# Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

# Сердика

Българско математическо списание

# ОДИН КЛАСС ДИСКРЕТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ПРОСТОМУ СЛУЧАЙНОМУ БЛУЖДАНИЮ

АПОСТОЛ ОБРЕТЕНОВ

В работе рассматриваются дискретные распределения с логарифмически вогнутыми хвостами. О таких распределениях в п. 1 доказаны некоторые свойства. В п. 2 даются свойства и предельные утверждения о решении уравнения восстановления. Полученные результаты используются при исследовании в п. 3 простого одномерного случайного блуждания.

В [1] показаны свойства решения уравнения восстановления дискретных вероятностных распределений $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, принадлежащих к классу $R_d$. К этому классу принадлежат распределения $\{p_k\}$, о которых отношение $\lambda(k)=p_k/\sum_{j=k}^{\infty} p_j$ не убывает с ростом $k$. Если с $F$ обозначим функцию распределения $F(x)=\sum_{i<x} p_i$, $x\geq 0$, $F(0-)=0$, то необходимое и достаточное условие, чтобы $F\in R_d$, будет $\bar{F}^2(k)\geq \bar{F}(k+1)\bar{F}(k-1)$, где $\bar{F}(x)=1-F(x)$. Это утверждение эквивалентно следующему: отношение

$$Q(k, \nu)=[\bar{F}(k)-\bar{F}(k+\nu)]/\bar{F}(k) \tag{1}$$

не убывает с ростом $k$ при любом фиксированном $\nu=1, 2, \ldots$ Действительно, пусть $\lambda(k)=Q(k, 1)$ не убывает. Тогда $1-Q(k, 1)$ не возрастает и из представления

$$Q(k, \nu)=1-\frac{\bar{F}(k+\nu)}{\bar{F}(k)}=1-\prod_{i=1}^{\nu}\frac{\bar{F}(k+i)}{\bar{F}(k+i-1)}=1-\prod_{i=1}^{\nu}[1-Q(k+i, 1)]$$

следует, что (1) не убывает для фиксиранного значения $\nu$. Обратное утверждение тривиально, получается при $\nu=1$.

1. Сначала докажем некоторые элементарные свойства дискретных распределений $F$ из $R_d$, которые нужны для дальнейшего изложения.

Свойство 1. *Если $F\in R_1$ и $\mu_1=\sum_{k=0}^{\infty} kp_k$, $\mu_2=\sum_{k=0}^{\infty} k^2p_k$, то имеет место неравенство*

$$\mu_2\leq 2\mu_1^2+\mu_1. \tag{2}$$

Чтобы доказать (2), воспользуемся, что $Q(k, \nu)\geq Q(0, \nu)$; имея в виду (1), получим

$$\bar{F}(k+\nu)\leq \bar{F}(k)\bar{F}(\nu). \tag{3}$$

Дальше, пользуя (3), имеем последовательно

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 4, 1978, с.250—259.

$$2^{-1}(\mu_2+\mu_1)=\sum_{k=1}^{\infty} k\bar{F}(k)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=\nu}^{\infty}\bar{F}(k)$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\bar{F}(k+\nu)\leqq\sum_{k=0}^{\infty}\bar{F}(k)\sum_{\nu=1}^{\infty}\bar{F}(\nu)=\mu_1^2+\mu_1,$$

т. е. неравенство (2).

Свойство 2. *Если распределение* $F(k)=p_0+p_1+\cdots+p_{k-1}$ *принадлежит* $R_d$ *и для него неравенство* (2) *есть равенство, т. е.* $\mu_2=2\mu_1^2+\mu_1$, *то это распределение геометрическое*: $p_k=pq^k$, $k=0, 1, 2, \ldots$, $q=\mu_1(1+\mu_1)^{-1}$.

