Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

О НЕКОТОРЫХ ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

ВЛАДИМИР М. ТИХОМИРОВ, БОРИСЛАВ Д. БОЯНОВ

Рассматривается общая методика решения некоторых выпуклых задач теории приближений, связанных с классической интерполяционной задачи Фавара и с оптимальным восстановлением линейных функционалов на основании табличной информации.

0. Введение. В теории приближений известна следующая проблема: так называемая задача Фавара. Пусть $\mathbf{t}=\{(t_1, \nu_1), \ldots, (t_n, \nu_n)\}$ — система n различных узлов t_k, $0 \leq t_k \leq 1$, $k=1, \ldots, n$ с кратностями ν_k, $k=1, \ldots, n$, таблица $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_{kj})$, $k=1, \ldots, n$, $j=0, \ldots, \nu_k-1$, $1 \leq \nu_k \leq r$, задает таблицу значений функции и ее производных в узлах t_k. Среди функций $x(\cdot)$, у которых имеется $r-1$ непрерывная производная, $r-1$ производная абсолютно непрерывна, $x^{(r)}(\cdot) \in L_p[0,1]$ таких, что $x^{(j)}(t_k)=\alpha_{kj}$, $k=1, \ldots, n$, $j=0, \ldots, \nu_k-1$, требуется найти функцию с минимальной нормой в $L_p[0,1]$ r-той производной. Аналитически задача Фавара записывается так:

$$\| x^{(r)}(\cdot) \|_{L_p[0,1]} \to \inf, \quad x^{(j)}(t_k)=\alpha_{kj}, \; k=1, \ldots, n, \; j=0, \ldots, \nu_k-1. \tag{0.1}$$

К задачам, подобным (0.1), сводится множество других, в частности ряд задач, связанных с оптимальным восстановлением линейных функционалов на основании некоторой табличной информации. Все они относятся к некоторому узкому классу задач выпуклого программирования, и следовательно, могут быть исследованы единообразно и стандартно. Цель настоящей заметки состоит в том, что мы рассказываем об этой методике сначала в общих терминах, а затем иллюстрируем ее на конкретных примерах.

1. Общая постановка задачи. Пусть X и Z — банаховы пространства, $Y=\mathbb{R}^r$, $A=\mathbb{R}^N$, $\Lambda \in \mathscr{L}(Z, X)$, $M \in \mathscr{L}(Y, X)$, $F \in \mathscr{L}(X, A)$ — линейные операторы из Z в X, Y в X и X в A, соответственно, $\boldsymbol{\alpha}$ — фиксированный элемент из A. Рассмотрим задачу:

$$\| z \| \to \inf; \; x=My+\Lambda z, \; Fx=\boldsymbol{\alpha}. \tag{1.1}$$

Общая постановка навеяна задачей Фавара, где

$$\begin{gathered} X=W_p^r[0,1]:=\{ x \mid x^{(r-1)} - \text{абс. непр.}, \; \| x^{(r)} \|_{L_p[0,1]} < \infty \}, \\ Z=L_p[0,1], \; My=M(y_1, \ldots, y_r)=\sum_{k=1}^{r} y_k t^{k-1}, \\ (\Lambda z)(t)=\frac{1}{(r-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{r-1} z(\tau) d\tau, \end{gathered} \tag{1.2}$$

оператор F сопоставляет функции $x(\cdot)$ числа $x^{(j)}(t_k)$, $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_{kj})$, $N=\nu_1+\ldots+\nu_n$.

Конечно, можно было бы значительно расширить постановку, но наша цель — не получение общих теорем, а описание методики.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 5, 1979, с. 83—96.

Обозначим через Ξ пространство $\mathbb{R}^r \times Z$ элементов $\xi = (y, z)$, $y = (y_1, \ldots, y_r)$ Задачу (1.1) перепишем так:

$$f_0(\xi) \to \inf; \ F(\xi) = 0, \tag{1.3}$$

где $f_0(\xi) = \| z \|$, $F(\xi) = (f_1(\xi), \ldots, f_N(\xi))$, $f_i(\xi) = \langle x_i^*, My + \Lambda z \rangle - \alpha_i$, $i = 1, \ldots, N$ $x_i^* \in X^*$.

Задача (1.3) принадлежит к числу простейших задач выпуклого программирования. Для задач выпуклого программирования всегда существует двойственная задача, а при наличии решения весьма просто описывается необходимое и достаточное условие минимума.

2. Общие теоремы. В этом пункте мы докажем теорему двойственности для задачи (1.3), получим для нее критерий минимума, а также отметим для частных вариантов задачи (1.3) теоремы существования, единственности и описания некоторых специфических свойств решений.

Теорема 1. (двойственности). *Пусть в задаче* (1.3) *выполнено следующее свойство: образ Ξ при отображении F совпадает с $\mathbb{R}^N$. Тогда*

$$\inf_{\substack{\langle x_i^*, My + \Lambda z \rangle = \alpha_i, \\ y \in \mathbb{R}^r, \Lambda \in \mathscr{L}(Z, X)}} \| z \| = \max_{\substack{\sum_{i=1}^N \lambda_i M^* x_i^* = 0 \\ \| \sum_{i=1}^N \lambda_i \Lambda^* x_i^* \| \leq 1}} \sum_{i=1}^N \lambda_i \alpha_i \tag{2.1}$$

Правая задача называется двойственной к задаче (1.3).

Доказательство. Обозначим нижнюю грань в задаче (1.3) через $S(\alpha)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$. В силу условия теоремы функция S конечна (ибо задача совместна). Легко проверить, что она выпукла и, следовательно, непрерывна в $\mathbb{R}^N$. По известной теореме Фенхеля — Моро (см. [1]) $S(\alpha) = S^{**}(\alpha)$. При всяком $\beta \in \mathbb{R}^N$ имеем

$$S^*(\beta) := \sup_\alpha \Big(\sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i - S(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \Big)$$

$$= \sup_\alpha \Big(\sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i - \inf \{ \| z \| : \langle x_i^*, My + \Lambda z \rangle = \alpha_i \} \Big)$$

$$= \sup_{\xi \in \Xi} \Big(\Big\langle \sum_{i=1}^N \beta_i x_i^*, My + \Lambda z \Big\rangle - \| z \| \Big).$$

Отсюда видно, что функция $S^*(\beta)$ принимает только значения 0 и ∞. При этом

$$S^*(\beta) = \infty, \text{ если } \sum_{i=1}^N \beta_i M^* x_i^* \neq 0 \text{ или } \Big\| \sum_{i=1}^N \beta_i \Lambda^* x_i^* \Big\| > 1,$$

$$S^*(\beta) = 0, \text{ если } \sum_{i=1}^N \beta_i M^* x_i^* = 0 \text{ и } \Big\| \sum_{i=1}^N \beta_i \Lambda^* x_i^* \Big\| \leq 1.$$

Следовательно,

$$S(\alpha) = S^{**}(\alpha) = \sup_\beta \Big(\sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i - S^*(\beta_1, \ldots, \beta_N) \Big)$$

$$=\sup\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\beta_i \quad \sum_{i=1}^{N}\beta_i M^* x_i^*=0,\ \|\sum_{i=1}^{N}\beta_i \Lambda^* x_i^*\|\leq 1\}.$$

Существования решения в двойственной задаче очевидно. Теорема доказана.

