Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

DEUX NOTES SUR QUELQUES INEQUATIONS VARIATIONNELLES ELLIPTIQUES

IORDAN V. IORDANOV

On démontre un théorème de régularité de la solution de l'inéquation variationnelle non coercive considérée dans [6]. On donne aussi quelques exemples des inéquations engendrées par des opérateurs de forme caractéristique non-négative de deuxième ordre avec des solutions lipschitziennes.

1. Introduction. Les résultats de la section 3 où on démontre la régularité de la solution du problème considéré dans [6] au voisinage de la frontière complètent les résultats de [7] sur la régularité à l'intérieur du domaine.

Dans la section 4 on établit des théorèmes d'existence de la solution des inéquations variationnelles engendrées par des opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre (cf. le problème 11.18 de [10], ch. II). Au moyen d'une régularisation elliptique on obtient des solutions u_ε, $\varepsilon>0$. Puis on estime leurs normes dans un espace convenable et après le passage à la limite lorsque $\varepsilon\to 0$, on trouve une solution de l'inéquation considérée ([13], [9], [5]). Le point essentiel consiste à assurer (grâce aux conditions supplémentaires pour la contrainte) que u_ε appartiennent au moins de C^1. Ceci permet d'estimer grad u_ε sur l'ensemble de coïncidence de u_ε avec la contrainte. Puis on applique facilement des estimations à priori pour les opérateurs de forme caractéristique non-négative [3; 17] pour estimer les mêmes grandeurs sur le domaine entier.

Donc grâce aux théorèmes de régularité, il est superflu de supposer que l'opérateur considéré soit uniformément elliptique à proximité de la contrainte (cf. [5]).

Il est évident qu'on peut appliquer ce schèma aux situations variées.

On utilise la technique de [8; 9; 14].

2. Notations. Soit $\Omega\subset R^n$ un domaine connexe de frontière $\partial\Omega$ appartenante au moins de la classe C^1 et ν — sa normale intérieure. Notons par $C^{l,\alpha}(\Omega)$, $l=0, 1, \dots$, $\alpha\in(0, 1)$, les espaces des fonctions l fois différentiables dans Ω avec des dérivées d'ordre l höldériennes d'exposant α, et par $H^{k,p}(\Omega)$, $k\geq 0$, $p>1$, les espaces de Sobolev (v. [15, ch. II], où on les désigne par $W_p^{(k)}$). Lorsque $p=2$ on omettra l'indice p. Désignons par $(.,.)$ et $\langle .,.\rangle$ les produits scalaires respectivement de $L_2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$. Définissons d'une manière formelle l'opérateur frontière de dérivation dans la direction de la conormale

$$\frac{\partial}{\partial\nu}=\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\cos(\nu, x_i)\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{2.1}$$

par rapport à l'opérateur

(2.2) $$Lu = -\sum_{ij=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}.$$

On fera des suppositions supplémentaires sur la régularité des coefficients $a_{ij}(x)$ au cours de l'exposé.

3. Régularité à proximité de la frontière de la solution du problème de [6]. Soient E et F deux sous-ensembles fermés de $\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$ avec mes $E \neq 0 \neq$ mes F et soit $\varphi \in H^1(\Omega)$. Pour simplicité, on supposera partout dans cette section que la frontière $\partial\Omega$ soit de la classe C^∞ (v. [11, § 1.7.3]) et encore que $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ et

(3.1) $$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq \lambda\,|\,\xi\,|^2,\ \lambda=\text{const}>0,\quad \forall \xi \in R^n,\quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Nous allons démontrer la régularité de la solution $u \in K$ de l'inéquation variationnelle

(3.2) $$a(u, v-u) \geqq 0,\quad \forall v \in K,$$

où $a(u,v)=\sum_{ij=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j}\,dx$, $u, v \in H^1(\Omega)$, et K est l'ensemble de tous les éléments $v \in H^1(\Omega)$ tels que $(v-\varphi)|_E \geqq 0$ et $(v-\varphi)|_F \leqq 0$ au sens de $H^1(\Omega)$ (pour la définition v. [8] ou [4]). Notons par $e(x)$ et $f(x)$ les fonctions caractéristiques des ensembles E et F respectivement et soit

$$H(t)=\begin{cases}1, & t\leqq 0\\ 0, & t>0\end{cases}.$$

Sous l'hypothèse que la solution et les fonctions mentionnés dans l'énoncé du problème (3.2) soient assez lisses, on peut concevoir l'inéquation variationnelle comme un problème unilatéral (cf. [10, ch. II, § 8]). Il est possible l'écrire ([8; 9; 4]) comme un problème aux limites non linéaire, précisément