Доказательство. Равенство $\mu_2=2\mu_1^2+\mu_1$ можно записать как

$$\sum_{k,\nu}\bar{F}(k+\nu)=\sum_{k,\nu}\bar{F}(k)\bar{F}(\nu), \tag{4}$$

откуда из (3) получаем равенства

$$\bar{F}(k+\nu)=\bar{F}(k)\bar{F}(\nu),\quad k, \nu=0, 1, 2, \ldots. \tag{$4_1$}$$

Положим $\varphi(k)=\lg\bar{F}(k)$. Тогда равенства ($4_1$) дают

$$\varphi(k+\nu)=\varphi(k)+\varphi(\nu),$$

т. е. функция $\varphi(k)$ линейная относительно целочисленных значений аргумента и, следовательно, $\bar{F}(k)=q^k$. Число $q$ лежит в интервале $[0, 1]$, потому что $\bar{F}$ вероятность. Если $p=1-q$, то

$$\bar{F}(k)=q^k=1-p\frac{1-q^k}{1-q}=1-\sum_{\nu=0}^{k-1}pq^\nu.$$

Так что $p_\nu=pq^\nu$ и из равенства $\mu_1=\sum\nu p_\nu=|o|q$ находим, что $q=\mu_1(1+\mu_1)^{-1}$

Свойство 3. *Пусть* $F(k)=\sum_{\nu<k}p_\nu$ — *распределение из* $R_d$ *со средним значением* $\mu_1$. *Тогда для каждой неубывающей последовательности чисел* $\{a_n\}$ *выполнено неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\bar{F}(n)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n,\quad q=\mu_1(1+\mu_1)^{-1}. \tag{5}$$

Доказательство. Так как $F\in R_d$, то $Q(k-1, 1)\leqq Q(k, 1)$, откуда следует неравенство $\bar{F}(k+1)\bar{F}(k-1)\leqq\bar{F}^2(k)$ или $2\varphi(k)\geqq\varphi(k+1)+\varphi(k-1)$. Последнее из неравенств показывает, что последовательность $\{\varphi(k)\}$ вогнута. Обозначим через $n$ такое $k\geqq1$, для которого выполнены неравенства

$$k\lg q<\lg\bar{F}(k)$$

$$(k+1)\lg q\geqq\lg\bar{F}(k+1),$$

здесь $q=\mu_1(1+\mu_1)^{-1}$. Такое $k$ существует, ибо $\varphi(0)=0$. Притом оно единственное, так как число $q$ выбрано так, что

$$\mu_1=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{F}(k)=\sum_{k=1}^{\infty}q^k, \tag{6}$$

и, кроме того, последовательность $\{\varphi(k)\}$ вогнута.

Из (6) следует равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(q^k - \bar{F}(k)) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_n)(q^k - \bar{F}(k)). \tag{7}$$

Правая часть равенства (7) равна

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_n)[q^k - \bar{F}(k)] + \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k - a_n)[q^k - \bar{F}(k)]. \tag{8}$$

Первая сумма в (8) неотрицательная, так как $q^k < \bar{F}(k)$ и $a_k \leq a_n$ при $k \leq n$. Множители второй суммы в (8) неотрицательны, ибо $a_k \geq a_n$ и $q^k > \bar{F}(k)$ за $k > n$. Следовательно, сумма в левой части равенства (7) тоже неотрицательна, что эквивалентно неравенству (5).

Свойство 4. *Распределение $F$ из $R_d$ имеет моменты всех порядков.*

Это следует сразу из (5) при $a_n = n^k$.

Свойство 5. *Если $f(s)$ производящая функция некоторого распределения из $R_d$, $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$, $0 \leq s \leq 1$, то для нее выполнено неравенство*

$$f(s) \leq p(1-qs)^{-1}, \quad q = \mu_1(1+\mu_1)^{-1}, \quad p+q=1. \tag{9}$$

Доказательство. Отметим сначала, что правая часть неравенства (9) на самом деле является производящей функцией геометрического распределения со средним $\mu_1 = q/p$.

