Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

АДДИТИВНЫЕ ТЕОРИИ КОГОМОЛОГИЙ НА НЕКОТОРЫХ КАТЕГОРИЯХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

СТАНИСЛАВА В. ПЕТКОВА

В работе рассматривается роль условия Π-аддитивности для однозначного определения теорий когомологий в некоторых категориях топологических пространств. Отмечено, что условие Π-аддитивности (вместе с обычными аксиомами Стинрода — Эйленберга) определяет однозначно теорию когомологий на паракомпактных когомологически локально связных относительно этой теории пространствах. На категории паракомпактных пространств естественное преобразование двух Π-аддитивных теорий когомологий — изоморфизм, если оно — локальный изоморфизм (каждая точка пространства имеет такую окрестность, что для замкнутых во всем пространстве ее подмножеств преобразование когомологий — изоморфизм). В частности, спектральные когомологии являются единственным Π-аддитивным распространением этих когомологий с категории компактных пространств на категорию локально компактных паракомпактных пространств.

Напомним условие Π-аддитивности для произвольной теории когомологий H^*.

Если пространство X — объединение своих открытых непересекающихся подпространств X_α, то гомоморфизмы $i^*_\alpha : H^n(X) \to H^n(X_\alpha)$, индуцированные вложениями $i_\alpha : X_\alpha \to X$, определяют для каждого n проективное представление группы $H^n(X)$ в виде прямого произведения групп $H^n(X_\alpha)$.

Известно, что условие Π-аддитивности определяет однозначно обычные когомологии на категории пространств, имеющих гомотопический тип произвольного полиэдра [**4**]. Это дает возможность построить на категории паракомпактных пространств естественное преобразование спектральных когомологий в произвольную Π-аддитивную теорию когомологий.

Оказывается, что условие Π-аддитивности определяет однозначно теорию когомологий и на категории паракомпактных (хаусдорфовых), когомологически локально связных относительно этой теории пространств, в частности и на категории паракомпактных хаусдорфовых слабо локально стягиваемых пространств.

Напомним, что пространство X — когомологически локально связно в размерности n относительно некоторой теории когомологий H^*, если для каждого $x \in X$ и каждой окрестности U на x существует окрестность V на x, такая, что образ $H^n(U)$ в $H^n(V)$ при гомоморфизме индуцированной вложением $V \to U$ — нулевой (при $n=0$ — приведенные когомологии).

Когомологически локальную связность вплоть до размерности n будем обозначать через clc^n, а во всех размерностях — через clc^∞.

Пространство X — слабо локально стягиваемое, если для каждой точки $x \in X$ и окрестности U на x существует окрестность V на x, $V \subset U$, которая стягивается в x по U.

Случай паракомпактных слабо локально стягиваемых пространств рассмотрен в [1].

Воспользуемся, как и в [1], одним утверждением, являющимся непосредственным следствием теоремы 3.6 из [5].

Утверждение 1. *Если для H^*, $H^n=0$ при $n<0$, а X — паракомпактное хаусдорфовое,* clc^n *относительно H^* пространство, то в любое открытое покрытие α пространства X можно вписать такое локально конечное покрытие β, что в диаграмме*

$$\begin{tikzcd}
H^k(X) & & H^k(\alpha) \arrow[ll, "\pi^*_\alpha"'] \\
& H^k(\beta) \arrow[ul, "\pi^*_\beta"] \arrow[ur, "(\pi^\beta_\alpha)^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Рис. 1

$\mathrm{Ker}\ \pi^*_\alpha \subset \mathrm{Ker}\ (\pi^\beta_\alpha)^*$ *при* $k \leq n+1$, *а* π^*_β — *эпиморфизм при* $k \leq n$.

(Здесь π^*_α, π^*_β и $(\pi^\beta_\alpha)^*$ — гомоморфизмы, индуцированные отображениями X в нервы покрытия α и β и проекцией нервов $\beta \to \alpha$).

Так как $H^*(X) = \varinjlim H^*(\alpha)$, где прямой предел взят по всем открытым покрытиям пространства X, то из вышеупомянутого утверждения получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Если H^* — Π-аддитивная теория когомологий с $H^n=0$ при $n<0$, а X —* clc^n *относительно H^* паракомпактное хаусдорфовое пространство, то естественный гомоморфизм $\gamma: \check{H}^k(X) \to H^k(X)$ спектральных когомологий в эту теорию — эпиморфизм при $k \leq n$ и мономорфизм при $k \leq n+1$.*

Отметим, что если X — clc^∞, то γ — изоморфизм во всех размерностях.

В частности верно следующее предложение из [1].

Предложение 1. *В категории слабо локально стягиваемых паракомпактных (хаусдорфовых) пространств любая Π-аддитивная теория когомологий H^*, удовлетворяющая аксиомам Стинрода — Эйленберга и такая, что $H^n=0$ при $n<0$, эквивалентна теории спектральных когомологий (или сингулярной теории).*

Напомним, что в этой категории все гомологии с компактными носителями тоже эквивалентны между собой [3]. Более того, естественное преобразование $T: {}_sH_* \to H_*$ сингулярной теории гомологий в теорию с компактными носителями — изоморфизм (рассматриваются удовлетворяющие аксиомам Стинрода — Эйленберга теории H_*, для которых $H_n=0$ при $n<0$).