(3.3) $$Lu=e(x)H(u-\varphi)\max\,(L\varphi,0)+f(x)H(\varphi-u)\min\,(L\varphi,0),$$

(3.4) $$\frac{\partial u}{\partial \nu}=e(x)H(u-\varphi)\max\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu},\ 0\right)+f(x)H(\varphi-u)\ \min\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu},\ 0\right).$$

Désignons $L_\varepsilon(v)\equiv L(v)+\varepsilon v$ où ε est un nombre positif.

Le lemme suivant joue un rôle principal pour la méthode utilisée (cf. [8; 9; 14]).

L e m m e 3.1. *Soient* $\psi \in H^1(\Omega)$, $g_i \in L_r(\partial\Omega)$, $r \geqq 2(n-1)/n$, $f_i \in L_2(\Omega)$, $i=1,2$, *et* $\theta: R^1 \to [0, 1]$ *une fonction lipschitzienne et monotonement décroissante. A condition que* $f_1 \geqq 0$ *et* $f_2 \leqq 0$ *p. p. dans* Ω *et* $g_1 \geqq 0$ *et* $g_2 \leqq 0$ *p. p. sur* $\partial\Omega$, *il existe une solution* $u \in H^1(\Omega)$ *unique du problème*

(3.5) $$L_\varepsilon u = f_1\theta(u-\psi)+f_2\theta(\psi-u),\quad \frac{\partial u}{\partial\nu}=g_1\theta(u-\psi)+g_2\theta(\psi-u),$$

c.-à-d. si on définit pour $u, v \in H^1(\Omega)$:

$$b(u,v)\equiv a(u,v)+\varepsilon(u,v)-\int_\Omega f_1\theta\,(u-\psi)\,v\,dx$$
$$-\int_\Omega f_2\theta(\psi-u)v\,dx-\int_{\partial\Omega} g_1\theta\,(u-\psi)v\,dS-\int_{\partial\Omega} g_2\,\theta\,(\psi-u)\,v\,ds,$$

où ds est l'élément d'aire de $\partial\Omega$, *alors on ait* $b(u,v)=0$, $\forall v \in H^1(\Omega)$.

De plus, on a $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ sous l'hypothèse supplémentaire que θ, f_i, g_i, ψ et les coefficients $a_{ij}(x)$ sont indéfiniment différentiables.

Remarque. Les conditions sur g_i assurent que les intégrales superficielles sont convergentes (et représentent des fonctionnelles linéaires bornées sur $H^1(\Omega)$) parce qu'en vertu du théorème d'immertion ([11, p. 84]), les éléments $v \in H^1(\Omega)$ ont des traces sur $\partial\Omega$ de $L_s(\partial\Omega)$, $s=2(n-1)/(n-2)$.

Démonstration du lemme 1.1. Puisque la forme $b(u,v)$ est linéaire par rapport à v (quasi linéaire par rapport à u) et on a $|b(u,v)| \leq \text{const}(u)\|v\|_{H^1(\Omega)}$, il existe un opérateur borné (nonlinéaire) $T: H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$, défini par $\langle Tu, v\rangle = b(u,v)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$. Il est facile à vérifier que l'opérateur T est monotone, hémicontinu et coercif. Par conséquent ([10, ch. II, th. 2.1]) il existe $u \in H^1(\Omega)$ pour lequel $Tu=0$, c.-à-d. $\langle Tu, v\rangle = 0$, $\forall v \in H^1(\Omega)$. Ainsi la première assertion du lemme est démontrée car l'unicité de la solution faible de (3.5) suit de la monotonie stricte de l'opérateur T. Maintenant à l'aide des théorèmes de la régularité des solutions des problèmes aux limites elliptiques ([11], ch. II) et des théorèmes de l'immersion, on achève la démonstration.

Soient $M=\text{vrai}\min\varphi$, $N=\text{vrai}\max\varphi$. On sait [6] que la solution u de (3.2) satisfait $M \leq u \leq N$ sur Ω au sens de $H^1(\Omega)$, et encore qu'on peut supposer

$$M<0<N \tag{3.6}$$

sans restreindre la généralité.