Выберем в неравенстве (5) константы $a_n$, равные $1-s^n$. В таком случае после элементарных подсчетов левая сторона (5) равна $[f(s)-1]s(1-s)^{-1}+\mu_1$, а правая $-[p(1-qs)^{-1}-1]$ $s(1-s)^{-1}+\mu_1$, то из полученного неравенства следует (9).

Неравенство (9) показывает, что в совокупности производящих функций дискретных распределений из $R_d$, имеющих один и тот же первый момент, экстремной является производящая функция геометрического распределения.

2. Другие свойства распределений из класса $R_d$ рассмотрены в работах [2] и [3]. В [2] доказано, что если $X_1$ и $X_2$ случайные величины с распределениями из $R_d$, то сумма $X_1+X_2$ имеет распределение тоже из $R_d$. В [3] дана оценка снизу для производящей функции $f(s)$ распределения из $R_d$:

$$f(s) \leq p(1-qs)^{-1} s^{\mu_1 - \tilde{\mu}_1} \tag{10}$$

где $\tilde{\mu}_1 = 2^{-1}(-1+\sqrt{1+4\sigma^2})$, $\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2$.

Оценки (9) и (10) используются при доказательстве следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть $X$ — дискретная случайная величина с распределением $F(x, \theta)$ из класса $R_d$, которое зависит от параметра $\theta$. Если при $\theta \to \theta_0$ выполнено*

$$\lim_{\theta \to \theta_0} \mu_1 = \lim (\sigma^2 - \mu_1^2) = q_0/p_0, \quad p_0 + q_0 = 1, \quad p_0 > 0, \tag{11}$$

то

$$\lim_{\theta \to \theta_0} P(X=k) = p_0 q_0^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Доказательство. Неравенства (9) и (10) выразим через $\mu_1$ и получим

(13) $$s^{\mu_1-\widetilde{\mu}_1}(1+\mu_1(1-s))^{-1}\leqq f(s)\leqq(1+\mu_1(1-s))^{-1}.$$

Из (11) следует, что

(14) $$\lim_{\theta\to\theta_0}(\mu_1-\widetilde{\mu}_1)=0,$$

ибо $$\lim_{\theta\to\theta_0}\sigma^2=\left(\frac{q_0}{p_0}\right)^2+\frac{q_0}{p_0}\ \text{ и }\ \lim_{\theta\to\theta_0}\widetilde{\mu}_1=2^{-1}\left(-1+\sqrt{\left(1+2\frac{q_0}{p_0}\right)^2}\right)=\frac{q_0}{p_0}.$$

Принимая во внимание (14) и (11), из неравенства (13) получаем

$$\lim_{\theta\to\theta_0}f(s)=p_0/(1-q_0s).$$

Последнее предельное соотношение по теореме непрерывности дает (12)

В работе [3] рассмотрено уравнение восстановления

(15) $$u_n=p_n+\sum_{\nu=0}^{n}p_\nu u_{n-\nu},$$

когда распределение $F(n)=\sum_{k<n}p_k$ принадлежит классу $R_a$, и доказаны некоторые свойства решения этого уравнения. Здесь мы дадим оценку для разницы

(16) $$\Delta(n)=(n+1)\mu_1^{-1}-U_n,$$

где $U_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$. В [3] показано, что для каждого $n\geqq 0$ имеем $\Delta(n)\geqq 0$ и $\Delta(n)=0$, когда $F$ является геометрическим распределением. Оценка сверху для $\Delta(n)$ дает следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть $U_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$, где $\{u_n\}$—решение уравнения восстановления (15) и $\{p_n\}\in R_a$. Предположим, что для каждого $n\geqq 0$ выполнение неравенства*

(17) $$\bar{F}(n+1)\Big|\sum_{\nu=0}^{\infty}\bar{F}(\nu+1)\leqq(1+a)^{-1},$$

*где $a$ является* sup *для всех возможных констант, для которых выполнены неравенства типа (17). Тогда для всех $n\geqq 0$ верно неравенство*

