цикл. Важными характеристиками отображения являются число циклических точек, число компонент, число компонент с фиксированной длиной цикла, объемы компонент. Если на $\mathfrak{M}_n$ задано равномерное распределение, то эти характеристики отображения являются случайными величинами. Предельные распределения при $n \to \infty$ этих величин изучены подробно (см. обзорную статью [1, Гл. III]). В работе Колчина [2] изучаются характеристики случайного отображения, возникающие, когда компоненты графа G_T классифицируются по объему, т. е. по числу содержащихся в них вершин. Например, Колчин получил асимптотическую независимость и пуассоновость числа α_m компонент с объемом m $(1 \leq m \leq n)$.

В настоящей статье изучается случай распределения вероятностей на $\mathfrak{M}_n$, отличный от равномерного. Точнее рассмотрены подмножества класса $\mathfrak{M}_n$, на которых задано равномерное распределение. Показано, что и в этом случае распределения вероятностей величины α_m асимптотически независимы и пуассоново распределены при $n \to \infty$. Отметим, что аналогичную задачу о симметрической группе n-той степени разрешили Тараканов и Чистяков в [3].

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $T \in \mathfrak{M}_n$ имеет k_1 компонент с объемом 1, k_2 компонент с объемом 2 и т. д., k_n компонент с объемом n. Целые неотрицательные числа k_i удовлетворяют соотношению

$$k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n. \tag{1}$$

Обозначим через $M_n(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ число однозначних отображений, имеющих k_i компонент с объемом i, $i=1, 2, \ldots, n$. Удобно ввести производящие функции

$$m_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\tilde{\Sigma} M_n(k_1, k_2, \ldots, k_n)\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}. \tag{2}$$

$\tilde{\Sigma}$ обозначает, что суммируем только по всем целым неотрицательным k_i, удовлетворящим (1). Положим $A_n=M_n(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Известно [4], что

$$A_n=(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1} n^k/k!. \tag{3}$$

С помощью простых комбинаторных соображений получается следующее выражение:

$$M_n(k_1, k_2, \ldots, k_n)=\frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}\left(\frac{A_1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{A_2}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{A_n}{n!}\right)^{k_n}, \tag{4}$$

где целые неотрицательные числа k_i удовлетворяют (1).

Лемма 1. *Производящие функции $m_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из (2) удовлетворяют соотношению*

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, z^n/n! = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k x_k z^k/k!\right), \tag{5}$$

где числа A_k определяются формулой (3).

Доказательство леммы 1 проводится с помощью (4) и формулой Фаа ди Бруно [5, стр. 46—48]. Из леммы 1 нетрудно получается формула

$$e^{A(z)}=S(z) \tag{6}$$

для $|z|\leqq e^{-1}$, где

$$A(z)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k/k!,\quad S(z)=\sum_{k=0}^{\infty} k^k z^k/k!.$$

Рассмотрим теперь подмножества $\mathfrak{M}^*_{n,r}\subset\mathfrak{M}_n$ для целых $r\geqq 0$, содержащих такие однозначные отображения n элементов $(n\geqq r)$, которые имеют компоненты лишь с четным объемом больше чем r, а компоненты с объемом меньше r — произвольные. Допустим, что на множествах $\mathfrak{M}^*_{n,r}$ задано равномерное распределение. Аналогично можно определить случайные величины α_m, $m=1, 2, \ldots, n$ на $\mathfrak{M}^*_{n,r}$. Дальше будем изучать предельное распределение случайного вектора $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$, $s=\text{const}$.

Обозначим $k=(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ и пусть $M_n(r; k)$ — число элементов из $\mathfrak{M}^*_{n,r}$, для которых $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)=k$. Аналогично определяем производящие функции $a_n(r; x^{(s)})=\tilde{\Sigma} M_n(r; k)\, x_1^{k_1} x_2^{k_2}\ldots x_s^{k_s}$, $x^{(s)}=(x_1, x_2, \ldots, x_s)$. Из (5) нетрудно получить, что при $|z|\leqq e^{-1}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r; x^{(s)})\, z^n/n! = e^{B(z)}\, e^{P_s(r;\, x^{(s)},\, z)}, \tag{7}$$

где

$$B(z)=[A(z)+A(-z)]/2, \tag{8}$$

$$(9)\qquad P_s(r;\, x^{(s)},\, z)=\sum_{k=1}^{r} A_k x_k z^k/k!+\sum_{r<2k+1\leq s} A_{2k}x_{2k}z^{2k}/(2k)!-\sum_{1<2k\leq s} A_{2k}z^{2k}/(2k)!.$$

Для получения (7), (8) и (9) надо положить в (5) $x_{2k+1}=0$ для $2k+1>r$ и заменить x_{2k} через 1, если $2k>s$.