Допустим теперь, что задача (1.3) имеет решение $\bar\xi=(\bar y, \bar z)$ и $\bar\lambda=(\bar\lambda,\ldots,\bar\lambda_N)$— решение двойственной задачи. Тогда

$$\langle \sum_{i=1}^{N}\bar\lambda_i \Lambda^* x_i^*, \bar z\rangle=\|\bar z\|. \tag{2.2}$$

Действительно, для произвольных допустимых $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)$ и $\xi=(y,z)$ выполняются соотношения

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\alpha_i=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\langle \Lambda^* x_i^*, z\rangle\leq\|\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\Lambda^* x_i^*\|\,\|z\|\leq\|z\|. \tag{2.3}$$

С другой строны, на основании теоремы 1, $\sum_{i=1}^{N}\bar\lambda_i\alpha_i=\|\bar z\|$. Отсюда и из (2.3) сразу следует связь (2.2).

Теорема 2. (критерий решения задачи (1.3)). *Для того, чтобы элемент $\bar\xi$ был решением задачи* (1.3) *необходимо и достаточно, чтобы нашелся вектор $\bar\lambda$, такой, что:*

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \sum_{i=1}^{N}\bar\lambda_i M^* x_i^*=0,\\ &\text{б)}\ \|\sum_{i=1}^{N}\bar\lambda_i \Lambda^* x_i^*\|\leq 1,\\ &\text{в)}\ \|\bar z\|=\langle \sum_{i=1}^{N}\bar\lambda_i\Lambda^* x_i^*, \bar z\rangle. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность Пусть $\xi=(y,z)$ — любой допустимый элемент в задаче (1.3) и $\bar\lambda$ и $\bar z$ удовлетворяют условиям а) — в). Тогда

$$\|z\|\geq\langle\sum_{i=1}^{N}\bar\lambda_i\Lambda^* x_i^*, z\rangle=\langle\sum_{i=1}^{N}\bar\lambda_i x_i^*, My+\Lambda z\rangle$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\bar\lambda_i\alpha_i=\langle\sum_{i=1}^{N}\bar\lambda_i x_i^*, M\bar y+\Lambda\bar z\rangle=\langle\sum_{i=1}^{N}\bar\lambda_i\Lambda^* x_i^*, \bar z\rangle=\|\bar z\|.$$

Таким образом, $\bar\xi=(\bar y, \bar z)$ — решение задачи.

Теорема 3. (единственности). *Пусть Z — строго нормированное пространство. Тогда, если решение $\bar\xi$ задачи* (1.3) *существует, то элемент $\bar z$ определяется однозначно. Если $Y\cap \operatorname{Ker} F=0$, то решение единственно.*

Доказательство очевидно.

Для получения теоремы существования пользуются обычно какой-ни будь компактностью. Мы не будем особенно усложнять себе задачу и наложим ряд требований, которые почти автоматически дадут теорему существования.

Мы потребуем, чтобы

а) пространство Z было сопряженным к сепарабельному банахову пространству $\mathfrak{Z}$,

б) оператор Λ был вполне непрерывным,

в) $\Lambda^* x_i^*\in\mathfrak{Z}$,

г) образ Ξ при отображении F совпадал с $\mathbb{R}^N$.

Теорема 4 (существования). *Если удовлетворяются соотношения* а) — г), *то решение задачи* (1.3) *существует.*

Доказательство этой теоремы сразу следует из того, что

1) множество $\{\xi \mid f_0(\xi) \leq \gamma\}$ для любого γ является выпуклым и сильно замкнутым, а, следовательно, слабо* замкнутым (относительно топологии $\mathbb{R}^r \times \mathfrak{Z}$);

2) множество $M(\mathbb{R}^r) + \Lambda B(0, a)$ (где $B(0, a) = \{z \mid \|z\| \leq a\}$) также выпукло и сильно замкнуто как сумма компакта и конечномерного пространства.

Из 1) следует, что f_0 полунепрерывна снизу, из 2) — что множество $C = \{\xi \mid F(\xi) = 0\}$ слабо* замкнуто. Теорема 4 тогда немедленно следует из теоремы Вейерштрасса.

Теорема 5. *Пусть в* (1.3) $Z = L_\infty(T, \Sigma, \Omega) = L_\infty(T)$, $\mathfrak{Z} = L_1(T_1 \Sigma, \Omega)$, *выполнены требования* б) — г) *теоремы* 4, *и*

$$\Lambda^* x_i^* = \int_T \zeta_i(t) z(t) dt, \ \zeta_i(\cdot) \in \mathfrak{Z}, \ i = 1, \ldots, N.$$

Допустим, что

а) *функция* $\sum_{i=1}^{N} c_i \zeta_i(\cdot)$ *при каждой системе коэффициентов* $c_1, \ldots, c_N$ *имеет не более* m *перемен знака на* T;

б) *существует последовательность операторов* $Q_n : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}$, $Q_n \in \mathfrak{L}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z})$, *сходящаяся к единичному оператору на каждом элементе, не увеличивающих числа перемен знака и таких, что*

$$\mu\{t \in T \mid (Q_n \zeta)(t) = 0\} = 0 \qquad \forall n, \ \zeta \in \mathfrak{Z}.$$

Тогда задача (1.3) *имеет решение* $(\bar{y}, \bar{z})$, *где* $\bar{z}(.)$ *принимает значения* $\pm \|\bar{z}\|_\infty$ *на* T *за исключением множества меры нуль и имеет не более* m *перемен знака.*

Доказательство. Решение задачи (1.3) существует вследствие теоремы 4. Определим на линейном подпространстве $My + \Lambda z$ функционалы x_{in}^* равенством $\langle x_{in}^*, My + \Lambda z \rangle = \langle x_i^*, y \rangle + \int_T (Q_n \zeta_i)(t) z(t) dt$, а потом продолжим их на все пространство X с сохранением нормы. Рассмотрим задачу

$$\|z\| \to \inf; \ \langle x_{in}^*, My + \Lambda z \rangle = \langle x_{in}^*, M\bar{y} + \Lambda \bar{z} \rangle. \tag{2.5}$$

Вследствие теорем 4 и 2 найдутся решения $\bar{\xi}_n$ задачи (2.5) и числа $\{\bar{\lambda}_{in}\}_{i=1}^N$, для которых

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\lambda}_{in} M x_{in}^* = 0, \ \left\| \sum_{i=1}^{N} \bar{\lambda}_{in} \Lambda^* x_{in}^* \right\| = 1, \ \left\langle \sum_{i=1}^{N} \bar{\lambda}_{in} \Lambda^* x_{in}^*, \bar{z}_n \right\rangle = \|\bar{z}_n\|. \tag{2.6}$$

Очевидно, $\{\bar{\lambda}_{in}\}$ — решение двойственной к (2.5) задачи. Из (2.6) следует, что

$$\int_T \theta_n(t) z_n(t) dt = \|\bar{z}_n(\cdot)\|_\infty, \ \int_T |\theta_n(t)| dt = 1, \tag{2.7}$$

где $\theta_n(t) = \Sigma_{i=1}^N \bar{\lambda}_{in} (Q_n \zeta_i)(t)$.