Comme dans [4] et [7] on démontre le théorème général suivant:

Théorème 3.1. *Soit* $p>n\geqq 2$. *Supposons* (3.6) *et*

(3.7). *Il existe une fonction* $\psi \in H^{2,p}(\Omega)$ *et des sous-ensembles mesurables* E', F' *de* Ω *lesquels contiennent respectivement* E *et* F *et de plus*

a) $\psi|_E \geq \varphi|_E$, $\psi|_F \leq \varphi|_F$, $u|_{E'} \geq \psi|_{E'}$, $u|_{F'} \leq \psi|_{F'}$ *au sens de* $H^1(\Omega)$;

b) $M \leq \psi \leq N$, $\psi_{\partial E' \cap \Omega}=M$, $\psi_{\partial F' \cap \Omega}=N$.

Alors la solution u *de l'inéquation* (3.2) *appartient à* $H^{1+1/p,p}(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega_1)$, *où le domaine* $\Omega_1 \subset \Omega$ *est tel que* dist $(\bar{\Omega}_1, \partial\Omega \cap (E \cup F))>0$.

Corollaire 3.1. *D'après les théorèmes de l'immersion de Sobolev* [15, p. 72] *la solution* u *de* (3.2) *appartient à* $C^{1,\alpha_1}(\bar{\Omega}_1) \cap C^{0,\alpha_2}(\bar{\Omega})$, $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$.

Démonstration du théorème 3.1. Désignons

$$f_1=e'\max(L\psi,0), \quad f_2=f'\min(L\psi,0),$$
$$g_1=e'\max\left(\frac{\partial\psi}{\partial\nu},\ 0\right), \quad g_2=f'\min\left(\frac{\partial\psi}{\partial\nu},\ 0\right),$$

où e' et f' sont des fonctions caractéristiques de E' et F'. Considérons des suites $\{f^i_{h_k}\}$, $\{g^i_{h_k}\}$, $i=1,2$, et $\{\psi_{h_k}\}$, $k=1,2,\dots$, des fonctions de C^∞ lesquelles approximent respectivement f_i, g_i et ψ dans $L_2(\Omega)$, $L_q(\partial\Omega)$, $q \geq n-1$ et $H^{2,p}(\Omega)$ lorsque $h_k \to 0$. De même on peut supposer que $f^i_{h_k}$ et $g^i_{h_k}$ satisfont les inégalités correspondantes comme dans le lemme 3.1. Ceci découle de la démonstration du théorème 3.1 de [15], ch. II. De plus, d'après le théorème de l'immersion, on a

$$\psi_{h_k} \rightrightarrows \psi \text{ sur } \Omega \text{ lorsque } h_k \to 0. \tag{3.8}$$

Notons

$$\theta_m(t)=\begin{cases}1, & t\leq 1/2m\\ 2-2\,mt, & 1/2m\leq t\leq 1/m\\ 0, & 1/m\leq t,\end{cases}$$

et $\theta_{mk}(t)=J_{h_k}(\theta_m)(t)$, où J_{h_k} est un opérateur régularisant (cf. [15, p. 58]). Evidemment $\theta_{mk}(t)=0$ pour $t>m^{-1}+h_k$. Notons par L^{h_k} l'opérateur analogue de L avec des coefficients $a_{ij}^{h_k}\in C^\infty(\bar\Omega)$, $a_{ij}^{h_k}\rightrightarrows a_{ij}$ lorsque $h_k\to 0$ et par a^{h_k} la forme correspondante. En vertu de (3.1) L^{h_k} est elliptique pour chaque h_k suffisamment petit. A l'aide du lemme 3.1 on trouve des solutions $u_{m\varepsilon}\in H^1(\Omega)$ et $u_{mk\varepsilon}\in C^\infty(\bar\Omega)$ du problème (3.5) obtenues respectivement pour L, f_i, g_i, θ_m, ψ et L^{h_k}, $f_{h_k}^i$, $g_{h_k}^i$, θ_{m_k}, ψ_{h_k}. Pour simplifier l'écriture on omettra l'indice ε. A cause de (3.7b) il existe une constante P avec $|\psi_{h_k}|\leq P$ sur Ω. Alors

