Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

О ЧИСЛЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ В НЕКОТОРЫХ ГРАФАХ

НИКОЛАЙ Г. ХАДЖИИВАНОВ

Устанавливаются неравенства, связывающие числа ребер вершин и треугольников, проходящих через вершины максимальной степени, данного графа.

Специальный случай одной известной теоремы Турана [1] обеспечивает существование хотя бы одного треугольника в графе с n вершинами и хотя бы с $[n^2/4]+1$ ребрами. При этом существует единственный граф $T(n; 2)$ с n вершинами и $[n^2/4]$ ребрами, который не содержит никакого треугольника. Имеем $T(n; 2)=K([n/2], [(n+1)/2])$, где $K(p, q)$ — полный бихроматический граф с числами вершин хроматических классов, соответственно p и q.

Основным результатом в настоящей статьи является

Теорема 1. *Если через любую вершину максимальной степени d графа G проходит некоторый треугольник, тогда*

$$e(G)\leq(v(G)-d)(d-1)+t_m(G)+1, \tag{1}$$

где $v(G)$ и $e(G)$ — соответственно число вершин и ребер графа, а $t_m(G)$ — число треугольников, любой из которых имеет хотя бы одну вершину максимальной степени.

Следствие 1. *Если $v(G)=n$ и $e(G)=[n^2/4]+l$, где $l>0$, тогда $t_m(G)\geq[n/2]+l-1$.*

Это утверждение легко получить с помощью [3], теоремы 1 и неравенства

$$(n-d)(d-1)\leq[n^2/4]-[n/2]. \tag{2}$$

Следствие 1 усиливает одно теорему Ердеша [5], получающаяся из следствия 1 заменой $t_m(G)$ на $t(G)$, где $t(G)$ — число всех треугольников графа G. В частности, из следствия 1 при $l=1$ получаем $t_m(G)\geq[n/2]$, т. е. доказанное нами в [4] усиление теоремы Радемахера (см. [2]).

Следствие 2. *Если $v(G)=n$, $e(G)\geq[n^2/4]$ и $t(G)>0$, тогда через любую вершину максимальной степени графа G проходит некоторый треугольник и $t_m(G)\geq[n/2]-1$.*

Следствие 2 усиливает одну теорему Ердеша из [5], которая получается из следствия 2 заменой $t_m(G)$ на $t(G)$.

Теорема 2. *Если $v(G)=n$ и $e(G)\geq[n^2/4]+1$, то $t_m(G)\geq[n/2]$ и притом равенство в последнем неравенстве достигается для одного единственного графа.*

Этот экстремальный граф назовем графом Радемахера и обозначим $R(n; 2)$. Он получается из $K([n/2], [(n+1)/2])$ присоединением к нему нового ребра, соединяющего пару вершин большего хроматического класса.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 5, 1979, с. 103—118.

Доказательство теоремы 1. Пусть v_1 — вершина максимальной степени d графа G, и $v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}$ — все те вершины этого графа, которые не смежны вершине v_1, а $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(d)}$ — все те вершины графа G, которые смежны вершине v_1.

Если S — некоторое множество вершин графа G, то через $d(S)$ обозначим число ребер графа G, любое из которых имеет хотя одну вершину из S, а через $e(S)$ — число ребер графа G, оба конца которых принадлежат множеству S. Через $t(S)$ обозначим число треугольников графа G, любой из которых имеет вершину, принадлежащую множеству S.

Легко проверить верность равенства

$$e(G)=d+t(v_1)+d(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}), \tag{3}$$

сообразив, что $t(v_1)$ есть число ребер типа $[v^{(i)}, v^{(j)}]$.

Верно и равенство

$$d(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d})=\sum_{i=2}^{n-d} d(v_i)-e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}), \tag{4}$$

так как любое ребро типа $[v_i, v_j]$, $i\geqq 2$, $j\geqq 2$, учтено в сумме $\Sigma_{i=2}^{n-d} d(v_i)$ два раза — один раз в слагаемом $d(v_i)$ и второй раз в слагаемом $d(v_j)$.

