Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

VERALLGEMEINERUNGEN DIRICHLETSCHER UND LAMBERTSCHER REIHEN

HANS-JÜRGEN GLAESKE, HANS-JÜRGEN SEBASTIAN

In dieser Arbeit werden Untersuchungen über Verallgemeinerungen Dirichletscher und Lambertscher Reihen durchgeführt, die sich in natürlicher Weise bei der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Anzahl der Zerfällungen natürlicher Zahlen in Potenzen der Form $(Ml\pm a)^{\lambda}$, $\lambda=1, 2, \ldots$, ergeben. Aufbauend auf früheren Ergebnissen der Verfasser über eine Klasse verallgemeinerter Besselfunktionen werden Sätze über die absolute und gleichmäßige Konvergenz der betrachteten Reihen und damit für die Holomorphie der durch sie dargestellten Funktionen bewiesen.

0. Einführung. In der analytischen Zahlentheorie, etwa bei der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Anzahl der uneingeschränkten Zerfällungen natürlicher Zahlen in Potenzen natürlicher Zahlen, spielen eine besondere Rolle Funktionen, die sich in Form von Lambertreihen oder als Summen über spezielle Dirichletsche Reihen, sogenannte Polylogarithmen, schreiben lassen, wie das etwa in [2; 7] ausgeführt wurde.

So spielen z. B. in der Theorie der uneingeschränkten Zerfällungen natürlicher Zahlen in natürliche Zahlen der Gestalt $(Ml\pm a)$, $l=0, 1, 2, \ldots$, $(a, M)=1$, die Funktionen

$$L_{s-1}(\omega\,;\,a, \beta)=\sum_{k=1}^{\infty} k^{s-1}\exp[2k\pi i(a\omega+\beta)][1-\exp(2\pi ik\omega)]^{-1} \tag{1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} l_{1-s}[(n+a)\omega+\beta]$$

eine besondere Rolle.

Hierbei ist l_s der durch

$$l_s(z)=\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} e^{2\pi ikz} \tag{2}$$

für $\mathrm{Im}(z)>0$ oder $\mathrm{Im}(z)=0$, $\mathrm{Re}(s)=\sigma>1$ (absolute Konvergenz) erkläərte Polyeogarithmus.

Falls man Zerfällungen in Potenzen $(Ml\pm a)^{\lambda}$, $\lambda=1, 2, \ldots$ betrachtet dienen nach [3; 8] als Hilfsfunktionen

$$L_{s-1}^{(\lambda)}(\omega\,;a, \beta)=\sum_{n=0}^{\infty} l_{1-s}[(n+a)^{\lambda}\omega+\beta]. \tag{1'}$$

In [5] wird gezeigt, daß es in Verallgemeinerung von (1,1′) sinnvoll ist, Reihen der Gestalt

$$(1'') \qquad L_{s-1}\left(\omega;\ \begin{matrix}\alpha & \beta \\ \lambda, & \mu\end{matrix}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} l^{(\mu)}_{\mu-1-s}[(-2\pi i)^{\mu}(n+\alpha)^{\lambda}\omega;\beta$$

zu betrachten, wobei die Funktionen $l^{(\mu)}_s$ durch

$$(2') \qquad l^{(\mu)}_s(z;\beta)=\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\mu s}e^{2k\pi i}\,h^{(\mu)}_{\mu-1-s}(k^{\mu z})$$

definiert sind. Dabei sind die Funktionen $h^{(\mu)}_s(z)$ die in [6] untersuchten Verallgemeinerungen der Besselfunktionen, die für $\mu=1$ mit e^{-z} übereinstimmen.

Deshalb untersuchen wir in dieser Arbeit diese Verallgemeinerungen (2′, 1″). Dirichletscher und Lambertscher Reihen.

Wir geben in § 1 die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit [6] in der Form an, wie sie für unsere Anwendungen nützlich sind.

Im zweiten Paragraphen betrachten wir Verallgemeinerungen Dirichletscher Reihen. Mit Hilfe der Mellintransformation gelingt es, Entwicklungssätze für Funktionen einer gewissen Klasse von verallgemeinerten Dirichletreihen anzugeben.