$$|u_{mk}|\leq P+\frac{1}{m}+h_k \quad \text{sur} \quad \Omega. \tag{3.9}$$

A condition qu'il existe un point $x_0\in\bar\Omega$: $u_{mk}(x_0)>P+m^{-1}+h_k$, on trouve un sous-ensemble (relativement) ouvert $\omega\subset\bar\Omega$, sur lequel $u_{mk}>P+m^{-1}+h_k$. Posons $v=\max\,(u_{mk}-P-m^{-1}-h_k,\ 0)$ dans

$$a^{h_k}(u_{mk}, v)+\varepsilon(u_{mk}, v)=\int_\Omega f_{h_k}^1\theta_{mk}(u_{mk}-\psi_{h_k})v\,d\boldsymbol{x}+\cdots$$
$$+\int_{\partial\Omega} g_{h_k}^2\theta_{mk}(\psi_{h_k}-u_{mk})\,v\,ds.$$

Puisque sur $\operatorname{supp} v$ on a $u_{mk}-\psi_{h_k}>m^{-1}+h_k$, il suit que $\theta_{mk}(u_{mk}-\psi_{h_k})=0$, d'où $a^{h_k}(v, v)+\varepsilon(v, v)+\varepsilon(P+m^{-1}+h_k, v)\leq 0$. Par conséquent $v\equiv 0$ et la démonstration de (3.9) est achevée.

D'autre part on a les estimations suivantes ([12], [14, p. 213])

$$\|u_{mk}\|_{H^{1+1/p,\,p}(\Omega)}\leq \text{const}\,\{\|f_{h_k}^1\|_{L_p(\Omega)}+\|f_{h_k}^2\|_{L_p(\Omega)} \tag{3.10}$$
$$+\|g_{h_k}^1\|_{L_q(\partial\Omega)}+\|g_{h_k}^2\|_{L_q(\partial\Omega)}+\|u_{mk}\|_{L_p(\Omega)}\},$$

où $q\geq n-1$, et aussi ([1, ch. V])

$$\|u_{mk}\|_{H^{2,p}(\Omega_1)}\leq \text{const}\,\{\|f_{h_k}^1\|_{L_p(\Omega)}+\|f_{h_k}^2\|_{L_p(\Omega)}+\|u_{mk}\|_{L_p(\Omega)}\}, \tag{3.11}$$

(les constantes ne dépendent qu'en p, q et Ω).

En vertu de (3.9)—(3.11) il existe une constante C, dépendant de f_i, g_i, ψ, p, q, Ω et telle que

$$\|u_{mk}\|_{H^{1+1/p,\,p}(\Omega)}+\|u_{mk}\|_{H^{2,p}(\Omega_1)}\leq C. \tag{3.12}$$

Choisissant une sous-suite convenable, on obtient pour $h_k\to 0$ que $u_{mk}\rightharpoonup \bar u\in H^{1+1/p,\,p}(\Omega)\cap H^{2,p}(\Omega_1)$ faiblement dans le même espace et de plus $u_{mk}\rightrightarrows u$. Après un passage à la limite pour $h_k\to 0$ dans

$$a^{h_k}(u_{mk}, v) + \varepsilon(u_{mk}, v) = \int_\Omega f^1_{h_k}\theta_{mk}(u_{mk} - \psi_{h_k}) v dx + \cdots$$
$$+ \int_{\partial\Omega} g^2_{h_k}\theta_{mk}(\psi_{h_k} - u_{mk}) v ds,$$

on trouve $(v \in H^1(\Omega))$:

$$a(\bar{u}, v) + \varepsilon(\bar{u}, v) = \int_\Omega f_1 \theta_m(\bar{u} - \psi) v dx + \cdots$$

c.-à-d. $\bar{u}$ et u_m sont deux solutions du problème (3.5) et selon l'affirmation pour unicité $\bar{u} = u_m$ et u_m appartient à $H^{1+1/p,p}(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega_1)$. D'une manière analogue à la démonstration de (3.12) on établit

$$\|u_m\|_{H^{1+1/p,p}(\Omega)} + \|u_m\|_{H^{2,p}(\Omega_1)} \leqq C_1, \tag{3.13}$$

où C_1 ne dépend qu'en f_i, g_i, ψ, Ω, p, q $(q \geqq n-1)$ et ne dépend pas de m et ε. Comme ci-dessus on voit que les fonctions höldériennes $u_m \to u_\varepsilon$, $u_\varepsilon \in H^{1+1/p,p}(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega_1)$, faiblement lorsque $m \to \infty$ et de plus

$$|u_m - u_\varepsilon| < 1/m, \tag{3.14}$$

$$\|u_\varepsilon\|_{H^{1+1/p,p}(\Omega)} + \|u_\varepsilon\|_{H^{2,p}(\Omega_1)} \leqq C_1. \tag{3.15}$$