Из (2.6) и из условия теоремы сразу следует, что $z_n(t) = \|z_n\|_\infty \operatorname{sign} \theta_n(t)$ на множестве полной меры. Отметим, что $\|\bar{z}_n\| \leq \|\bar{z}\|$, поскольку $\bar{z}_n$ — решение задачи (2.5), а $\bar{z}$ — допустимый элемент. Выберем из последовательности $\{z_n(\cdot)\}$ слабо сходящуюся последовательность и ее предел обозначим $\widetilde{z}(\cdot)$. Очевидно, что $\|\widetilde{z}(\cdot)\|\leq\|\bar{z}(\cdot)\|$, что. $\mu\{t\in T\mid\widetilde{z}(t)=0\}=0$ и что $\widetilde{z}(\cdot)$ имеет не более m перемен знака. Кроме того, обозначая через $\widetilde{y}$ предел подпоследовательности $\{\bar{y}_n\}$, из соотношения

$$\langle (x_i^*,\ M\widetilde{y}+\Lambda\widetilde{z}\rangle=\langle x_i^*,\ M\widetilde{y}-M\bar{y}_n\rangle+\int_T\zeta_i(t)(\widetilde{z}(t)-\bar{z}_n(t))dt$$

$$+\int_T(\zeta_i(t)-(Q_n\zeta_i)(t)\bar{z}_n(t)dt+\langle x_i^*,\ M\bar{y}\rangle+\int_T(Q_n\zeta_i)(t)-\zeta_i(t))\bar{z}(t)dt+\int_T\bar{z}(t)\zeta_i(t)dt$$

при предельном переходе получаем, что $\widetilde{z}(\cdot)$ допустима в задаче (1.3). Следовательно, $\widetilde{z}(\cdot)$ — решение задачи (1.3). Теорема доказана.

3. Приложения. 3.1. Задача Фавара. Здесь $X=W_p^r[0,1]$, $Z=L_p[0,1]$, $My=\sum_{k=1}^r y_k t^{k-1}$, $\{x_i^*\}_1^N=\{x_{kj}^*\}$, $x_{kj}^*=d^j/dt^j|_{t=t_k}$, $k=1,\ldots,n$, $j=0,\ldots,\nu_k-1$, оператор Λ задан соотношением (1.2). Проверим выполнимость условий теорем 1 — 5:

а) при $1<p\leq\infty$ пространства L_p является сопряженными, $L_p=(L_{p'})^*$, $1/p+1/p'=1$; б) оператор Λ — интегральный оператор, являющийся вполне непрерывным (см. [2, с. 261]); в) функционалы $\Lambda^*x_{kj}^*$ имеют вид:

$$\langle\Lambda^*x_{kj}^*,\ z\rangle=\int_0^1\frac{(t_k-t)_+^{r-j-1}}{(r-j-1)!}z(t)dt;$$

г) образ Λ при отображении F совпадает с $\mathbb{R}^N$, так как очевидно при каждом $\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_{kj}\}\in\mathbb{R}^N$ существует интерполяционный полином P степени $N-1$, для которого $P^{(j)}(t_k)=\alpha_{kj}$; д) при $1<p<\infty$ пространство L_p строго выпукло (см. [3, с. 20]); е) условия теоремы 5 выполняются. В качестве Q_n можно взять, например, оператор

$$(K_nx)(t)=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}(n+1)\int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)}x(\tau)d\tau.$$

Для сходимости $\{K_n\}$ к единичному оператору см., например, [4]. Свойство неувеличения числа перемен знака показывается легко методом, описанным в секции 4. Следовательно, имеет место

Предложение 1. *При $1<p\leq\infty$ задача Фавара имеет решение вида*

$$\bar{\xi}(t)=\bar{y}(t)+\frac{1}{(r-1)!}\int_0^1(t-\tau)_+^{r-1}\bar{z}_p(\tau)d\tau,$$

где $\bar{y}(\cdot)$ — некоторый многочлен степени $\leq r-1$,

$$\bar{z}_p(t)=c\{\int_0^1|\psi(\mathbf{b};\ t)|^{p'}dt\}^{-1/p}|\psi(\mathbf{b};\ t)|^{p'-1}\operatorname{sign}\psi(\mathbf{b};\ t),\ c\text{—const},$$

$$\psi(\mathbf{b};\ t)=\sum_{k=1}^n\sum_{j=0}^{\nu_k-1}b_{kj}\frac{(t_k-t)_+^{r-j-1}}{(r-j-1)!},$$

а действительные числа $\mathbf{b}=\{b_{kj}\}$ выбраны из условий

$$\sum_{k=1}^n\sum_{j=0}^{\nu_k-1}b_{kj}\alpha_{kj}=\sup_{\mathbf{a}}\sum_{k=1}^n\sum_{j=0}^{\nu_k-1}a_k\alpha_{kj}$$

по всем $\mathbf{a}=\{a_{kj}\}$, *для которых* $\|\psi(\mathbf{a};\cdot)\|_{L_{p'}[0,1]}=1$ *и*

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\nu_k-1} a_{kj}P^{(j)}(t_k)=0, \quad \forall P\in\pi_{r-1}. \tag{3.1}$$

Если $1<p<\infty$ *и* $N\geqq r$, *то решение единственное.*

Предложение 2. *При* $p=\infty$ *среди решений задачи Фавара существует решение вида*

$$\sum_{i=0}^{r-1} a_i t^i + c[t^r+2\sum_{j=1}^{m}(-1)^j(t-\xi_j)_+^r], \tag{3.2}$$

где $\{a_i\}_0^{r-1}$, c — *постоянные,* $\{\xi_j\}_1^m$ — *различные точки в интервале* $(0,1)$ *и* $m\leqq N-r-1$.