(18) $$\Delta(n)=(n+1)/\mu_1^{-1}-U_n\leqq 1-a/\mu_1.$$

Доказательство. Отметим сначала, что если существует константа $a$, для которой условие (17) выполняется, то $a\leqq\mu_1$. В самом деле, суммируя неравенства $\bar{F}(n+1)\leqq(1+a)^{-1}\sum_{\nu=n}^{\infty}\bar{F}(\nu+1)$ относительно $n$, получаем

(19) $$\mu_1\leqq(\mu_2+\mu_1)/2(a+1).$$

Так как $\mu_2\leqq 2\mu_1^2+\mu_1$, из свойства 1 и неравенства (19) следует $a\leqq\mu_1$.

Если просуммируем равенства (15) по $n$, находим, что $U_n$ удовлетворяет уравнению

(20) $$U_n=F(n+1)+\sum_{\nu=0}^{n}p_\nu U_{n-\nu}.$$

Обозначим через $R_n$ разницу $R_n=1-A(n)-a/\mu_1$. Тогда тождественные преобразования (20) дают для $R_n$ следующее уравнение:

$$R_n=\mu_1^{-1}\sum_{\nu=n}^{\infty}\bar{F}(\nu+1)-\mu_1^{-1}(a+1)\bar{F}(n+1)+\sum_{\nu=0}^{n}p_\nu R_{n-\nu}. \tag{21}$$

Используя условие (17), находим, что свободный член уравнения (21) неотрицателен, т. е.

$$\mu_1^{-1}\sum_{\nu=n}^{\infty}\bar{F}(\nu+1)-\mu_1^{-1}(a+1)\bar{F}(n+1)\geqq 0.$$

В таком случае для всех $n\geqq 0$ и решение $R_n$ уравнения (21) является неотрицательным. Из $R_n\geqq 0$ следует (18).

Полученное неравенство (18) точное, потому что оно превращается в равенство, когда $p_k=pq^k$. Действительно, как не трудно подсчитать, если $\{p_k\}$ геометрическое распределение, отношение с левой стороны неравенства (17) равно $q$ и в таком случае $a=q/p=\mu_1$.

Неравенство (18) дает возможность доказать следующее предельное утверждение.

Теорема 3. *Если распределение* $F(n+1)=p_0+p_1+\cdots+p_n$ *из класса* $R_a$ *и* $F$ *изменяется так, что* $\mu_1\to\mu_0$ *и* $a/\mu_1\to 1$, *где* $a$*—константа от* (17), *то для всех* $n=0, 1, 2, \ldots$

$$p_n\to pq^n,\quad q/p=\mu_0,\quad p+q=1. \tag{22}$$

Доказательство. Как и в теореме 1, предельные соотношения в этой теореме и при ее доказательстве надо понимать как пределы относительно некоторого параметра $\theta$. Из условий теоремы и из неравенства (18) следует

$$U_n\to(n+1)/\mu_1. \tag{23}$$

Обозначим через $u(s)$ производящую функцию последовательности $\{U_n\}$, где $u(s)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n s^n$, $0\leqq\varrho<1$. Из уравнения (20) получаем

$$u(s)=f(s)/(1-s)(1-f(s)). \tag{24}$$

Предельное соотношение (23) дает нам $u(s)\to\mu_0^{-1}(1-s)^{-2}$ и из (24) следует $f(s)\to[1+\mu_0(1-s)]^{-1}$, которое по теореме непрерывности эквивалентно (22).

3. Полученные выше результаты будем использовать при рассмотрении простого одномерного случайного блуждания с дискретным временем. В книге С. Карлина [4, гл. 2, гл. 3] рассматривается марковская цепь, пространство состояний которой состоит из целых неотрицательных чисел $0, 1, 2, \ldots, N$ и которая имеет матрицу переходных вероятностей $\{p_{ij}\}$

$$p_{ij}=\begin{cases}\mu_i & ,\ j=i-1\\ \lambda_i & ,\ j=i+1\\ 1-\lambda_i-\mu_i, & j=i\\ 0 & ,\ |i-j|\geqq 2\end{cases}, \tag{25}$$

где $\mu_i \geqq 0$, $\lambda_i \geqq 0$, $\lambda_i + \mu_i \leqq 1$. Ту же самую вероятностную схему можно рассматривать и как случайное блуждание одной частицы по прямой. Из состояния $i$ за единицу времени частица перемещается на единицу расстояния влево с вероятностью $\mu_i$, вправо с вероятностью $\lambda_i$ или остается в этом же состоянии с дополнительной вероятностью $1-\lambda_i-\mu_i$.