In § 3 schließlich betrachten wir eine spezielle verallgemeinerte Lambert reihe und untersuchen deren Konvergenzeigenschaften.

Zu einigen Bezeichnungen: Es bedeute η eine Zahl zwischen 0 und 1, ε und δ seien positive Zahlen. Potenzen werden immer als Wert im Hauptblatt interpretiert ($-\pi<\arg(\ldots)\leqq\pi$), exp (..) bedeute $e^{(\ldots)}$, wobei beide Bezeichnungen auftreten. Weiterhin seien $s=\sigma+i\tau$ und $z=x+iy$. Die Integration längs einer Vertikalen durch α werde durch (α) unter dem Integralzeichen angegeben.

Falls eine Funktion ohne Argument und Indices zitiert wird, so seien immer das Argument und die Indices der Definition gemeint.

1.1. In [6] untersuchten wir eine Funktion $h^{(\mu)}_s(z)$, die durch das folgende Integral definiert wurde:

$$(1.1) \qquad h^{(\mu)}_s(z)=\frac{\Gamma(s)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0^+,\,[(-z)^{1/\mu}]^+)} e^t(z+t^{\mu})^{-s}\,dt, \quad \sigma,\mu>0.$$

Der Integrationsweg verlaufe dabei im Hauptblatt der Riemannschen Fläche von t^{μ} von $-\infty$ kommend so, daß der Verzweigungsschnitt $-\infty<t\leqq0$ positiv derart umlaufen wird, daß der in diesem Blatt liegende Punkt $(-z)^{1/\mu}$ und der von ihm nach $-\infty$ parallel zur reellen Achse verlaufende Verzweigungsschnitt ebenfalls positiv umlaufen werde.

Aus (1.1) ergibt sich sofort die Darstellung von h als Mellin-Barnes-Integral:

$$(1.2) \qquad h^{(\mu)}_s(z)=(2\pi i)^{-1}\int_{(\sigma+\eta)}\frac{\Gamma(u)\Gamma(s-u)}{\Gamma[\mu(s-u)]}\,z^{-u}\,du.$$

Das gilt für $\sigma>0$, $0<\mu<2$ und für alle z aus dem Winkelraum $W=\{z:|z|>0$ $|\arg(z)|<\pi(2-\mu)|2$. Hieraus folgt sofort $h^{(1)}_s(z)=e^{-z}$.

Aus (1.1) erhält man leicht einen Zusammenhang mit den in [12] eingeführten Wright-Funktionen $\Phi(p;\beta;z)$.

Mit

(1.3) $$\Phi(p;\beta;z)=\sum_{l=0}^{\infty} z^l/l!\,\Gamma(pl+\beta),$$

$p>0$, β, z komplex wird für $\mu, \sigma>0$

(1.4) $$h_s^{(\mu)}(z)=\int_0^{\infty} w^{s-1}e^{-w}\Phi(\mu;\mu s;-zw)dw.$$

Die Funktion h erweist sich also als Mellintransformierte der Funktion $e^{-w}\Phi(\mu;\mu s;-zw)$.

Als Modifizierung von (1.4) ergibt sich sofort

(1.4′) $$h_s^{(\mu)}(z)=z^{-s}\int_0^{\infty(\vartheta)} w^{s-1}\,e^{-w/z}\,\Phi(\mu;\mu s;-w)\,dw$$

falls $\mu, \sigma>0$ und falls ϑ so gewählt wird, daß, $|\vartheta\text{-arg}(z)|<\pi/2$. Das Verhalten der Funktion h im Punkte $z=0$ wird durch die Angabe der Taylorreihe von h beschrieben, die sich aus (1.2) durch Linksverschieben des Integrationsweges ergibt:

(1.5) $$h_s^{(\mu)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Gamma(s+n)z^n/n!\,\Gamma[\mu(s+n)]\cdot$$

Diese Reihe erweist sich für $\mu, \sigma>0$ als beständig konvergent. Schließlich se bemerkt, daß h die folgende Funktionalgleichung erfüllt:

(1.6) $$\frac{d^n}{dz^n}\,h_s^{(\mu)}(z)=(-1)^n h_{s+n}^{(\mu)}(z).$$

1.2. Zur Behandlung verallgemeinerter Dirichletscher und Lambertscher Reihen ist es wichtig, das asymptotische Verhalten von h für $|z|\to\infty$ zu kennen. Diesem Gegenstand ist in [6] der § 3 gewidmet. Im Hinblick auf unsere Anwendungen geben wir die dortigen Ergebnisse in einer etwas modifizierten Form an: Es sei λ_n eine Folge reeller Zahlen mit $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots$ und $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$.

Wir betrachten die Funktionen $h_s^{(\mu)}(\lambda_n z)$ für $n\to\infty$. Die Sätze aus [6], § 3 lassen sich sofort auf diesen Fall übertragen und da die Faktoren λ_n immer positiv sind, bleiben die Gültigkeitsbedingungen dieser Sätze erhalten. Das ergibt:

Satz 1. *Für* $\sigma>0$, $0<\mu<2$, $|\arg(z)|<\pi(2-\mu)/2$ *gilt für* $n\to\infty$ *die asymptotische Entwicklung*

(1.7) $$h_s^{(\mu)}(\lambda_n z)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\Gamma(s+k)\,(\lambda_n z)^{-s-k}/k!\,\Gamma(-\mu k).$$

Bemerkung. Für $0<\sigma<1$ läßt sich das Ergebnis offensichtlich in der Gestalt

(1.7′) $$h_s^{(\mu)}(\lambda_n z)=-\Gamma(s+1)(z\lambda_n)^{-s-1}/\Gamma(-\mu)+O(\lambda_n^{-2+\varepsilon})$$

schreiben.

Satz 2. *Für* $\sigma>0$, $\mu\geq 2$, $|\arg(z)|\leq\pi$ *gilt für jede natürliche Zahl* N *falls* $n\to\infty$

(1.8) $$h_s^{(\mu)}(\lambda_n z) = \mu^{-s}\{(e^{\pi i} z\lambda_n)^{-s+s/\mu} \exp[(e^{\pi i} z\lambda_n)^{1/\mu}] + (e^{-\pi i} z\lambda_n)^{-s+s/\mu} \exp[(e^{-\pi i} z\lambda_n)^{1/\mu}]\}\,[1+0(\lambda_n^{-1/\mu})] + O(\lambda_n^{-N+\varepsilon}).$$

Satz 3. *Falls* $\mu, x, \sigma > 0$ *gilt für* $n \to \infty$

(1.9) $$h_s^{(\mu)}(e^{-\pi i}\lambda_n x) = \mu^{-s}(\lambda_n x)^{-s+s/\mu} \exp[(\lambda_n x)^{1/\mu}][1+O(\lambda_n^{-1/\mu})].$$

Dieses Ergebnis konnte auf gewisse z-Winkelräume erweitert werden: Mit $\Phi = (\pi + \arg(z))/\mu$ gilt der

Satz. 3'. *Für* $\mu > 0$, $0 < \sigma < 1$, $|\Phi| < \pi/2$ *gilt falls* $n \to \infty$

(1.10) $$h_s^{(\mu)}(\lambda_n z) = \mu^{-s}(e^{\pi i}\lambda_n z)^{-s+s/\mu} \exp[(e^{\pi i}\lambda_n z)^{1/\mu}]\,[1+O(\lambda_n^{-1/\mu})].$$

Die Übertragung auf Bereiche, in denen $\cos(\Phi) < 0$ gilt liefert der

Satz. 4. *Für* $\mu > 0$, $0 < \sigma < 1$, $\pi/2 < \Phi < 3\pi/2$ *(oberes Vorzeichen) bzw.* $-3\pi/2 < \Phi < -\pi/2$ *(unteres Vorzeichen) gilt für* $n \to \infty$