Доказательство. Функцию $\psi(\mathbf{a};\,t)$ при условии (3.1) можно записать (см. [6]) в виде $\psi(\mathbf{a};\,t)=\sum_{k=1}^{N-r} c_k u_k(t)$, где $\{u_k(\cdot)\}$ — B-сплайны, степени $r-1$, соответствующие узлам t. Но оператор $N:\mathbb{R}^{N-r}\to \operatorname{lin}\{u_k(t)\}_{k=1}^{N-r}$ $N(\mathbf{c};\,t)=\sum_{k=1}^{N-r} c_k u_k(t)$, имеет свойство неувеличения вариации (см. [7], т. е. функция $N(\mathbf{c};\,t)$ имеет не более перемен знака, чем число перемен знака в последовательности $c_1,\ldots,c_{N-r}$. Следовательно, $\psi(\mathbf{a};\,t)$ меняет знак не более $N-r-1$ раз. Применяем теорему 5. Утверждение доказано.

Аналогичные результаты можно получить и в периодическом случае. Здесь узлы $\mathbf{t}$ предполагаются лежащими в интервале $[0,2\pi)$. Задача Фавара записывается так:

$$\|x^{(r)}(\cdot)\|_{\widetilde{L}_p[0,2\pi]}\to\inf;\; x\in\widetilde{W}_p(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha}), \tag{3.3}$$

где $\|x(\cdot)\|_{\widetilde{L}_p[0,2\pi]}=(\int_0^{2\pi}|x(t)|^p dt)^{1/p}$ и

$$\widetilde{W}_p(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha})=\{x\in\widetilde{W}_p^r[0,2\pi]\mid x^{(j)}(t_k)=\alpha_{kj},\ k=1,\ldots,n,\ j=0,\ldots,\nu_k-1\}.$$

Эта задача получается из (1.3) при $X=\widetilde{W}_p^r[0,2\pi]$, $Z=\widetilde{L}_p[0,2\pi]$, $Y=\mathbb{R}$, $My=y$, $\{x_{kj}^*\}$ — те же самые, как и в непериодическом случае, $(\Lambda z)(t)=-\pi^{-1}\int_0^{2\pi}\widetilde{B}_r(t-\tau)z(\tau)d\tau$, где $\widetilde{B}_r(\cdot)$ — 2π — периодическое продолжение многочлена Бернулли, степени r (см. [8]). Легко проверить, что в этом случае $\langle\Lambda^* x_{kj}^*,\ z\rangle=-\int_0^{2\pi}\widetilde{B}_{r-j}(t_k-t)z(t)dt$. Очевидно, все условия теорем 1—4 выполнены. Следовательно, имеет место

Предложение 3. *При* $1<p\leqq\infty$ *задача* (3.3) *имеет решение вида*

$$\bar{\xi}(t)=y_0+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\widetilde{B}_r(t-\tau)\bar{z}_p(\tau)d\tau,$$

где y_0 — *вещественное число,*

$$\bar{z}_p(t)=c\,|\Phi(\mathbf{a};\,t)|^{p'-1}\operatorname{sign}\Phi(\mathbf{a};\,t)\quad c-\text{const.},$$

$$\Phi(\mathbf{a};\,t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\nu_k-1} a_{kj}\widetilde{B}_{r-j}(t_k-t),$$

и коэффициенты $\mathbf{a}=\{a_{kj}\}$ *определены из условий*

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\nu_k-1} a_{kj}\alpha_{kj}=\max_{\mathbf{b}}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\nu_k-1} b_{kj}\alpha_{kj}$$

по всем $\mathbf{b}=\{b_{kj}\}$, *для которых*

$$\sum_{k=1}^{n} b_{k0}=0,\ \int_0^{2\pi}|\Phi(\mathbf{b};\ t)|^{p'}dt=1.$$

При $1<p<\infty$ *это решение единственное.*

Для характеризации решения при $p=\infty$ можно применить теорему 5, используя в качестве Q_n операторы Валле — Пуссена

$$(V_n x)(t)=\frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(2\cos\frac{t-\tau}{2}\right)^{2n}x(\tau)d\tau,\quad n=0,1,\ldots$$

Как известно [7], они имеют свойство неувеличения вариации. Число узлов сплайн-решения оценивается с помощью следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть заданы узлы* $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_n)$ *с кратностями* $(\nu_k)_1^n$ $1\leq\nu_k\leq r$ *и* $N=\sum_{k=1}^{n}\nu_k$. *Функция*

$$h(t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\nu_k-1}A_{kj}\widetilde{B}_{r-j}(t_k-t)$$

имеет не более $2[N/2]$ *перемен знака в* $[0,2\pi)$ *для каждой системы действительных чисел* $\{A_{kj}\}$, *удовлетворяющих условию* $A_{10}+\cdots+A_{n0}=0$.

Таким образом справедливо

Предложение 4. *При* $p=\infty$ *среди решений задачи Фавара* (3.3) *существует идеальный периодический сплайн степени* r *с не более чем* $2[N/2]$ *узлов в* $[0,2\pi)$, *т. е., существует* 2π — *периодическая функция* $g(t)$, *для которой* $g^{(r)}(t)=\|g^{(r)}\|_{\mathcal{L}_\infty[0,2\pi]}$ *для каждого* t; $g^{(r)}(t)$ *имеет не более чем* $2[N/2]$ *разрывов в* $[0,2\pi)$.

3.2. Задача о наилучшей аппроксимации линейны функционалов. Пусть задан класс Ω и функционалы $L(f)$, $L_1(f),\ldots$ $L_N(f)$ определены Ω. Видно, что каждое отображение S N-мерного эвклидового пространства $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}$ определяет метод приближения функционала L на основании информации $T(f)=\{L_1(f),\ldots,L_N(f)\}$ следующим образом:

$$L(f)\approx S(L_1(f),\ldots,L_N(f))=:S(f)\qquad\forall f\in\Omega. \tag{3.4}$$

Рассмотрим задачу о нахождении отображения $S^*:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, для которого

$$\sup_{f\in\Omega}|I(f)-S^*(f)|=\inf_S\sup_{f\in\Omega}|L(f)-S(f)|.$$

Метод (3.4) при $S=S^*$ называется наилучшим методом приближения функционала L на классе Ω на основании информации T. Следующая простая, но весьма полезная лемма, показывает оптимальность линейных методов [9] (см. также [10]).

Лема 2. *Пусть* $\mathcal{F}$ — *линейное метрическое пространство,* Ω — *выпуклое, центральносимметрическое множество из* $\mathcal{F}$ *с центром симметрии* 0 *и функционалы* $L(f), L_1(f),\ldots,L_N(f)$ — *линейные. Тогда среди наилучших методов приближения функционала* $L(f)$ *в классе* Ω *на осно-*

вании информации T *есть линейный, т. е. существуют константы* $(c_k)_1^N$ *такие, что*

$$\sup_{f\in\Omega}\left|L(f)-\sum_{k=1}^{N}c_kL_k(f)\right|=\sup_{f\in\Omega}|L(f)-S^*(f)|=:R(L,\Omega).$$

При этом погрешность $R(L,\Omega)$ *наилучшего метода приближения равна величине*

$$\sup\{L(f)\,|\,f\in\Omega,\ L_k(f)=0,\ k=1,\ldots,N\}. \tag{3.5}$$

Решение задачи (3.5) представляет существенную часть в исследовании наилучших методов приближения. Мы рассмотрим эту задачу в некоторых конкретных пространствах.