Рассмотрим случай, когда $\lambda_0 > 0$, $\mu_0 = 0$, а состояние $N$ поглощающее, т. е. $\lambda_N = \mu_N = 0$. Эту схему можно трактовать с точки зрения теории надежности. Рассмотрим систему из $N$ работающих элементов. В момент $t_0 = 0$ вероятность, что за единицу времени откажет ровно один элемент, равна $\lambda_0$. Если произойдет отказ, система переходит в состояние 1 (работают $N-1$ элемента), иначе остается в том же самом состоянии. Из состояния 1 система может перейти в начальное состояние, остаться в состояние 1 или перейти в состояние 2 с переходными вероятностями (25) и т. д. Когда система попадет в состояние $N$, она не работает — все элементы отказали.

Пусть $T_N$ — случайное время, за которое система впервые переходит из состояния 0 в состояние $N$. Обозначим через $p_{0N}^{(n)}$ вероятность перехода за время $n$ из 0 в $N$. Ясно, что $P_{0N}^{(n)} = 0$, если $n < N$, и пусть $P_{0N}(s)$ — производящая функция

$$P_{0N}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{0N} s^n. \tag{26}$$

Из уравнения Чепмена — Колмогорова получаем

$$s \sum_{j=0}^{N} p_{\nu j} P_{jk}(s) = P_{\nu k}(s) - P_{\nu k}, \tag{27}$$

и при $k = N$ и $v = 0, 1, \ldots, N$ получаем $N+1$ алгебраические уравнения, из которых находим

$$P_{0N}(s) = [(-1)^N s^{N-1} \prod_{k=0}^{N-1} \lambda_k] / [(1-s) \Delta_N(s)], \tag{28}$$

где $\Delta_N(s)$ — полином степени $N$ относительно $s$. С другой стороны, очевидно

$$P_{0N}^{(0)} = P(T_{N \leqq n}). \tag{29}$$

Используя равенство (29) в (26), находим производящую функцию случайной величины $T_N$

$$T_{0N}(s) = Es^{T_N} = s(1-s) P_{0N}(s) \tag{30}$$

или

$$T_{0N}(s) = (-1)^N s^N \lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_N \Delta_N^{-1}(s), \tag{31}$$

подставляя вместо $P_{0N}(s)$ равное ему по (28). Если распишем подробно определитель $\Delta_N(s)$, который получается при решении системы (27), получим следующую рекуррентную зависимость:

$$\Delta_N(s) = [s(1-\lambda_{N-1}-\mu_{N-1})-1] \Delta_{N-1}(s) - s^2 \mu_{N-1} \lambda_{N-2} \Delta_{N-2}(s), \tag{32}$$

причем $\Delta_0(s) = 1$, $\Delta_1(s) = s(1-\lambda_0) - 1$.

Обозначим через $a_0(N)$ коэффициент перед $s^N$ в $\Delta_N(s)$. Тогда верна следующая

Лемма 1. *Если параметры $\lambda_k$ и $\mu_k$ такие, что $a_0(N)>0$ для каждого $N$, то все корни полинома $\Delta_N(s)$ больше чем 1.*