(1.11) $$h_s^{(\mu)}(\lambda_n z) = \pm\mu^{-s}(e^{\pi i}\lambda_n z)^{-s+s/\mu} \exp[(e^{\pi i}\lambda_n z)^{1/\mu}]\,[e^{\pm 2\pi i s} - 1]^{-1}[1+O(\lambda_n^{-1/\mu})] - \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(-\mu)}(\lambda_n z)^{-s-1} + O(\lambda_n^{2-\delta}).$$

2.1. Zur Verallgemeinerung Dirichletscher Reihen erklären wir Funktionenreihen der folgenden Art:

Definition 1. *Als Reihe vom Typ (D) bezeichnen wir Reihen der Gestalt*

(2.1) $$D_s^{(\mu)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_s^{(\mu)}(\lambda_n z).$$

Hierbei können die Koeffizienten von den Parametern s und μ abhängen. Für $\mu = 1$ erhalten wir unmittelbar die bekannten [10] Dirichletschen Reihen

(2.2) $$D_s^{(1)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}.$$

Eine hinreichende Konvergenzbedingung für Reihen von Typ (D) ergibt sich sofort mittels der Asymptotik (1.7):

Satz 1. *Falls die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n^{-\sigma-1}$$

für $0 < \alpha \leq \sigma < \infty$, $0 < \beta \leq \mu \leq \gamma < 2$ *konvergiert, so konvergiert die Reihe* (1) *im Winkelraum* W (s. (1.2)) *und die Konvergenz ist gleichmäßig in jeder abgeschlossenen Teilmenge von* W. *Die Summe* $D_s^{(\mu)}(z)$ *ist eine holomorphe Funktion von* z *in* W, *und es gilt:*

(2.3) $$\frac{d^p}{dz^p} D_s^{(\mu)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-\lambda_n)^p h_{s+p}^{(\mu)}(\lambda_n z).$$

Beweis. Nach (1.7) gilt für hinreichend große natürliche Zahlen M im Winkelraum W

$$(2.4)\qquad \left|\sum_{n=1}^{N} a_n h_s^{(\mu)}(\lambda_n z)\right| \leq \sum_{n=1}^{M} \left|a_n h_s^{(\mu)}(\lambda_n z)\right| + C \sum_{n=M+1}^{N} |a_n| \lambda_n^{-(\sigma+1)},$$

wobei $N>M$ gelte. Damit ist die gleichmäßige Konvergenz bewiesen. Nach dem Weierstraßschen Satz folgt sofort die Holomorphie von D. Mit (1.6) ergibt sich dann sofort (2.3). Nachfolgend betrachten wir den Spezialfall von (2.1) der entsteht, wenn wir $\lambda_n = n^{\mu}$ und $a_n = e^{2\pi i n\beta} n^{-\mu s}$ setzen.

Dann erhalten wir die in der Einleitung mit $l_s^{(\mu)}(z;\beta)$ bezeichnete Reihe (2'). Durch Anwendung von Satz 1 auf diesen Spezialfall ergibt sich sofort der

Satz 2. *Die Reihe*

$$(2.5)\qquad l_s^{(\mu)}(z, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\mu s} e^{2\pi i n\beta} h_{-s+1/\mu}^{(\mu)}(n^{\mu} z)$$

ist für $0<\mu<2$, $\sigma<1/\mu$ *im Winkelraum W absolut und in jedem abgeschlossenen Teilbereich von W gleichmäßig konvergent und stellt in W eine holomorphe Funktion von z dar. Für jede natürliche Zahl p gilt*

$$(2.6)\qquad \frac{d^p}{dz^p} l_s^{(\mu)}(z;\beta) = (-1)^p\, l_{s+p}^{(\mu)}(z;\beta).$$

2.2. Mit Hilfe allgemeiner Sätze über die Asymptotik der Mellintransformation, wie man sie etwa in [1], Bd. II findet, ist es leicht möglich, Bedingungen für die Entwickelbarkeit von Funktionen in Reihen von Typ (D) anzugeben.

Zunächst einige dort verwendete Bezeichnungen:

Mit $\mathfrak{V}$ bezeichnen wir die Menge aller im punktierten Winkelraum $|z|>0$, $\arg(z_1) \leq \arg(z) \leq \arg(z_2)$ holomorphen Funktionen, für die $F(z) = O(|z|^{-\gamma_1})$, $|z|<1$ und $F(z) = O(|z|^{-\gamma_2})$, $|z|>1$ mit $\gamma_1<\gamma_2$ gelten.