Utilisant (3.6) et les raisonnements pour (3.9) on montre

$$M - 1/m \leqq u_m \leqq N + 1/m \tag{3.16}$$

et puis

$$u_m \geqq \psi - 1/m \quad \text{sur} \quad E' \quad \text{et} \quad u_m \leqq \psi + 1/m \quad \text{sur} \quad F'. \tag{3.17}$$

En vertu de (3.17) l'élément u_ε appartient à l'ensemble K', construit comme K avec E', F' et ψ au lieu de E, F et φ. Il est facile à vérifier ([4, 8]) que

$$a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \varepsilon(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \geqq 0, \quad \forall v \in K'. \tag{3.18}$$

Vu de (3.7a) on trouve $K' \subset K$ et $u \in K'$, d'où

$$a(u, u_\varepsilon - u) \geqq 0 \quad \text{et} \quad a(u_\varepsilon, u - u_\varepsilon) + \varepsilon(u_\varepsilon, u - u_\varepsilon) \geqq 0,$$

et après l'addition

$$-a(u - u_\varepsilon, u - u_\varepsilon) + \varepsilon(u_\varepsilon, u - u_\varepsilon) \geqq 0. \tag{3.19}$$

L'estimation (3.15) permet de choisir une sous-suite $\{u_{\varepsilon_i}\}$ faiblement convergente vers $u_0 \in H^{1+1/p,p}(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega_1)$ laquelle converge aussi dans $H^1(\Omega)$. De l'inégalité (3.19) suit $a(u - u_0, u - u_0) \leqq 0$, c.-à-d. $u - u_0 = \text{const}$, par quoi la régularité de la solution u de (3.2) est démontrée.

Corollaire 3.2. Sous les hypothèses du théorème 3.1 et

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|_{E' \cap \partial\Omega} \leqq 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|_{F' \cap \partial\Omega} \geqq 0 \tag{3.20}$$

la solution u de (3.2) appartient à $H^{2,p}(\Omega)$.

Démonstration. Maintenant on a $\partial u/\partial \nu = 0$ au lieu de la deuxième condition de (3.5) et à l'aide de [1] on trouve une estimation uniforme de $\| u_m \|_{H^{2,p}}(\Omega)$.

Remarque. Au cas de la contrainte $\varphi \in H^{2,p}(\Omega)$ on peut formuler des conditions suffisantes de régularité de la solution u de (3.2) dans une forme plus simple (sans participation de u cf. [7]).

4. Inéquations variationnelles associées à des opérateurs de forme caractéristique non-négative. Dans [9; 16] on considère des problèmes non coercifs (non linéaires). Utilisant les mêmes méthodes, on donne ici quelques exemples lorsqu'on peut démontrer l'existence et l'unicité des solutions des inéquations variationnelles, engendrées par des opérateurs elliptiques dégénérés.

Soit $\Omega \subset R^n$ un domaine borné de frontière $\partial\Omega$ appartenante à la classe C^2. Considérons l'opérateur

$$Mu = -\sum_{ij=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x) u,$$

où les coefficients $a^{ij} \in C^2(\bar{\Omega})$, $b^i \in C^1(\bar{\Omega})$, $c \in C^\circ(\bar{\Omega})$, et de plus

$$\sum_{ij=1}^{n} a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0, \quad \forall \xi \in R^n, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \tag{4.1}$$

$$c(x) \geq c_0 = \text{const} > 0, \tag{4.2}$$

sont tels que l'hypothèse principale (H) énoncée ci-dessous, soit satisfaite. Pour simplicité on fera l'hypothèse supplémentaire que

(4.3) $\partial\Omega$ est de type Σ_3 pour l'opérateur M, c.-à-d. $\sum_{ij=1}^{n} a^{ij}(x) \nu_i \nu_j > 0$ sur $\partial\Omega$, où $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ est la normale extérieure du domaine Ω.