Пусть $\Omega=\Omega_p:=\{f\in W_p^r[0,1]\,|\,\|f^{(r)}\|_{L_p[0,1]}\leq 1\}$. Пусть заданы узли $\mathbf{t}$ и функционалы $\{L_k(f)\}_1^N=\{x_{kj}^*\}$ определены как в задаче Фавара. Тогда (3.5) принимает вид

$$L(f)\to\sup;\ f\in\Omega_p(\mathbf{t}),\ \Omega_p(\mathbf{t}):=\{f\in\Omega_p\,|\,f^{(j)}(t_k)=0,\ k=1,\ldots,n,\ j=0,\ldots,\nu_k-1\} \tag{3.6}$$

Очевидно, задача (3.6) эквивалентна задаче

$$\|f^{(r)}\|_{L_p[0,1]}\to\inf;\ L(f)=1,\ f\in W_p(\mathbf{t}), \tag{3.7}$$

где $W_p(\mathbf{t})=\{f\in W_p^r[0,1]\,|\,f^{(j)}(t_k)=0,\ k=1,\ldots,n,\ j=0,\ldots,\nu_k-1\}$.

Видно, что если $\bar f$ — экстремаль задачи (3.7), а $\bar g$ — экстремаль задачи (3.6), то $\bar f=\bar g/L(\bar g)$, $\bar g=\bar f/\|f^{(r)}\|_{L_p[0,1]}$. Но задача (3.7) это весьма частный случай (1.3). Следовательно, она решается описанным стандартным методом.

Рассмотрим более подробно случай, когда $L(f)=f(\tau)$, (τ — фиксированная точка в интервале $[0,1]$) и $L(f)=\int_0^1 f(t)dt$. В первом случае приходим к задаче наилучшей интерполяции, а во втором к задаче о наилучшей квадратуре. Для погрешности на классе $W_p^r[0,1]$ наилучших методов будем использовать обозначения, соответственно $R_p(\mathbf{t};\tau)$ и $R_p(\mathbf{t})$.

3.2.1. З а д а ч а о н а и л у ч ш е й и н т е р п о л я ц и и. При $L(f)=f(\tau)$ задача (3.7) переходит в задачу Фавара для узлов $\mathbf{t}=\{(t_1,\nu_1),\ldots,(t_n,\nu_n),(\tau,1)\}$ и значений $a_{kj}=0$, $k=1,\ldots,n$, $j=0,\ldots,\nu_k-1$, $a_{n+1,0}=1$. Тогда из леммы 2, эквивалентности задач (3.6) и (3.7) и из предложений 1, 2 сразу следует

П р и л о ж е н и е 5. *Пусть заданы узлы* $\mathbf{t}$ *и точка* τ *в интервале* $[0,1]$. *При* $1<p<\infty$ *существует функция* $f_p(\tau;\cdot)\in\Omega_p(\mathbf{t})$, *для которой*

$$R_p(\mathbf{t};\tau)=f_p(\tau;\tau). \tag{3.8}$$

Если $1<p<\infty$, *то эта функция единственная. При* $p=\infty$ *существует идеальный сплайн* $f_\infty(\tau;t)$ *степени* r *(т. е. функция вида* (3.2)*), имеющий в точности* $N-r$ *узлов и* $\|f_\infty^{(r)}(\tau;\cdot)\|_{L_\infty[0,1]}=1$, *для которого выполнено* (3.7).

Утверждение о числе нулей идеального сплайна $f_\infty(\tau;\cdot)$ следует из теоремы Ролля и условия $f_\infty(\tau;\cdot)\in\Omega_p(\mathbf{t})$.

Оказывается, что экстремальный идеальный сплайн $f_\infty(\tau;\cdot)$ вообще не зависит от точки τ. Он определяется однозначно только узлами $\mathbf{t}$.

Л е м м а 3. *Для каждой системы узлов* $\mathbf{t}=\{(t_1,\nu_1),\ldots,(t_n,\nu_n)\}$, $0\leq t_1<\cdots<t_n\leq 1$, $1\leq\nu_k\leq r$, $k=1,\ldots,n$, *существует единственный (с точ-*

ностью до умножения на -1) *идеальный вплайн* $\varphi(\mathbf{t};\cdot)$*степени* r *с* $N-r$ *узлами, для которого*

а) $\varphi^{(j)}(\mathbf{t};\ t_k)=0,\ k=1,\ldots,n,\ j=0,\ldots,\nu_k-1,$

б) $|\varphi^{(r)}(\mathbf{t};t)|=1$ *для каждого* t.

Доказательство. Существование следует из предложения 5. Докажем единственность. Допустим, что φ_1 и φ_2 удовлетворяют условиям леммы и $\varphi_1(t_0)\neq\varphi_2(t_0)$, $-\varphi_1(t_0)\neq\varphi_2(t_0)$ при некотором $t_0\in[0,1]$. Без ограничения общности можно принять, что $\varphi_1(t_0)>\varphi_2(t_0)>0$. Построим функцию $h(t)=\beta\varphi_2(t)-\varphi_1(t)$, где $\beta=\varphi_1(t_0)/\varphi_2(t_0)$. Очевидно, h имеет по крайней мере $N+1$ нуль: $(t_k)_1^n$ с кратностями $(\nu_k)_1^n$ и t_0. По теореме Ролля $h^{(r)}(\cdot)$ должна иметь $N+1-r$ перемен знака. Но sign $h^{(r)}(t)=$sign $\varphi_2^{(r)}(t)$ поскольку $\beta>1$. С другой стороны, по допущению $\varphi_2(\cdot)$ имеет $N-r$ узлов. Получили противоречие. Лемма доказана.

Такими же самыми рассуждениями показывается, что при каждой системе узлов $\mathbf{t}$ имеем

$$|\varphi(\mathbf{t};t)|=\sup\{f(t)\mid f\in\Omega_\infty(\mathbf{t})\}\qquad\forall t \tag{3.9}$$

и, следовательно,

$$R_\infty(\mathbf{t};t)=|\varphi(\mathbf{t};t)|\qquad\forall\, t\in[0,1]. \tag{3.10}$$

Аналогичные утверждения можно доказать и в периодическом случае на основании предложений 3 и 4. Мы сформулируем только аналог Леммы 3.