Mit $\mathfrak{B}$ sollen die im Parallelstreifen $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$ holomorphen Funktionen $f(u)$ bezeichnet werden, die den Exponentialabschätzungen $f(u) = O[\exp(-\arg(z_2)\omega)]$, $\omega \geq 0$ und $f(u) = O[\exp(-\arg(z_1)\omega)]$, $\omega<0$, $u=\gamma+i\omega$ genügen, wobei $\arg(z_1) < \arg(z_2)$ gelte.

Mit γ_B, γ_A, γ_G seien die Abszissen der Halbebenen gewöhnlicher, absoluter bzw. gleichmäßiger Konvergenz der Dirichlet-Reihen (2.2) bezeichnet.

Dann läßt sich der folgende Satz formulieren:

Satz 3. *Es sei*

$$f(u;s,\mu) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(s-u)}{\Gamma[\mu(s-u)]} \tilde{f}(u;s,\mu) \in \mathfrak{b}$$

mit $\gamma_1 \leq \sigma+\eta \leq \gamma_2$, $-\pi < \arg(z_1) < \arg(z_2) < \pi$ *und* $\tilde{f}$ *sei für* $\gamma \geq \gamma_A$ *in eine absolut konvergente Dirichlet-Reihe* (2.2) *entwickelbar.*

Ferner sei $\sigma>-1$ *falls* $\gamma_A \leq 0$ *und* $\sigma>\gamma_A-1$ *falls* $\gamma_A>0$. *Dann gilt:*

(a) $\mathfrak{M}^{-1}\{f, z\} = F(z;s,\mu) \in \mathfrak{V}$, $\arg(z_1)+\delta \leq \arg(z) \leq \arg(z_2)-\delta$ *mit (beliebig kleinem) positiven* δ.

(b) $F(z;s,\mu)$ *läßt sich für* $\mu>0$ *in eine für* $z \in W$ *konvergente Reihe vom Typ* (D) *entwickeln:*

$$(2.7)\qquad F(z;s,\mu) = (2\pi i)^{-1} \int_{(\sigma+\eta)} f(u;s,\mu) z^{-u} du = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_s^{(\mu)}(\mu_n z),$$

wobei $\mu_n = e^{\lambda_n}$ *ist.*

(c) *Die Koeffizienten* a_n *in* (2.7) *sind die der Dirichletreihe* (2) *von* $\tilde{f}(u; s, \mu)$.

Bemerkung. Für eine explizite Form der a_n siehe etwa [10].

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$f(u; s, \mu) z^{-u} = \frac{\Gamma(u)\Gamma(s-u)}{\Gamma[\mu(s-u)]} z^{-u} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n u}.$$

Weiterhin ist $\mathfrak{M}^{-1}\{f; z\}$ bildbar und liefert sofort

$$F(z; s; \mu)$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_{(\sigma+\eta)} f(u; s, \mu) z^{-u} du = (2\pi i)^{-1} \int_{(\sigma+\eta)} \frac{\Gamma(u)\Gamma(s-u)}{\Gamma[\mu(s-u)]} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\mu_n z)^{-u} du.$$

Die Behauptung (*a*) folgt nun sofort mittels eines bekannten Satzes aus der Theorie der Mellintransformation ([1], Bd. I, Kap. 11, § 2, Satz 1).