На многих категориях, однако, условие Π-аддитивности не определяет теории когомологий однозначно (спектральные и сингулярные когомологии, например, на категории компактных пространств не эквивалентны).

Докажем некоторые предложения, выясняющие роль условия Π-аддитивности на таких категориях.

Пусть $'H^*$ и $''H^*$ — Π-аддитивные теории когомологий на категории топологических пространств, а $\gamma: {'H^*} \to {''H^*}$ — естественное преобразование этих теорий.

Теорема 2. *Если U — открытое нормальное покрытие топологического пространства X, а γ — изоморфизм для замкнутых в X подмножеств элементов из U, то γ — изоморфизм для всего пространства X.*

Доказательство. Чтобы доказать теорему 2, воспользуемся леммой 5.3 из [6]. Пусть U — произвольная фамилия подмножеств из X, а $\mu^*(U)$, $\sigma^*(U)$ и $\Sigma(^*U)$ — фамилии в X, определенные следующим образом:

$\mu^*(U)=\{F\subset X,\ F$ — замкнутое в X подмножество некоторого элемента из $U\}$;

$\sigma^*(U)=\{F\subset X,\ F$ — объединение конечного числа замкнутых в X элементов из U, таких, что их внутренность относительно F покрывает $F\}$;

$\Sigma^*(U)=\{F\subset X,\ F$ — дискретное объединение замкнутых в X элементов из $U\}$.

Тогда, если U — открытое нормальное покрытие топологического пространства X, то по лемме 5.3 из [6], $X\in\sigma^*\Sigma^*\sigma^*\Sigma^*\mu^*(U)$. Теорема 2 будет доказана, если докажем, что γ — изоморфизм для каждого элемента фамилии $\sigma^*\Sigma^*\sigma^*\Sigma^*\mu^*(U)$. Изоморфность γ для элементов $\mu^*(U)$ дана по условию. Отметим дальше, что если γ — изоморфизм для всех элементов некоторой фамилии V, то γ — изоморфизм и в $\Sigma^*(V)$. Это следует из того факта, что обе теории когомологий $'H^*$ и $''H^*$ — Π-аддитивные, а γ — естественное преобразование одной теории в другую. Получили, что γ — изоморфизм и для всех элементов фамилии $\Sigma^*\mu^*(U)$. Чтобы перейти к следующей фамилии покажем, что если γ — изоморфизм в V и $\mu^*(V)$, то γ — изоморфизм и в $\sigma^*(V)$ (для произвольной фамилии V). Достаточно рассмотреть случай, когда элемент $F\in\sigma^*(V)$ является суммой двух замкнутых в X множеств из V — F_1 и F_2, таких, что $F_1\cup F_2=F_1^0\cup F_2^0$ (внутренность F_i^0, $i=1,2$ берется относительно множества $F=F_1\cup F_2$). Из равенства $F_1\cup F_2=F_1^0\cup F_2^0$ следует, что триада $(F;F_1,F_2)$ — собственна относительно произвольной теории когомологий, поэтому для нее и $'H^*$, $''H^*$ существуют точные аддиционные последовательности. В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots {'H^{n-1}}(F_1)+{'H^{n-1}}(F_2) & \to & {'H^{n-1}}(F_1\cap F_2) & \to & {'H^n}(F) & \to & {'H^n}(F_1)+{'H^n}(F_2)\\
\downarrow\gamma & & \downarrow\gamma & & \downarrow\gamma & & \downarrow\gamma\\
\cdots {''H^{n-1}}(F_1)+{''H^{n-1}}(F_2) & \to & {''H^{n-1}}(F_1\cap F_2) & \to & {''H^n}(F) & \to & {''H^n}(F_1)+{''H^n}(F_2)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\to {'H^n}(F_1\cap F_2)\to\cdots\\
\downarrow\gamma\\
\to {''H^n}(F_1\cap F_2)\to\cdots
\end{array}$$

F_1 и F_2 принадлежат фамилии V, а $F_1\cap F_2$ — фамилии $\mu^*(V)$. Следовательно, для F_1, F_2 и $F_1\cap F_2$, γ — изоморфизм. Тогда из написанной диаграммы следует, что γ — изоморфизм и для F. Ометим еще, что выполнены вложения: $\mu^*\mu^*(V)=\mu^*(V)$, $\mu^*\sigma^*(V)\subset\sigma^*\mu^*(V)$ и $\mu^*\Sigma^*(V)\subset\Sigma^*\mu^*(V)$. Рассмотрим теперь фамилию $\sigma^*\Sigma^*\mu^*(U)$. Для $\Sigma^*\mu^*(U)$ и $\mu^*\Sigma^*\mu^*(U)\subset\Sigma^*\mu^*(U)$ уже доказано, что γ — изоморфизм. Тогда, по сделанному выше замечанию, γ — изоморфизм и в $\sigma^*\Sigma^*\mu^*(U)$, а значит и в $\Sigma^*\sigma^*\Sigma^*\mu^*(U)$. Пользуясь еще раз вышеупомянутым замечанием и вложением $\mu^*\Sigma^*\sigma^*\Sigma^*\mu^*(U)\subset\Sigma^*\sigma^*\Sigma^*\mu^*(U)$, получаем, что γ — изоморфизм в $\sigma^*\Sigma^*\sigma^*\Sigma^*\mu^*(U)$. Этим теорема доказана.