Il est commode qu'on écrive M sous la forme $Mu \equiv -\sum_{ij=1}^{n} (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} d^i u_{x_i} + cu$, avec $d^i = b^i + \sum_{j=1}^{n} a^{ij}_{x_j}$. Il suit d'ici que la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \sum_{ij=1}^{n} \int_\Omega a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega d^i u_{x_i} v dx + \int_\Omega cuv dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

engendrée par l'opérateur M, est non-négative sur $H_0^1(\Omega)$ si

$$c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} d^i_{x_i} > 0 \quad \text{sur} \quad \bar{\Omega}. \tag{4.4}$$

(On suppose l'inégalité stricte pour assurer l'unicité de la solution).

Notons $L_\varepsilon u \equiv Mu - \varepsilon \Delta u$, $\varepsilon > 0$, et par $a_\varepsilon(u, v)$ — la forme bilinéaire associée à l'opérateur L_ε. Evidemment a_ε est coercive sur $H_0^1(\Omega)$, c.-à-d.

$$a_\varepsilon(u, u) \geq \lambda(\varepsilon) \| u \|^2_{H_0^1(\Omega)}, \quad \lambda(\varepsilon) > 0, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{4.5}$$

Hypothèse (H). Soit $u_\varepsilon \in C^1(\bar{\omega})$, $\bar{\omega} \subset \bar{\Omega}$, une solution faible de l'équation $L_\varepsilon v = 0$ sur ω. On exige que les grandeurs $|\operatorname{grad} u_\varepsilon|$ soient bornées uniformément par rapport à ε sur $\bar{\omega}$ à condition qu'elles soient bornées uniformément sur $\partial\omega$.

Soit

$$B_s = -c + \frac{1}{4} M_0 n - b^s_{x_s} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{n} |b^i_{x_s}| + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{n} |b^s_{x_i}|, \quad s = 1, \ldots, n,$$

où la constante M_0 ne dépend que des dérivées d'ordre deuxième des coefficients a^{ij}. Alors on peut vérifier l'hypothèse (H) ayant la condition suivante

$$\sup_E B_s < 0, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{4.6}$$

où l'ensemble E est un voisinage de $\{x \mid x \in \bar{\Omega}, \det \| a^{ij}(x) \| = 0\}$. (cf. [17, lemme 5]).

On peut obtenir des conditions suffisantes pour (H) et en profitant de [3]: Soit $n-1=m$ et $x_n = t$. Ecrivons l'opérateur Mu de façon suivante $(x=(x', t))$

$$Mu \equiv -\Big[\sum_{ij=1}^{m} a^{ij}(x', t) u_{x_i x_j} + 2 \sum_{i=1}^{m} a^i(x', t) u_{x_i t}$$

$$+ a(x', t) u_{tt} \Big] + \sum_{i=1}^{m} b^i(x', t) u_{x_i} + b(x', t) u_t + c(x', t) u),$$

où a^{ij}, a^i, $a \in C^2(\bar{\Omega})$, b^i, b, $c \in C^1(\bar{\Omega})$. Maintenant pour les coefficients on exige

$$\begin{cases} \sum_{ij=1}^{m} a^{ij} \alpha_i \alpha_j + 2 \sum_{i=1}^{m} a^i \alpha_i \alpha_0 + a\, \alpha_0^2 \geq \mu a(x', t) (\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 + \alpha_0^2), \ \mu = \text{const} > 0; \\ a(x', t) \geq 0, \ |a^i(x', t)| \leq K a(x', t), \ K = \text{const}; \\ c(x', t) \geq c_0 > 0, \quad b(x', t) \geq b_0 > 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Dans [3] un rôle essentiel jouent les coefficients devant les dérivées de premier ordre, tandis que dans [17] on suppose (4.6), c.-à-d. le coefficient devant u soit suffisamment grand. A condition que la dégénération de M dans $\Omega \subset R^n_{(x', t)}$ est d'un type convenable ([3, théorèmes 5 et 6]), on peut vérifier (H).

Soit $\psi \in H^{2,p}(\Omega)$, $p > n$, et telle que $\psi|_{\partial E} \leq 0$, où E est un ensemble compact de Ω. Désignons par K l'ensemble fermé et convexe de tous les éléments $v \in H^1_0(\Omega)$ tels que $v \geq \psi$ sur E au sens de $H^1_0(\Omega)$.