Лемма 4. *Для каждой системы узлов* $\mathbf{t}=\{(t_1,\nu_1),\ldots,(t_n,\nu_n)\}$, $0\leq t_1<\cdots<t_n<2\pi$, $1\leq\nu_k\leq r$, $k=1,\ldots,n$, *с четным* $N=\sum_{k=1}^{n}\nu_k$ *существует единственный* (*с точностью до умножения на* -1) *периодический идеальный сплайн* $\tilde\varphi(\mathbf{t};\cdot)$ *степени* r, *имеющий в точности* N *узлов в* $[0,2\pi)$ *и удовлетворяющий условиям:*

а) $\tilde\varphi^{(j)}(\mathbf{t};t_k)=0,\ k=1,\ldots,n,\ j=0,\ldots,\nu_k-1,$

б) $|\tilde\varphi^{(r)}(\mathbf{t};\ t)|=1\qquad\forall t,$

в) $|\tilde\varphi(\mathbf{t};t)|=\sup\{f(t)\mid f\in\tilde\Omega_\infty(\mathbf{t})\}\qquad\forall t,$

г) $\tilde R_\infty(\mathbf{t};\tau)=|\tilde\varphi(t,\tau)|\quad\forall\tau.$

3.2.2. Задача о наилучшей квадратуре. Для решения задачи (3.7) в этом случае применяем общие теоремы при X, Z, M, Y, Λ, $\{x^*_{kj}, k=1,\ldots,n,\ j=0,\ldots,\nu_k-1\}$ — определены как в задаче Фавара и $\{x^*_i\}_1^{N+1}=\{(x^*_{ki}),\ x^*_{n+1,0}\}$ где $\langle x_{n+1,0},\ \xi\rangle=\int_0^1\xi(t)\,dt$. Очевидно $\langle\Lambda^*x^*_{n+1,0},\ z\rangle=\int_0^1(r!)^{-1}(1-t)^r z(t)dt$. Все условия общих теорем 1—4 выполнены. Имеет место

Предложение 6. *Пусть заданы узлы* $\mathbf{t}$. *При* $1<p\leq\infty$ *существует функция* $g_p(\mathbf{t};\cdot)\in\Omega_p(\mathbf{t})$, *для которой*

$$R_p(\mathbf{t})=\int_0^1 g_p(\mathbf{t};t)dt. \tag{3.11}$$

При этом $g_p(\mathbf{t};\cdot)$ *имеет вид*

$$g_p(\mathbf{t};\, t) = \bar{y}(t) + \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 (t-\tau)_+^{r-1}\bar{z}_p(\tau)\,d\tau,$$

где $\bar{y} \in \pi_{r-1}$,

$$\bar{z}_p(t) = \{\| M_r(\mathbf{t}, \mathbf{c}; \cdot) \|_{L_{p'}[0,1]}\}^{-1/p} |M_r(\mathbf{t}, \mathbf{c}; t)|^{p'-1} \operatorname{sign} M_r(\mathbf{t}, \mathbf{c}; t),$$

$$M_r(\mathbf{t}, \mathbf{c}; t) = \frac{(1-t)^r}{r!} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{\nu_k-1} c_{kj} \frac{(t_k - t)_+^{r-j-1}}{(r-j-1)!},$$

а $\mathbf{c} = \{c_{kj}\}$ *— система действительных чисел, определенных условием* $\| M_r(\mathbf{t}, \mathbf{c}; \cdot)\|_{p'} = \min \| M_r(\mathbf{t}, \mathbf{d}; \cdot)\|_{p'}$ *по всем* $\mathbf{d} = \{d_{kj}\}$, *для которых*

$$\int_0^1 Q(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{\nu_k-1} d_{kj} Q^{(j)}(t_k) \qquad \forall Q \in \pi_{r-1}. \tag{3.12}$$

Если $1 < p < \infty$, *то решение единственное.*

Функции $M_r(\mathbf{t}, \mathbf{d}; \cdot)$ называют моносплайнами. Легко заметить, что моносплайн $M_r(\mathbf{t}, \mathbf{d}; \cdot)$, при условии (3.12) удовлетворяет соотношению

$$M_r^{(j)}(\mathbf{t}, \mathbf{d}; 0) = M_r^{(j)}(\mathbf{t}, \mathbf{d}; 1) = 0, \; j = 0, \ldots, r-1. \tag{3.13}$$

Для применения теоремы 5 нам нужна оценка числа перемен знака моносплайна. Видно, что моносплайн не аннулируется на множестве положительной меры, поскольку коэффициент перед t^r отличен от нуля на каждом подынтервале $[t_k, t_{k-1}]$. Следовательно, $M_r(\mathbf{t}, \mathbf{d}; \cdot)$ имеет конечное число нулей. Можно воспользоваться известными оценками (см., напр., [11—15]) для числа нулей моносплайна и дать характеристику решения задачи о наилучшей квадратуре на основании теоремы 5. Мы этого здесь делать не будем. Применим другой способ рассуждения, которым охарактеризуем полностью экстремальную функцию при $p = \infty$ и четных кратностях $(\nu_k)_1^n$.

П р е д л о ж е н и е 7. *Пусть кратности* $(\nu_k)_1^n$ *узлов* $(t_k)_1^n$ *четные. Тогда существует единственная функция* $g_\infty(\mathbf{t}; \cdot) \in \Omega_\infty(\mathbf{t})$, *для которой* $\int_0^1 g_\infty(\mathbf{t}; t)\,dt = R_\infty(\mathbf{t})$. *При этом* $g_\infty(\mathbf{t}; \cdot)$ *есть идеальный сплайн степени* r, *имеющий в точности* $N-r$ *узлов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно Лемме 3 сплайн $\varphi(\mathbf{t}; \cdot)$ имеет в точности N нулей: $(t_k)_1^n$ с кратностями $(\nu_k)_1^n$. Поскольку ν_k четные числа, то $\varphi(\mathbf{t}; \cdot)$ не меняет знака. Умножая, если необходимо, на -1, добиваемся того, чтобы $\varphi(\mathbf{t}; t) \geq 0$ для каждого t. Из (3.9) сразу следует, что $\int_0^1 \varphi(\mathbf{t}; t)\,dt = \sup \{\int_0^1 f(t)\,dt \mid f \in \Omega_\infty(\mathbf{t})\}$. Тогда в силу (3.5) $R_\infty(\mathbf{t}) = \int_0^1 \varphi(\mathbf{t}; t)\,dt$. Теперь допустим, что существует другая функция $f \in \Omega_\infty(\mathbf{t})$, для которой достигается погрешность $R_\infty(\mathbf{t})$. Получим $\int_0^1 (\varphi(\mathbf{t}; t) - f(t))\,dt = 0$. Но согласно (3.9) имеем $f(t) - \varphi(\mathbf{t}; t) \leq 0$ для каждого t. Следовательно, $\varphi(\mathbf{t}; t) = f(t)$. Утверждение доказано.