Доказательство. Так как $0<\lambda_0<1$, то корень $\alpha_1^{(1)}$ на $\Delta_1(s)$ равен $\alpha_1^{(1)}=(1-\lambda_0)^{-1}>1$. Из (32) находим $\Delta_2(1)=\lambda_0\lambda_1>0$ и $\Delta_2(\alpha_1^{(1)})=-(\alpha_1^{(1)})^2\mu_1\lambda_0-1\leq 0$, т. е. в интервале $(1, \alpha_1^{(1)}]$ полином $\Delta_2(s)$ меняет знак. Следовательно, $\alpha_1^{(2)}>1$ и $\Delta_2(\infty)>0$, имеется еще один корень $\alpha_2^{(2)}$, который находится между $\alpha_1^{(1)}$ и $\infty$. Аналогичным образом получаем, что нули полинома $\Delta_3(s)$ находятся в интервалах $(1, \alpha_1^{(2)}]$, $(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}]$, $(\alpha_2^{(2)}, +\infty)$. Используя рекуррентную связь (32), утверждение можно доказать для любого $N$.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ — нули полинома $\Delta_N(s)$. Все они, конечно, зависят от $N$, но этого мы не будем подчеркивать, выписывая явно эту зависимость. Согласно леммы 1 можно $\Delta_N(s)$ записать так:

$$\Delta_N(s)=a_0\prod_{k=1}^{N}(s-\alpha_k),\ \alpha_k>1,\ k=1, 2, \ldots, N.$$

Тогда (31), если учтем, что $T_{0N}(1)=1$, будет

$$T_{0N}(s)=s^N\varrho_N\Big/\left[\prod_{k=1}^{N}(1-\alpha_k^{-1}s)\right],\ \varrho_N=\prod_{k=1}^{N}(1-\alpha_k^{-1}). \tag{33}$$

Вид (33) производящей функции $T_{0N}(s)$ случайной величины $T_N$ показывает, что $T_N$ можно представить как сумму $T_N=N+\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_N$, где $\tau_k$, $k=1, \ldots, N$ — независимые случайные величины, каждая из которых распределена геометрически, соответственно с параметрами $q_k=\alpha_k^{-1}$, $p_k=1-q_k$ Тогда величина $\zeta_N=T_N-N$ имеет распределение, принадлежащее к классу $R_d$, как сумма независимых величин из $R_d$. Раньше отметили, что в случае геометрического распределения константа $\alpha$ в (17) равна $\alpha=q\,|\,p=\mu_1$. Если имеем сумму двух геометрических распределенных и независимых случайных велечин, то

$$\alpha=\max(\mu_1^{(1)}, \mu_1^{(2)}), \tag{34}$$

где $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ — средние значения этих величин. Вообще верно следующее утверждение.

Лемма 2. *Для суммы из $n$ независимых геометрических распределенных случайных величин константа $\alpha$, для которой выполнено неравенство* (17), *равна*

$$\alpha=\max(\mu_1^{(1)}, \mu_1^{(2)}, \ldots, \mu_1^{(n)}), \tag{35}$$

*где $\mu_1^{(k)}$, $k=1, 2, \ldots, n$ — первые моменты соответствующих распределений.*

Доказательство. Докажем (35) в случае $n=2$. При $n>2$ доказательство проводится аналогично. Обозначим через $p_1$ и $p_2$ параметры двух геометрических распределений, причем $q_1=1-p_1$, $q_2=1-p_2$. Не ограничивая общности, можно предположить, что $\mu_1^{(1)}=q_1/p_1\geq q_2/p_2=\mu_1^{(2)}$. Пусть $\Phi(x)$ — распределение суммы этих двух величин. Непосредственные подсчеты дают

$$\bar{\Phi}(n+1)=p_1p_2(1-\varrho)^{-1}[q_2^{n+1}(1-q_2)^{-1}-\varrho q_1^{n+1}(1-q_1)^{-1}]$$

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \bar{\Phi}(\nu+1)=(1-q)^{-1}[p_2^{-1}p_1q_2^{n+1}-\varrho p_1^{-1}p_2q_1^{n+1}],$$