Problème. Trouver un élément $u \in K$ pour lequel

$$a(u, v-u) \geq 0, \quad \forall v \in K. \tag{4.8}$$

Théorème. 1. *Sous les hypothèses* (4.1)—(4.5) *et* (H), *il existe une* $u \in K$ *unique du problème* (4.8). *L'élément* u *est une fonction lipschitzienne.*

Pour la démonstration nous avons besoin de ce résultat simple ([9]).

Lemme 4.1. *Soient* f, $g \in C^1(\bar{D})$, $D \subset R^n$ un domaine borné, *et* $f \geq g (f \leq g)$ *sur* D. *A condition que l'ensemble* $I = \{x \mid x \in \bar{D}, f(x) = g(x)\}$ *est contenu dans l'intérieur de* D, *il suit* $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} g$ *sur* I.

La démonstration du lemme est immédiate parce que la fonction $f-g$ atteint son minimum (maximum) dans D sur I.

Démonstration du théorème 4.1. En vertu des hypothèses sur ψ et (4.5), la solution u_ε de l'inéquation variationnelle $a_\varepsilon(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon)\geqq 0$, $\forall v\in K$, appartient à $H^{2,p}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ ([4]). Puisque $p>n$ on a $u_\varepsilon C^{1,\alpha}(\bar\Omega)$, $\alpha>0$, et

(4.9) $$u_\varepsilon|_{\partial\Omega}=0.$$

Sur l'ensemble $\Omega_\varepsilon=\{x\mid x\in E,\ u_\varepsilon(x)>\psi(x)\}$ et aussi sur $\Omega\setminus E$ la solttion u_ε satisfait ([8]) l'équation $L_\varepsilon u_\varepsilon=0$ (au sens de la théorie des distributions). Il est évident que $I_\varepsilon=\{x\mid x\in\Omega,\ u_\varepsilon(x)=\psi(x)\}\subset E$. A l'aide du lemme 4.1 on obtient $\operatorname{grad}u_\varepsilon=\operatorname{grad}\psi$ dans les points de $I\cap\mathring{E}$ ($\mathring{E}$ — l'intérieur de E). D'autre part si $u_\varepsilon(x)=\psi(x)$ dans un point $x\in\partial E$, tenant compte des inégalités [4]

(4.10) $$0\leqq u_\varepsilon\leqq\max_E\psi,$$

on conclut que la fonction u_ε atteint son minimum dans le point x, d'où $\operatorname{grad}u_\varepsilon(x)=0$. Par conséquent $\operatorname{grad}u_\varepsilon$ est estimé uniformément par rapport à ε sur l'ensemble I. L'estimation des grandeurs $|\operatorname{grad}u_\varepsilon|$ sur $\partial\Omega$ est une conséquence de (4.3) et (4.9) ([17, lemme 6]).

Maintenant, à cause de l'hypothèse (H) nous avons

(4.11) $$|\operatorname{grad}u_\varepsilon|\leqq\text{const}\quad\text{sur}\quad\bar\Omega$$

uniformément par rapport à ε.

Tenant compte de (4.10) et (4.11) on choisit une suite $\{u_{\varepsilon_i}\}$ faiblement convergente dans $H_0^1(\Omega)$ dont limite faible $u\in H_0^1(\Omega)$ est une solution du problème (4.8) (cf. [5]). L'estimation uniforme de $\|u_\varepsilon\|_{C^1(\bar\Omega)}$ montre que la fonction u est lipschitzienne

L'unicité de la solution du problème (4.8) est une conséquence (comme dans [5] de la condition (4.4).

Remarque 4.1. De même facon on peut traiter l'inéquation non-homogène

$$a(u,v-u)\geqq(f,v-u),\quad\forall v\in K,$$

où la fonction f est suffisamment lisse.

Remarque 4.2. Le schéma utilisé dans le théorème 4.1 montre que la généralité des résultats dépend des théorèmes de régularité des inéquations variationnelles et d'autre part des estimations à priori pour les opérateurs dégénérés.

On obtiendra des résultats nouveaux et en considérant des inéquations variationnelles pour des ensembles convexes variés au lieu de l'ensemble K.