Рассмотрим сначала случай $r=0$. Тогда, если $x^{(2s)}=(0,\, x_2,\, 0,\, x_4,\dots,0,\, x_{2s})$, из (9) находим, что

$$(10)\qquad P_{2s}(0;\, x^{(2s)},\, z)=\sum_{k=1}^{s}(x_{2k}-1)A_{2k}z^{2k}/(2k)!.$$

При доказательствах предельных теорем будем исследовать поведение коэффициентов $a_n(r;\, x^{(s)})$ при $n\to\infty$. Для этого нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 2. *Последовательность действительных чисел $\{A_n\}$ (см. (3)) удовлетворяет соотношениям*

$$(11)\qquad e^{-n}[(n-1)]!]^{-1}A_n=2^{-1}+an^{-1/2}+bn^{-1}+O(n^{-3/2}),\quad a=\text{const},\quad b=\text{const}.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{\xi_n\}$ независимых случайных величин, для которых $P\{\xi_n=k\}=e^{-1}/k!$, $n=1,2,\dots$; $k=0,1,\dots$ Если $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, то $P\{S_n=k\}=n^k e^{-n}/k!$, $n=1,2,\dots$; $k=0,1,\dots$ Поэтому из уточнения центральной предельной теоремы [7, стр. 127] получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n} n^k/k!=\lim_{n\to\infty}P\{S_n\leq n\}=\frac{1}{\sqrt{2n}}\int_{-\infty}^{0}e^{-x^2/2}\,dx+An^{-1/2}+bn^{-1}+O(n^{-3/2}).$$

Утверждение леммы получается из формулы Стирлинга. При этом $a=A-1/\sqrt{2\pi}$.

Лемма 3 [6, стр. 48—49 и 218]. *Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — последовательности действительных чисел, которые удовлетворяют следующим условиям:*

1) $b_n\neq 0$, $n=0,1,2,\dots$;

2) *степенной ряд* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ *имеет радиус сходимости* R *и* $R\neq 0$;

3) *существует предел* $\lim_{n\to\infty} b_n b_{n+1}^{-1}=q$ *и* $|q|<R$.

Тогда, если $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_i b_{n-i}$, $n=0,1,\dots$, *то* $\lim_{n\to\infty}c_n b_n^{-1}=f(q)$.

3. Предельные распределения. Рассмотрим сначала множество $\mathfrak{M}^*_{n,0}$. Отметим, что $\mathfrak{M}^*_{n,0}\neq\varnothing$, если n четное.

Теорема 1. *Если на множестве $\mathfrak{M}^*_{2n,0}$ задано равномерное распределение, то*

$$\lim_{n\to\infty}P_{2n}\{\alpha_2=k_2,\,\alpha_4=k_4,\dots,\alpha_{2s}=k_{2s}\}=\prod_{l=1}^{s}\frac{\lambda_l^{k_{2l}}}{k_{2l}!}e^{-\lambda_l}$$

где $s=\text{const}$ *и*

$$\lambda_l=\frac{e^{-2l}}{2l}\sum_{k=0}^{2l-1}(2l)^k/k!,\quad l=1,2,\dots,s.$$

Доказательство. Так как $P_{2s}(0; x^{(2s)}, z)$ многочлен степени $2s$ от z (см. (10)), то радиус сходимости степенного развития функции $e^{P_{2s}(0;\, x^{(2s)},\, z)}$ равен ∞. Пусть $e^{B(z)}=\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}z^{2n}$ ($B(z)$ определяется формулой (8)). Будем искать предел $q=\lim_{n\to\infty} b_{2n}b_{2n+2}^{-1}$, если он существует.