В случае, когда пространство X нормально, покрытие U нормально тогда и только тогда, когда в нем можно вписать локально конечное покрытие.

Получаем следующее предложение.

Предложение 2. *Если U — локально конечное открытое покрытие нормального пространства X, а естественное преобразование $\gamma : {}'H^* \to {}''H^*$ двух Π-аддитивных теорий когомологий — изоморфизм для замкнутых в X подмножеств элементов из U, то γ — изоморфизм для всего X.*

В частности, когда X — паракомпактно (и хаусдорфово) каждое покрытие — нормально. Поэтому, для паракомпактных пространств верно

Предложение 3. *Если для каждой точки паракомпактного пространства X существует окрестность (не непременно открытая), такая, что естественное преобразование $\gamma : {}'H^* \to {}''H^*$ двух Π-аддитивных теорий когомологий — изоморфизм для каждого замкнутого в X подмножества этой окрестности, то γ — изоморфизм для всего пространства X.*

Следствие 1. *Если естественное преобразование двух Π-аддитивных теорий когомологий — изоморфизм на категории компактных пространств, то оно изоморфизм и на категории локально компактных паракомпактных пространств.*

Напомним, что на категории паракомпактных пространств спектральные когомологии отображаются естественным образом в произвольную Π-аддитивную теорию когомологий. Тогда из следствия 1 получаем

Предложение 4. *Спектральные когомологии являются единственным Π-аддитивным распространением этих когомологий с категории компактных пространств на категорию локально компактных паракомпактных пространств.*

Аналогичное предложение в случае локально компактных счетных в бесконечности пространств доказано в [2]. (Из него следует предложение 4, так как локально компактное пространство паракомпактно тогда и только тогда, когда оно представимо в виде дискретного объединения локально компактных счетных в бесконечности пространств.)

Вообще, для нормальных пространств верно утверждение из [2].

Пусть H^* — Π-аддитивная теория когомологий, а X — нормальное пространство, являющееся объединением своих замкнутых подмножеств X_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, таких что $X_k \subset \operatorname{Int} X_{k+1}$. Обозначим через $d_n : \prod_{k=1}^{\infty} H^n(X_k) \to \prod_{k=1}^{\infty} H^n(X_k)$ гомоморфизм, заданный формулой $d_n(h_1, h_2, h_3, \ldots) = (h_1 - i_1^* h_2, h_2 - i_2^* h_3, h_3 - i_3^* h_4, \ldots)$, ($i_k : X_k \to X_{k+1}$ — вложения), а через $\varphi : H^n(X) \to \varprojlim H^n(X_k)$ — естественное отображение $H^n(X)$ в $\varprojlim H^n(X_k)$. Тогда короткая последовательность

$$0 \to \prod_{k=1}^{\infty} H^{n-1}(X_k)_{\operatorname{Im} d_{n-1}} \to H^n(X) \xrightarrow{\varphi} \varprojlim H^n(X_k) \to 0$$

точна (заметим, что $\prod_{k=1}^{\infty} H^{n-1}(X_k)_{\operatorname{Im} d_{n-1}} = \varprojlim^{(1)} H^{n-1}(X_k)$).

В частном случае, когда X — локально компактное, счетное в бесконечности (и только тогда), множества X_k можно выбрать компактными. Тогда условие Π-аддитивности можно заменить на более слабое условие — потребовать выполнение Π-аддитивности только в тех случаях, когда X — объединение своих открытых непересекающихся компактных подмножеств.

Система аксиом, определяющая однозначно спектральные когомологии на категории локально компактных пространств, счетных в бесконечности соответственно на категории паракомпактных пространств, дана в [2] и [7]

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Петкова. Некоторые теоремы единственности в теории гомологий и когомологий. *Успехи мат. наук*, **28**, 1973, № 3, 195—196.
2. С. В. Петкова. Об аксиомах теорий гомологий. *Мат. сб.*, **90**, 1973, 607—624.
3. Е. Г. Скляренко. Теоремы единственности в теории гомологий. *Мат. сб.*, **85**, 1971, 201—223.
4. J. Milnor. On axiomatic homology theory. *Pacif. J. Math.*, **12**, 1962, 337—341.
5. C. N. Lee. The regular convergence theorem. *Mich. Math. J.*, **14**, 1967, 207—217.
6. E. Michael. Local properties of topological spaces. *Duke Math. J.*, **21**, 1954, 163—171
7. P. Bacon. Axioms for the Čech cohomology of paracompacta. *Pacif. J. Math.*, **52**, 1974 7—9.

Единый центр. математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 27. 10. 1977