Вполне аналогично решается задача о наилучшей квадратуре и в периодическом случае. Мы отметим только аналог последнего утверждения.

Предложение 8. *Пусть узлы* $\mathbf{t}$ *фиксированы в* $[0, 2\pi)$. *При* $1 < p \leqq \infty$ *существует функция* $\widetilde{g}_p(\mathbf{t}; \cdot) \in \widetilde{\Omega}_p(\mathbf{t})$, *для которой*

$$\overline{R}_p(\mathbf{t}) = \int_0^{2\pi} \widetilde{g}_p(\mathbf{t}; t)\,dt. \tag{3.14}$$

Если $1 < p < \infty$, *то функция* $\widetilde{g}_p(\mathbf{t}; \cdot)$ *единственная с этим свойством. Если кратности* $\{\nu_k\}_1^n$ *четные, то* $\widetilde{g}_\infty(\mathbf{t}; \cdot)$ *тоже единственная. При этом* $\widetilde{g}_\infty(\mathbf{t}; \cdot)$ *есть идеальный периодический сплайн степени* r, *имеющий в точности* N *узлов в* $[0, 2\pi)$.

4. Обзор литературы и комментарии. Задача Фавара была исследована многими авторами. При $p = \infty$ Фавар [16] поставил задачу и решил ее, показывая, что она имеет решение при произвольных узлах $\mathbf{t}$ и значениях $\boldsymbol{\alpha}$. Очевидно, при $N = \sum_{k=1}^{n} \nu_k = r$ задача Фавара совпадает с классической интерполяционной задачей о нахождении многочлена степени $r-1$, удовлетворяющего заданным интерполяционным условиям. Весьма подробное обсуждение метода Фавара и полное решение (т. е. исследование существования, единственности и характеризация решения) задачи при $1 \leqq p \leqq \infty$ дал Карл де Бор [17]. В случае $p = \infty$ и $\mathbf{t} = \{(0, r), (1, r)\}$ Глесер [18] показал существование решения, являющегося идеальным сплайном степени r с $N - r - 1$ узлами. Он назвал сплайны вида (3.2) идеальными. Лубутин [19], используя результат Глесера, нашел в явном виде решение (3.2) задачи Фавара при $\alpha_{1j} = 0$, $j = 0, \ldots, r-1$, $\alpha_{20} = 1$, $\alpha_{2j} = 0$, $j = 1, \ldots, r-1$. Он показал, что функция $2^{2r-2} \int_0^t (t-\tau)^{r-1} \operatorname{sign} U_{r-1}(\tau)\,d\tau$, где U_{r-1} — многочлен Чебышева второго рода для интервала $[0, 1]$ степени $r-1$, является единственным решением задачи в этом простом случае. Этот результат был доказан позднее Шенбергом [20], другим методом. Простое доказательство задачи Лубутина и явное решение задачи Фавара при $\mathbf{t} = \{(0, r), (\xi, 1), (1, r)\}$ и $\alpha_{1j} = \alpha_{2j} = 0$, $j = 0, \ldots, r-1$, $\alpha_{21} = 1$ было дано в [21]. Решение задачи Фавара в общем случае при $p = \infty$, т. е. предложение 2 было опубликовано без доказательства С. Карлином [22]. Доказательство этого предложения дал Карл де Бор [23] (см. также [24]). При доказательстве теоремы 5 мы использовали идею де Бора [23]. В качестве сглаживающих операторов Q_n можно применять операторы Вейерштрасса

$$(W_n f)(t) = \sqrt{n/\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-n(t-x)^2}\,dx,$$

как это делал де Бор, или, например, операторы Бернштейна

$$(B_n f)(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Все они имеют свойство неувеличения числа перемен знака. Для операторов Бренштейна это свойство почти очевидно. Действительно (см. [5]), полагая $x = t/(1-t)$, имеем $(B_n f)(t)/(1-t)^n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k$, откуда следует

$$V[B_n] = V\left[\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k\right] \leqq V\left[\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\right\}_{k=0}^{n}\right] = V\left[\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}_{k=0}^{n}\right] \leqq V[f],$$

$V[\cdot]$ — число перемен знака. Здесь мы использовали правило Декарта для оценки числа нулей алгебраического многочлена.

Предложение 1 было доказано де Бором [17]. В специальном случае, когда $p=2$ и $\mathbf{t}=\{(t_1, 1), \ldots, (t_n, 1)\}$ это утверждение доказали: Холидей [25] — при $r=2$, Карл де Бор [26] и Шенберг [27] — при произвольном естественном r. В общем случае, когда допускаются и кратные узлы, теорему объявили Карлин и Зеглер [28]. Видно, что при $p=2$ решение задачи является сплайном. Шенберг [29] назвал их естественными сплайнами. Они имеют ряд замечательных свойств. Их подробное описание можно найти, например, в обзорной работе Гревилла [30].

Поскольку пространство $L_1[0,1]$ не есть сопряженное, то нельзя утверждать существования решения задачи Фавара при $p=1$ на основании теоремы 1. Но пространство $L_1[0,1]$ изометрически вкладывается в $(L_\infty[0,1])^*$. Тогда при $p=1$ можно поступить, например, так: исследовать задачу не для $Z=L_1[0,1]$, а для более широкого класса $Z=(L_\infty[0,1])^*$. В этом случае решение задачи существует и можно использовать теорему 1 и соотношение (2.2) для характеризации решения или для описания тех условий, при которых решение принадлежит классу $L_1[0,1]$. Подробное обсуждение случая $p=1$ дал Карл де Бор [17]. Задаче Фавара при $p=1$ посвящены и работы: Фишер и Джером [31], Чуи, Смит и Уорд [32].

Предложения 3, 4 и лемма 1 были доказанны в [33]. В специальном случае, при $\nu_1=\cdots=\nu_n=1$, лемму 1 доказал Женсыкбаев [34].

Наименование и некоторые интересные свойства и применений B-сплайнов дали Къри и Шенберг [6]. Основное свойство — положительность этих функций, впервые показал Л. Чакалов [35].

Лемма 3 принадлежит Каварету [36]. Мичелли, Ривлин и Виноград [37] вывели это утверждение из предложения 2 и заметили, что при $\nu_k=r$ точка t_k не может быть узлом сплайна $\varphi(\mathbf{t};\cdot)$. Лемма 4 доказана в [33]. Весьма частный случай ее при $\nu_1=\cdots=\nu_n=2$ встречается у Моторного [38].