Die Behauptungen (b) und (c) ergeben sich sofort durch Vertauschung von Summation und Integration in der letzten Formel (was für $z \in W$ erlaubt ist)

$$F(z; s, \mu)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (2\pi i)^{-1} \int_{(\sigma+\eta)} \frac{\Gamma(u)\Gamma(s-u)}{\Gamma[\mu(s-u)]} (z\mu_n)^{-u} du = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_s^{(\mu)}(\mu_n z).$$

Wir geben einige Beispiele:

I. Mit $a_n = 1$, $\lambda_n = \log(n)$, $n = 1, 2, \ldots$ folgt aus Satz 3:

Für $\sigma, \mu > 0$ stellt $\sum_{n=1}^{\infty} h_s^{(\mu)}(nz)$ eine in W holomorphe Funktion von z dar und es gilt für $\sigma \geq 1$

$$(2\pi i)^{-1} \int_{(\sigma+\eta)} \frac{\Gamma(u)\Gamma(s-u)\zeta(u)}{\Gamma[\mu(s-u)]} z^{-u} du = \sum_{n=1}^{\infty} h_s^{(\mu)}(nz).$$

Für $\mu = 1$ entsteht hieraus der bekannte Spezialfall

$$(2\pi i)^{-1} \int_{(1+\eta)} \Gamma(u)\zeta(u) z^{-u} du = (e^z - 1)^{-1}.$$

II. Mit $a_n = e^{2\pi i n} \beta^{-\mu s}$, $\lambda_n = \log(n^\mu)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ erhält man, falls man noch s durch $1/\mu - s$ ersetzt die Aussage, daß die durch (2.5) definierte Reihe $l_s^{(\mu)}(z; \beta)$ für $0 < \beta < 1$, $\sigma < 1/\mu$, $0 < \mu < 2$ im Winkelraum W eine holomorphe Funktion von z darstellt, und daß gilt:

$$(2\pi i)^{-1} \int_{(\sigma+\eta)} \frac{\Gamma(u)\Gamma(s-u)}{\Gamma[\mu(s-u)]} z^{-u} l_{\mu(s+u)}(\beta) du = l_s^{(\mu)}(z; \beta).$$

Hier ist $l_{\mu(s+u)}(\beta)$ der in der Einleitung erklärte Polylogarithmus (2).

2.3. Ähnliche Entwicklungssätze wie Satz 3 erhält man, wenn man an Stelle von (1.2) die Darstellungen (1.1) oder (1.4) zugrundelegt. Das soll hier nicht ausgeführt werden.

Wir wollen vielmehr nur die im letzten Beispiel untersuchten Reihen $l_s^{(\mu)}(z; \beta)$ untersuchen, indem wir die Darstellung (1.1) für h zugrunde legen.

Genauer benutzen wir die aus dieser Darstellung hergeleitete asymptotische Darstellung (1.11) zur Untersuchung des Konvergenzverhaltens dieser Reihen.

Mit den dort eingeführten Bezeichnungen gilt der

Satz 4. *Für* $\mu^{-1}-1<\sigma<\mu^{-1}$, $\mu>0$, $|z|>0$, $-\pi\leq\Phi<-\pi/2$ *oder* $\pi/2<\Phi\leq\pi$ *ist die Reihe* (2.5) *absolut konvergent.*

Beweis. Trägt man (1.11) in die Reihendarstellung von l ein, so sieht man, daß zur absoluten Konvergenz der Reihe l die Konvergenz der Reihen $\sum_{n=M}^{\infty} n^{-\mu\sigma}(n^{\mu})^{(\sigma-1/\mu)(1-1/\mu)}|\exp[(e^{\pi i}z)^{1/\mu}](n^{\pi})^{1/\mu}|$ und $\sum_{n=M}^{\infty} n^{-1-\mu}$ hinreichend ist. Das gibt mit den Bedingungen von (1.11) sofort Anlaß zu den Voraussetzungen von Satz 4, wenn man nur beachtet, daß dort σ durch $\mu^{-1}-\sigma$ zu ersetzen ist.

3.1. Als verallgemeinerte Lambertreihen wollen wir Reihen der Gestalt

$$L_s^{(\mu)}(z;\beta)=\sum_{n=1}^{\infty} l_s^{(\mu)}(nz;\beta) \tag{3.1}$$

bezeichnen.

Für spezielle Werte der Parameter fällt (3.1) mit den klassischen Lambertreihen zusammen. So wird für $s=0$, $\mu=1$, $\beta=0$, $\mathrm{Re}(z)>0$ wegen $h_1^{(1)}(nz)=e^{-nz}$ sofort $L_0^{(1)}(z;0)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nz}(1-e^{-nz})^{-1}$ und das ist die wohlbekannte Lambertreihe (s. [9]).