где $\varrho=q_1/q_2$. Определим $\alpha=\sup\beta$ по всем $\beta$, для которых равномерно относительно $n$ выполнено неравенство

$$\bar{\Phi}(n+1)\Big| \sum_{\nu=n}^{\infty} \bar{\Phi}(\nu+1)\leqq(1+\beta)^{-1}. \tag{36}$$

Если положим $d=p_1q_2^{n+1}-\varrho p_2q_1^{n+1}$, то из (36) находим

$$\beta d\leqq(p_1p_2)^{-1}[p_1^2q_2^{n+2}-\varrho p_2^2q_1^{n+1}]. \tag{37}$$

Так как по предположению $p_1q_2\leqq q_1p_2$, то из (37) получаем $\beta\leqq q_1/p_1=\mu_1^{(1)}$ и, следовательно, $\alpha=\mu_1^{(1)}=\max(\mu_1^{(1)}, \mu_1^{(2)})$.

Дальше мы будем предполагать параметры $\lambda_k$ и $\mu_k$ из (25) такими, что лемма 1 имеет место и, следовательно, величина $\zeta_N$ является суммой геометрически распределеных и независимых случайных величин. Параметры этих геометрических распределений обозначим через $p_k, q_k=1-p_k, k=1, 2,..., N$. Используя факт этого представления и теорему 3, можно доказать следующую

Т е о р е м у 4. *Пусть $T_N$, — время, за которое система впервые пере ходит из состояния 0 в состояние $N$ при матрице перепада (25). Тогда если при $N\to\infty$ выполнены условия*

$$E(T_N-N)\to\mu_0=q/p,\ p+q=1,\ p>0, \max_{1\leqq k\leqq N}\frac{q_k}{p_k}\Big|\sum_{k=1}^{N}q_k/p_k\to 1, \tag{38}$$

*случайная величина $T_N-N$ асимптотически геометрически распределена, т. е.*

$$\lim_{N\to\infty} P(T_N-N=k)=pq^k,\ k=0, 1, 2, \ldots \tag{39}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как мы видели, случайную величину $\zeta_N=T_N-N$ можно представить в виде суммы $N$ независимых и геометрически распределенных величин $\tau_k$. Следовательно, распределение величины $\zeta_N$ принадлежит классу $R_d$, и неравенство (18) будет иметь место, если существует соответствующая константа $\alpha$. Согласно лемме 2 эта константа $\alpha$ равна $\alpha=\max\limits_{1\leqq k\leqq N}(q_k|p_k)$. Тогда условия (38) в точности те, при которых верно утверждение теоремы 3. Иными словами, верно предельное соотношение (39).

Второе из условий в (38) выражается через параметры $q_k/p_k=\mu_1^{(k)}$, $k=1, 2, \ldots, N$, которые можно записать через нули полинома $\Delta_N(s)$ просто $\mu_1^{(k)}=\alpha_k^{-1}$. То же самое относится к среднему значению величины $T_N-N$. Проверка выполнения условий (38), выраженных через нули $\alpha_k$, для практики непригодна. Поэтому сейчас мы найдем среднюю величину $T_N$, выраженную через выходные параметры $\lambda_k$ и $\mu_k$.

4. Чтобы найти $ET_N$, рассмотрим вместо данного процесса, определенного через вероятности перехода (25), новый, который совпадает с выходным до его попадения в состояние $N$. Новый процесс, попав в состояние $N$, за единицу времени возвращается в состояние 0 с вероятностью единица. Вероятности перехода нового процесса следующие:

$$\widetilde{p}_{ij} = p_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$(40) \qquad \widetilde{p}_{N-1\,N} = \lambda_{N-1}$$

$$\widetilde{p}_{N0} = 1.$$

Пусть $\pi_k$ — стационарные вероятности так определенного процесса (40) Хорошо известно, что эти вероятности удовлетворяют систему уравнений $\sum_{i=0}^{N-1} \pi_i \widetilde{p}_{ij} = \pi_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$, которая, учитывая (40), сводится к системе

$$(41) \qquad \begin{aligned} &\lambda_0\pi_0 + \mu_2\pi_2 = (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 \\ &\lambda_1\pi_1 + \mu_3\pi_3 = (\lambda_2 + \mu_2)\pi_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\lambda_{N-2}\pi_{N-2} = (\lambda_{N-1} + \mu_{N-1})\pi_{N-1} \\ &\lambda_{N-1}\pi_{N-1} = \pi_N. \end{aligned}$$