Для краткости обозначим $C_n=nA_n/n!$. Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, получаем, что

$$(12)\qquad 2nb_{2n}=C_{2n}R_{2n},$$

(где

$$R_{2n}=1+\sum_{k=1}^{n-1} b_{2k}C_{2n-2k}/C_{2n},\quad n=1, 2, \ldots;\ R_0=1.$$

Отсюда

$$(13)\qquad R_{2n+2}-R_{2n}=\sum_{k=1}^{n-1} b_{2k}\Delta_{2n-2k}+b_{2n}C_2/C_{2n+2},\quad n=1, 2, \ldots,$$

где $\Delta_{2n-2k}=C_{2n-2k+2}/C_{2n+2}-C_{2n-2k}/C_{2n}$, $k=1, 2, \ldots, n-1$. Пусть N — множество всех натуральных чисел. Введем следующие подмножества области суммирования в правой стороне (13):

$$L_1=[1, [n/4]-1]\cap N,\ L_2=[[n/4],\ n-[n^{5/12}]-2]\cap N,$$

$$L_3=\left[n-[n^{5/12}]-1,\ n-\left[\frac{1}{6}\ln n\right]-2\right]\cap N,\ L_4=\left[n-\left[\frac{1}{6}\ln n\right]-1,\ n-1\right]\cap N.$$

Тогда

$$|R_{2n+2}-R_{2n}|\leqq\sum_{k\in L_1} b_{2k}|\Delta_{2n-2k}|+\sum_{k\in L_2} b_{2k}|\Delta_{2n-2k}|$$

$$+\sum_{k\in L_3} b_{2k}|\Delta_{2n-2k}|+\sum_{k\in L_4} b_{2k}|\Delta_{2n-2k}|+b_{2n}C_2/C_{2n+2}.$$

Если $k\in L_1$, из (11) следует, что

$$|\Delta_{2n-2k}|\leqq e^{-2k}[1+O(n^{-1/2})]\left|\left(1+\frac{a}{\sqrt{2n}}+\frac{b}{2n}\right)\left(1+\frac{a}{\sqrt{2n-2k+2}}+\frac{b}{2n-2k+2}\right)\right.$$

$$\left.-\left(1+\frac{a}{\sqrt{2n+2}}+\frac{b}{2n+2}\right)\left(1+\frac{a}{\sqrt{2n-2k}}+\frac{b}{2n-2k}\right)+O(n^{-3/2})\right|=O(e^{-2k}(2n-2k)^{-3/2}).$$

Соотношение (6) доказывает неравенство

$$(14)\qquad b_{2k}<(2k)^{2k}/(2k)!\sim e^{2k}/\sqrt{4\pi k}.$$

Отсюда получаем, что $\sum_{k\in L_1} b_{2k}|\Delta_{2n-2k}|\leqq n^{-1/2}/4=O(n^{-1/2})$. При $k\in L_2$, как и при оценке по области L_1, максимальный член суммы $\sum_{k\in L_2} b_{2k}|\Delta_{2n-2k}|$ не больше чем const $n^{-9/8}$ и, следовательно, сумма по области L_2 имеет порядок $O(n^{-1/8})$. Аналогично можно показать, что $\sum_{k\in L_3} b_{2k}|\Delta_{2n-2k}|=O(n^{-1/12})$. Для последней суммы по области L_4, используя снова (11) и (14), получаем, что

$$\sum_{k\in L_4} b_{2k}\,|\Delta_{2n-2k}|\leq\left(\frac{1}{3}\ln n\right)(b_{2n-2}\,.\max_{k\in L_4}|\Delta_{2n-2k}|)$$
$$\leq (Cn^{1/3}\ln n)\,b_{2n-2}/C_{2n}=O(n^{-1/12}\ln n),\quad C=\mathrm{const}.$$

Отсюда находим, что

$$\lim_{n\to\infty}(R_{2n+2}-R_{2n})=\lim_{n\to\infty}R_{2n+2}(1-R_{2n}/R_{2n+2})=0$$

и так как $R_{2n+2}>1$, то $\lim_{n\to\infty} R_{2n}/R_{2n+2}=1$. Теперь из (11) и (12), имея в виду, что $C_n=A_n|(n-1)!$, получаем

$$q=\lim_{n\to\infty} b_{2n}/b_{2n+2}=e^{-2}. \tag{15}$$

Заметим теперь, что используя (10), равенство (7) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(0\,;x_2,\ x_4,\dots,\ x_{2s})\,z^n/(2n)!=e^{B(\sqrt{z})}e^{P_{2s}(0\,;\,x^{(2s)},\,\sqrt{z})}.$$

Тогда из леммы 3 и (15) получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}(0\,;x_2,x_4,\dots,\ x_{2s})}{a_{2n}(0\,;1,\ 1,\dots,\ 1)}=\exp\{P_{2s}(0\,;x^{(2s)},\ e^{-1})-P_{2s}(0\,;1^{(2s)},\ e^{-1})\}$$
$$=\prod_{k=1}^{s}\exp\{(x_{2k}-1)\,A_{2k}e^{-2k}/(2k)!\}.$$

Здесь $1^{(2s)}=(0,1,0,\dots,0,1)$ — $2s$-мерный вектор.