Soit E et F deux sous-ensembles compacts de Ω tels que dist $(E,F)>0$ et soit $\varphi\in H^{2,p}(\Omega)$, $p>n$. Notons

$$K_1=\{v\mid v\in H_0^1(\Omega),\ (v-\varphi)|_E\geqq 0\ \text{et}\ (v-\psi)|_F\leqq 0\ \text{au sens de}\ H_0^1(\Omega)\}.$$

En modifiant légèrement le raisonnement dans la démonstration du théorème 4.1, on obtient un théorème d'existence et d'unicité de la solution lipschitzienne en cas de l'ensemble K_1 pour l'inéquation variationnelle (4.8) sous l'hypothèse (cf. [4])

$$\varphi|_{\partial E}=\min(0,\ \min_{E\cup F}\varphi),\quad\varphi|_{\partial E}=\max(0,\ \max_{E\cup F}\varphi).$$

Dans [7] il y a des conditions diverses, assurant que les points de coïncidence de la solution (assez lisse) u_ε avec la contrainte soient à l'intérieur de l'ensemble où on pose la contrainte. (Evidemment cela joue un rôle essentiel en cas des contraintes localisées sur des sous-ensembles de Ω).

De même façon on établit des résultats pareils en considérant des contraintes du type

$$K_2=\{v\mid v\in H_0^1(\Omega),\ |\operatorname{grad} v|\leqq 1\ \text{ p. p. sur } \Omega\},$$

$$K_3=\{v\mid v\in H_0^1(\Omega),\ \psi\leqq v\leqq\psi^*\ \text{ sur } \Omega \text{ au sens de } H_0^1(\Omega)\},$$

où ψ, $\psi^*\in H^{2,p}(\Omega)$, $p>n$, $\psi\leqq\psi^*$ sur $\bar{\Omega}$ et $\psi<0<\psi^*$ sur $\partial\Omega$, ou obtenues par la combinaison des contraintes déjà considérées. Les solutions des inéquations régularisées correspondantes appartiennent aussi à $H^{2,p}(\Omega)$ (*v.* [2]).

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I. *Comm. Pure Appl. Math.*, **12**, 1959, 623—727.
2. H. Brézis. Problèmes unilatéraux. *J. Math. Pures et Appl.*, **51**, 1972, 1—168.
3. Т. Генчев. Върху задачата на Дирихле за един клас линейни уравнения от втори ред с неотрицателна характеристична форма. *Годишник Соф. унив., Мат. фак.*, **60**, 1965/66, 149—169.
4. I. V. Iordanov. Régularité de la solution d'une inéquation variationnelle elliptique à deux contraintes. *C. R. Acad. bulg. sci.*, **26**, 1973, 1587—1589 (exposé en détail: *Ann. Univ. Sofia, Fac. Math. Méc.*, **67**, 1972/73, 169—188).
5. I. V. Iordanov. Inéquation variationnelle associée à un opérateur elliptique dégénéré. *C. R. Acad. bulg. sci.*, **27**, 1974, 1473—1476.
6. I. V. Iordanov. Problème non-coercif pour une inéquation variationnelle elliptique à deux contraintes. *Serdica*, **1**, 1975, 261—268.
7. I. V. Iordanov. Conditions de régularité de la solution d'un problème non-coercif. *Pliska*, **3**, 1980. (in print).
8. H. Lewy, G. Stampacchia. On the regularity of the solution of a variational inequalities. *Comm. Pure Appl. Math.*, **22**, 1969, 153—188.
9. H. Lewy, G. Stampacchia. On existence and smoothness of solutions of some non-coercive variational inequalities. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **41**, 1971, 240—253.
10. J.-L. Lions. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris, 1969.
11. J.-L. Lions, F. Magenes. Problèmes aux limites non homogènes et applications, v. 1. Paris, 1968.
12. J.-L. Lions, E. Magenes. Problemi ai limiti non omogenei. V. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 16, 1962, 1—44.
13. L.-L. Lions, G. Stampacchia. Variational inequalities. *Comm. Pure Appl. Math.*, **20**, 1967, 493—519.
14. M. K. V. Murthy, G. Stampacchia. A variational inequality with mixed boundary conditions. *Israel J. Math.*, **13**, 1972, 188—224.
15. J. Nečas. Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Prague, 1967.
16. G. Stampacchia, A. Vignoli. A remark on variational inequalities for a second order non linear differential operator with non lipschitz obstacles. *Bollettino U. M. I.*, **5**, 1972, 123—131.
17. О. А. Олейник. О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой. *Мат. сб.* **69**, (111), 1966, 111—139.

Centre for Mathematics and Mechanics
1090 Sofia P. O. Box 373

Reçu le 1. 10. 1977