Bezüglich der Holomorphie der durch (3.1) dargestellten Funktion gilt der

Satz 1. *Für* $0<\mu<2$, $0<\beta<1$, $\sigma<1/\mu$ *stellt* $L_s^{(\mu)}(z;\beta)$ *eine im Winkelraum* W *holomorphe Funktion von* z *dar.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß die Reihe (3.1) in W absolut und fast gleichmäßig konvergent ist. Damit folgt dann nach dem wohlbekannten Weierstraßschen Satz die Behauptung.

Nach (1.7) gilt für hinreichend großes natürliches M für alle $N>M$

$$\left|\sum_{k=1}^{N} k^{-\mu s}h_{-s+1/\mu}^{(\mu)}(k^{\mu}nz)e^{2\pi ik\beta}\right|\leq\sum_{k=1}^{M} k^{-\mu\sigma}|h_{-s+1/\mu}^{(\mu)}(k^{\mu}nz)|+\bar{C}(n|z|)^{\sigma-1-1/\mu}\sum_{k=M+1}^{N} k^{-1-\mu}.$$

Dabei ist $\bar{C}$ eine positive Konstante. Für $N\to\infty$ folgt dann mit einer positiven Konstante C für jedes natürliche n

$$|l_s^{(\mu)}(nz;\beta)|\leq\sum_{k=1}^{M} k^{-\mu\sigma}|h_{-s+1/\mu}^{(\mu)}(k^{\mu}nz)|+C(n|z|)^{\sigma-1-1/\mu}.$$

Analog wird für hinreichend großes M' und $N'>M'$

$$\left|\sum_{n=1}^{N'} l_s^{(\mu)}(nz;\beta)\right|\leq\sum_{n=1}^{M'}|l_s^{(\mu)}(nz;\beta)|+\sum_{n=M'+1}^{N'}|l_s^{(\mu)}(nz;\beta)|.$$

Wegen der Abschätzung der Summanden gilt nun aber

$$\sum_{n=M'+1}^{N'}|l_s^{(\mu)}(nz;\beta)|\leq\sum_{n=M'+1}^{N_1}\left\{\sum_{k=1}^{M} k^{-\mu\sigma}|h_{-s+1/\mu}^{(\mu)}(k^{\mu}nz)|+C(n|z|)^{\sigma-1-1/\mu}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{M} k^{-\mu\sigma}\sum_{n=M'+1}^{N'}|h_{-s+1/\mu}^{(\mu)}(k^{\mu}nz)|+C|z|^{\sigma-1-1/\mu}\sum_{n=M'+1}^{N'} n^{\sigma-1-1/\mu}.$$

Unter nochmaliger Verwendung von (1.7) ergibt sich weiterhin

$$\sum_{n=M'+1}^{N'} |h^{(\mu)}_{-s+1/\mu}(k^\mu nz)| \leq C'(k^\mu |z|)^{\sigma-1-1/\mu} \sum_{n=M'+1}^{N'} n^{\sigma-1-1/\mu}.$$

Damit ist die in W absolute und fast gleichmäßige Konvergenz von L gezeigt

3.2. Im Hinblick auf die in der Einleitung erwähnten Funktionen (1″) ist es angebracht an Stelle von (3.1) die Reihen

$$L_s^{(\mu)}\left(z;\ \begin{matrix}\alpha & \beta \\ \lambda & \mu\end{matrix}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} l_s^{(\mu)}[(n+\alpha)^\lambda z;\beta] \tag{3.2}$$

mit $0 \leq \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\lambda > 0$ zu betrachten.

Die eben durchgeführten Konvergenzuntersuchungen lassen sich ohne weiteres übertragen, nur ist überall n durch $(n+\alpha)^\lambda$ zu ersetzen. Damit ist die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\lambda(-\sigma+1+1/\mu)}$ nötig, was $\sigma < (1/\mu) - (1/\lambda) + 1$ erfordert.