Утверждение теоремы следует из теоремы непрерывности и из соотношения (3).

В общем случае, когда $r>0$, совместное распределение величин $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ при $n\to\infty$ не существует. Рассмотрим подробно случай $r=2$.

Теорема 2. *Если на множество $\mathfrak{M}^*_{n,2}$ задано равномерное распределение, то для случайных α_1 и α_2 можно получить две различные предельные распределения, когда $n\to\infty$ или только по четным, или только по нечетным значениям.*

Доказательство. Из (7) и (9) следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_1,\ x_2)z^n=e^{B(z)}\exp\{x_1 z+(x_2-1)A_2 z^2/2\}. \tag{16}$$

Здесь $c_n(x_1,x_2)=a_n(2\,;x_1,\ x_2)/n!$. Коэффициенты в левой части (16) при четных степенях z совпадают с коэффициентами разложения функции

$$\exp\{B(z)+(x_2-1)\,A_2z^2/2\}\,\frac{e^{x_1z}+e^{-x_1z}}{2}$$

по степеням z, а при нечетных степенях z с коэффициентами разложения функции

$$\exp\{B(z)+(x_2-1)A_2z^2/2\}\,\frac{e^{x_1z}-e^{-x_1z}}{2}.$$

Поэтому

$$(17)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}(x_1, x_2)z^{2n} = \frac{e^{x_1 z} + e^{-x_1 z}}{2} \exp\{B(z) + (x_2 - 1)A_2 z^2/2\},$$

$$(18)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}(x_1, x_2) z^{2n+1} = \frac{e^{x_1 z} - e^{-x_1 z}}{2} \exp\{B(z) + (x_2 - 1) A_2 z^2/2\}.$$

В (17), заменив z на $\sqrt{z}$, сразу можно приложить лемму 3 и (15). Получаем

$$(19)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n}(x_1, x_2)}{c_{2n}(1, 1)} = \frac{e^{x_1 e^{-1}} + e^{-x_1 e^{-1}}}{e^{e^{-1}} + e^{-e^{-1}}} \exp\{(x_2 - 1) A_2 e^{-2}/2\}.$$

В (18) приложим лемму 3 для коэффициентов степенного разложения функций

$$ze^{B(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b'_{2n+1} z^{2n+1} \text{ и } \frac{e^{x_1 z} - e^{-x_1 z}}{2} \exp\{(x_2 - 1) A_2 z^2/2\}.$$

Легко проверить, что $\lim\limits_{n\to\infty} b'_{2n-1}/b'_{2n+1} = e^{-2}$ и отсюда после замены z на $\sqrt{z}$ находим

$$(20)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n+1}(x_1, x_2)}{c_{2n+1}(1, 1)} = \frac{e^{x_1 e^{-1}} - e^{-x_1 e^{-1}}}{e^{e^{-1}} - e^{-e^{-1}}} \exp\{(x_2 - 1) A_2 e^{-2}/2\}.$$

Теорема доказана.

Из (19) и (20) следует, что в обеих случаях α_1 и α_2 асимптотически независимы, и α_2 пуассоново распределена с параметром $A_2 e^{-2}/2$. Случайная величина α_1 принимает только четные значения для четных n и нечетные для n нечетных.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Колчин, В. П. Чистяков. Комбинаторные задачи теории вероятностей. *Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика* (Итоги науки и техники), т. 11. Москва, 1974, 5—45.
2. В. Ф. Колчин. Задача о размещении частиц по ячейкам и случайные отображения. *Теория вероятностей и ее применения*, **21**, 1976, № 1, 48—62.
3. В. Е. Тараканов, В. П. Чистяков. О цикловой структуре случайных подстановок. *Мат. сб.*, **96**, 1975, № 4, 594—600.
4. L. Katz. Probability of Idencomposability of a random mapping function *Ann. Math. Statist.*, **26**, 1955, 512—517.
5. Дж. Риордан. Введение в комбинаторный анализ. Москва, 1963.
6. Д. Пойа, Г. Сегьо. Задачи и теореми по анализ, I. София, 1973.
7. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник. Независимые и стационарно связанные величины. Москва, 1965.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 12. 5. 1977