После соотношения (3.10) набрасывается следующая весьма естественная задача: подобрать узлы $\mathbf{t}$ так, чтобы L_p - норма погрешности наилучшего метода интерполирования принимала минимальное значение, т. е. необходимо построить сплайн $\varphi(\mathbf{t};\cdot)$ минимального отклонения от нуля в метрике $L_p[0,1]$. Оптимальные узлы можно искать среди всех узлов вида $\{(t_1, \nu_1), \ldots, (t_n, \nu_n)\}$, $t_1<\cdots<t_n$ с фиксированными кратностями $(\nu_k)_1^n$. При $p=\infty$ и $\nu_1=\cdots=\nu_n=1$ эта задача рассматривалась в [39]. Там показано, что экстремальные узли $\mathbf{t}^*$ существуют, сплайн $\varphi(\mathbf{t}^*;\cdot)$ единственный с этим экстремальным свойством и вполне определен алтернансом — существуют точки $(\tau_k)_1^{N+1}$, для которых $\varphi(\mathbf{t}^*;\tau_k)=(-1)^k\|\varphi(\mathbf{t}^*;\cdot)\|_\infty$, $k=1,\ldots,N$.

Легко показать, что при $p=\infty$ и $\nu_1=\cdots=\nu_n=2$ задача тоже имеет единственное решение φ_2, и оно связано с решением φ_1 задачи при $\nu_1=\cdots=\nu_n=1$ следующим образом: $\varphi_2(t)=\varphi_1(t)+\|\varphi_1(\cdot)\|_\infty$.

Отметим, что неизвестно распределение экстремальных узлов и явного выражения экстремального сплайна в непериодическом случае даже для $\nu_1=\cdots=\nu_n=1$ при $r>3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. Теория экстремальных задач. Москва, 1974.
2. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. Элементы функционального анализа. Москва, 1965.
3. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. Москва, 1965.
4. G. G. Lorentz. Bernstein polynomials. Toronto, 1953.
5. G. Polya, I. J. Schoenberg. Remarcs on the de la Vallee-Poussin means and convex conformal maps of the circle. *Pacif. J. Math.*, **8**, 1958, 295—334.
6. H. B. Gurry, I. J. Schoenberg. On Polya frequency functions IV. The fundamental spline functions and their limits. *J, anal. Math.*, **17**, 1966, 71—107.
7. S. Karlin. Total positivity, Vol. I. Stanford, 1968.
8. В. Н. Малоземов. Совместное приближение функций и их производных. Ленинград, 1974.
9. С. А. Смоляк. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Диссертация, МГУ, 1965.
10. Н. С. Бахвалов. Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций. *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.*, **11**, 1971, 1014—1018.
11. R. S. Johnson. On monosplines of least deviation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **96**, 1960, 458—477.
12. Н. А. Лебедев, С. М. Лозинский. Оценка числа нулей функции некоторого класса, содержащего моносплайны. *Мат. заметки*, **16**, 1974, 57—64.
13. S. Karlin. The fundamental thorem of algebra for monosplines satisfying certain boundery conditions and applications to optimal quadrature formulas. In: Approximations with special emphasis on spline functions. New York, London, 1969, 467-484.
14. S. Karlin, C. Micchelli. The fundamental theorem of algebra for monosplines satisfying boundery conditions. *Israel J. Math.*, **11**, 1972, 405—451.
15. C. Micchelli. The fundamental theorem of algebra for monosplines with multiplicities. In: Linear operators and approximation. Basel, 1972, 419—430.
16. J. Favard. Sur l'interpolation. *J. math. pures. et appl.*, **19**, 1940, 281—306.
17. Carl de Boor. On "best" interpolation. *J. Approxim. Theory*, **16**, 1976, 28—42.
18. G. Glaeser. Prolongment extremal de functions differentiables d'une variable. *J. Approxim. Theory*, **8**, 1973, 249—261.
19. R. Louboutin. Sur une bonne partition de l'unité. Le prolongateur de Whitney, vol. II, Rennes, France, 1967.
20. I. J. Schoenberg. The perfect B-splines and a time optimal control problem. *Israel J. Math.*, **10**, 1971, 261—275.
21. B. D. Bojanov. A note on fhe W^n_∞ extremal problem of Favard. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **28**, 1975, 1163—1166.
22. S. Karlin. Some variational problems on certain Sobolev spaces and perfect splines *Bull. Amer. Math. Soc.*, **79**, 1973, 124—128.
23. Carl de Boor. A remark concerning perfect splines. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80**, 1974, 724—727.
24. S. Karlin. Interpolation properties of generalized perfect splines and the solution of certain extremal problems I. *Trans Amer. Math. Soc.*, **206**, 1975, 25—66.
25. J. C. Holladay. Smoothest curve approximation. *Math. Tables Aids Comput.* **11**, 1957, 233—243.
26. Carl de Boor. Best approximation properties of spline functions of odd degree. *J. Math Mech.*, **12**, 1963, 747—749.
27. I. J. Schoenberg. On interpolation by spline functions and its minimal properties. In; On approximation theory. Basel, 1964, 109—129.
28. S. Karlin, Z. Ziegler. Chebyshevian spline functions. In: Inequalities. New York-London, 1967, 137—149.
29. I. J. Schoenberg. On best approximation of linear operators. *Proc. Kon. ned. akad wetensch. A*, **67**, 1964, 155—163.
30. T. N. E. Greville. Introduction to spline functions. In: Theory and applications of spline functions. New York, 1969, 1—36.
31. S. D. Fisher, J. W. Jerom. Spline functions to L^1 extremal problems in one and several variables. *J. Approxim. Theory*, **13**, 1975, 73—83.
32. C. K. Chui, P. W. Smith, J. D. Ward. Prefered NBV-splines. *J, Math. Anal. and Appl.*, **55**, 1976, 18—31.
33. B. D. Bojanov. Favard's interpolation problem for periodic functions. In: Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai. 19. Fourier analysis and approximation theory, Budapest, 1976, 161—173.

34. А. А. Женсыкбаев. Приближение дифференцируемых пери дических функций сплайнами по равномерному разбиению. *Мат. заметки*, **13**, 1973, 807—816.
35. Л. Чакалов. Върху едно представяне на нютоновите частни в теорията на интерполациите и неговите приложения. *Годишник Соф. Унив., Физ.-Мат. фак.*, **34**. 1937—1938, 353—405.
36. A. S. Cavaretta, Jr.. Oscillatory and zero properties for perfect splines and monosplines. *J. anal. Math.*, **28**, 1975, 41—59.
37. C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, S. Winograd. The optimal recovery of smooth functions. *Numer. Math.*, **26**, 1976, 191—200.
38. В. П. Моторный. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций. *Известия АН СССР, серия мат.*, **38**, 1974, 583—614.
39. В. М. Тихомиров. Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве C [-1, 1] *Мат. сб.*, **80**, 1969, 290—304.

Московский государственный университет
Механико-математический факультет
Москва В-234

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 10. 7. 1978