Das Ergebnis soll nicht aufgeschrieben werden, vielmehr wollen wir im Hinblick auf die Reihen (1″) der Einleitung gleich s durch $-s+1/\mu$ und z durch $(-2\pi i)^\mu \omega$ ersetzen. Dann wird aus der Forderung bzgl. s sofort $\sigma > -1+1/\lambda$ und bzgl. ω folgt wegen $z \in W$ unmittelbar $\pi(\mu-1) < \arg(\omega) < \pi$. Mit [5], Teil I, § 2 hat man dann für die Funktionen

$$L_{s-1}\left(\omega;\ \begin{matrix}\alpha & \beta \\ \lambda & \mu\end{matrix}\right) = (-2\pi i)^{-\mu s}\,\Gamma(s) \sum_{g=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [(g+\beta)^\mu + \omega(h+\alpha)^\lambda]^{-s} \tag{3.3}$$

die für $\sigma > \lambda^{-1} + \mu^{-1}$, $\lambda, \mu > 0$, $0 < \mu < 2$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $\alpha + \beta(1-\beta) \neq 0$, $\pi(\mu-1) < \arg(\omega) < \pi$ durch (3.3) definiert sind und die sich nach [5], Teil I als meromorphe Funktionen in s erweisen, die folgende Entwicklung in verallgemeinerte Lambertreihen des Typs (3.2):

Satz 2. *Für* $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $\alpha + \beta(1-\beta) \neq 0$, $\lambda > 0$, $0 < \mu < 2$, $\sigma > \mathrm{Max}(\lambda^{-1} - 1, 0)$ *ist* $L_{s-1}\left(\omega;\ \begin{matrix}\alpha & \beta \\ \lambda & \mu\end{matrix}\right)$ *im Winkelraum* $\pi(\mu-1) < \arg(\omega) < \pi$ *eine holomorphe Funkion von* ω *und es gilt die Darstellung*

$$L_{s-1}\left(\omega;\ \begin{matrix}\alpha & \beta \\ \lambda & \mu\end{matrix}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} l^{(\mu)}_{-s+1/\mu}[(-2\pi i)^\mu (n+\alpha)^\lambda \omega;\beta]$$

als verallgemeinerte Lambertreihe.

LITERATUR

1. G. Doetsch. Handbuch der Laplace-Transformation I, II. Basel, 1950, 1955.
2. H.-J. Glaeske. Eine asymptotische Funktionalgleichung für eine Funktion eines ebenen Halbgitters. *J. Math. Soc. Jap.*, 18, 1966, 253—266.
3. H.-J. Glaske. Eine asymptotische Funktionalgleichung für eine verallgemeinerte Halbgitterfunktion. *Duke Math. J.*, 34, 1967, 23—32.
4. H.-J. Glaeske. Eine einheitliche Herleitung einer gewissen Klasse von Transformationsformeln der analytischen Zahlentheorie Habilitationsschrift. Jena, 1967.
5. H.-J. Glaeske. Eine einheitliche Herleitung einer gewissen Klasse von Transformationsformeln den analytischen Zahlentheorie. *Acta Arithm.*, 20, 1972, 133—145, 253—265.

6. H.-J. Glaeske, H.-J. Sebastian. Über eine Verallgemeinerung der Besselfunktionen *Math. Nachr.*, 67, 1975, 41—52.
7. Iseki Shô. A partition function with some congruence condition. *Amer.* T. *Math.*, 81, 1959, 939—960.
8. Iseki Shô. A generalization of a functional equation related to the theory of partition. *Duke Math.*, 27, 1960, 95—110.
9. K. Knopp. Über Lambertsche Reihen. *J. Mathematik*, 142, 1913, 283—315.
10. W. Rogosinski. Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. *Math. Z.* 20, 1924, 280—310.
11. H.-J. Sebastian. Verallgemeinerte Lambertsche Reihen. Diplomarbeit, Jena, 1968.
11. E. M. Wright. On the coefficients of power series having exponential singularities. *J. London Math. Soc.*, 8, 1933, 71—79.

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Sektion Mathematik, 69 Jena

Eingegangen am 23. 6. 1978