Последовательно подставляя последнее равенство из (41) в предыдущее и т. д., систему (40) сведем к

$$(42) \qquad \begin{aligned} &\mu_i\pi_i - \lambda_{i-1}\pi_{i-1} = \pi_N, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 \\ &\lambda_{N-1}\pi_{N-1} = \pi_N. \end{aligned}$$

$ET_N$ найдем, используя то, что отношение $1/(1+ET_N)$ равно стационарной вероятности $\pi_N$. Это следует из факта, что для последовательности чередующихся периодов времен $T_N$ (время, прошедшее от состояния 0 до $N$) и $t_N$ (время от $N$ до 0) вероятность $\pi_N$ является стационарным коэффициентом готовности $ET_N/E(T_N+t_N)$. Так как $t_N = 1$, то $\pi_N = 1/(1+ET_N)$, из которого равенства и определяем $ET_N$

$$(43) \qquad ET_N = \pi_N^{-1}(1-\pi_N) = \pi_N^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} \pi_i.$$

Из (43) видно, что для нахождения $ET_N$ надо знать вероятности $\pi_k$. Последние находим, решая систему (42). Имеем

$$(44) \qquad \begin{aligned} \pi_i = \pi_0 \lambda_i^{-1} \left( \sum_{\nu=1}^{N} \theta_\nu \right)^{-1} \Bigg( 1 &+ \frac{\mu_{i+1}}{\lambda_{i+1}} + \frac{\mu_{i+1}\mu_{i+2}}{\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}} \\ &+ \cdots + \frac{\mu_{i+1}\mu_{i+2}\cdots\mu_{N-1}}{\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}\cdots\lambda_{N-1}} \Bigg), \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \end{aligned}$$

$$\theta_\nu = \frac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{\nu-1}}{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{\nu-1}}, \quad \theta_1 = \lambda_0^{-1}.$$

Подставляя в равенство (43) вероятности $\pi_i$ из (44), находим окончательно

$$ET_N = \sum_{i=1}^{N} \theta_i + \sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_{i+1}}{\lambda_i\lambda_{i+1}} + \cdots + \frac{\mu_{i+1}\mu_{i+2}\cdots\mu_{N-1}}{\lambda_i\lambda_{i+1}\cdots\lambda_{N-1}} \right).$$

Предположим, что параметры $\lambda_k$ и $\mu_k$ такие, что $ET_N \to \infty$, когда $N \to \infty$. Тогда предельное распределение величины $T_N - N$ будет непрерывным, а именно:

Время $T_N$ перехода из состояния 0 в состояние $N$ для марковской цепи с вероятностями перехода (25) асимптотически экспоненциально распределено

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\frac{T_N - N}{ET_N - N} < x\right) = 1 - e^{-x},\ x \geqq 0, \tag{45}$$

когда $DT_N/(ET_N)^2 \to 1,\ N \to \infty$.

Утверждение (45) является следствием аналогичного более общего утверждения, доказанного в работе [1], теорема 2.

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. Obretenov. Convergence of IFR-Distributions to the exponential one *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 18, 1977, 1385—1388.
2. О. П. Виноградов. Об одном свойстве логарифмически вогнутых последов. *Матем. заметки*, 18, 1975, No 3, 467—472.
3. А. Обретенов. Изследване на възстановяванията при логаритмично вдлъбнато дискретно остатъчно разпределение. *Годишник на Соф. унив., Мат. фак.*, 70, 1977 (в печати).
4. С. Карлин. Основы теории случайных процессов. Москва, 1971.

*Единый центр математики и механики*
*1090 София П. Я. 373*

*Поступила 10. 11. 1977*