Из (3) и (4) следует

$$e(G)=d+\sum_{i=2}^{n-d} d(v_i)+t(v_1)-e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}). \tag{5}$$

Будем считать, что $v_2, v_3, \ldots, v_{q+1}$ — все вершины максимальной степени d, находящихся среди вершин $v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}$ $(0\leqq q\leqq n-d-1)$. Тогда

$$d(v_i)\leqq d-1 \quad \text{при} \quad i=q+2, q+3, \ldots, n-d. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует

$$\begin{aligned} e(G)&\leqq d+qd+(n-d-1-q)(d-1)+t(v_1)-e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}) \\ &=(n-d)(d-1)+q+1+t(v_1)-e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}). \end{aligned} \tag{7}$$

Чтобы закончить доказательство теоремы, покажем что

$$q+t(v_1)-e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d})\leqq t_m(G). \tag{8}$$

Сначала заметим, что для любого графа Γ число $v(\Gamma)-e(\Gamma)$ не превосходит числа компонент графа Γ. Рассмотрим теперь подграф Γ графа G, порожденный множеством вершин $v_2, v_3, \ldots, v_{q+1}$, и обозначим через ϱ число компонент этого графа (если $q=0$, тогда $\Gamma=\varnothing$ и $\varrho=0$). Согласно только что сделанному замечанию имеем

$$q-e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d})\leqq q-e(v_2, v_3, \ldots, v_{q+1})\leqq \varrho. \tag{9}$$

Следовательно, неравенство (8) следует из неравенства

$$t(v_1)+\varrho\leqq t_m(G), \tag{10}$$

которое мы сейчас докажем.

Заметим сначала, что верно неравенство

$$t(v_1)+t(v_2, v_3, \ldots, v_{q+1})\leqq t_m(G). \tag{11}$$

Действительно, если некоторый треугольник проходит через v_1, то он не проходит через вершину v_i ни для какого i, $2 \leq i \leq q+1$.

Пусть M_s — множество вершин s-ой компоненты графа Γ, $s=1, 2, \ldots, \varrho$. Выполняется равенство

$$(12) \qquad \sum_{s=1}^{\varrho} t(M_s) = t(v_2, v_3, \ldots, v_{q+1}).$$

Действительно, если некоторый треугольник имеет вершину в $M_{s'}$, то он не имеет вершин в $M_{s''}$ при $s'' \neq s'$.

Таким образом неравенство (11) можно записать так:

$$(13) \qquad t(v_1) + \sum_{s=1}^{\varrho} t(M_s) \leq t_m(G).$$

Дальше заметим, что

$$(14) \qquad t(M_s) \geq 1, \ s=1, 2, \ldots, \varrho \ (\text{если } \Gamma \neq \emptyset).$$

Действительно, пусть $v \in M_s$. Тогда очевидно

$$(15) \qquad t(M_s) \geqq t(v),$$

а, с другой стороны, так как v — вершина максимальной степени, то

$$(16) \qquad t(v) \geqq 1.$$

Из (13) и (14) следует (10). Теорема 1 доказана.

Лемма 1. *Если $v(G)=n$, где n — четно, и существует вершина максимальной степени графа G, через которую проходит точно один треугольник, тогда $e(G) \leq [n^2/4]$.*

Лемма 2. *Если $v(G)=n$, где n — нечетно, и существует вершина максимальной степени графа G, через которую проходит точно один треугольник, тогда $e(G) \leq [n^2/4]+1$. При этом равенство здесь достигается только для графа Радемахера $R(n; 2)$.*

Доказательство леммы 1. Пусть v_1 — вершина максимальной степени d, через которую проходит один треугольник. С помощью обозначений, воспринятых в доказательстве теоремы 1, можем написать

$$(17) \qquad e(G) = d+1+d(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}) = d+1+\sum_{i=2}^{n-d} d(v_i) - e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d})$$
$$\leq 1+(n-d)d \leq 1+[n^2/4].$$

Допустим, что $e(G)=[n^2/4]+1$. Тогда $d(v_i)=d$, $i=1, 2, \ldots, n-d$ и $d=n/2$, $e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d})=0$. Следовательно, любая из вершин v_i смежна любой из вершин $v^{(j)}$. Пусть, например, $[v_1, v^{(1)}, v^{(2)}]$ тот треугольник, который проходит через v_1. Тогда $d(v^{(1)})=1+n-d=n/2+1>d$. Полученное противоречие показывает, что $e(G) \neq [n^2/4]+1$.

Доказательство леммы 2. Пусть v_1 — вершина максимальной степени d, через которую проходит один треугольник. Неравенство (17) дает $e(G) \leq [n^2/4]+1$. Допустим, что $e(G)=[n^2/4]+1$. Тогда все неравенства в (17) переходят в равенства. Следовательно, $d(v_i)=d$, $i=1, 2, \ldots, n-d$, $e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d})=0$ и $(n-d)d=[n^2/4]$. Очевидно, $d \geq [n/2]+1$, так что $d=(n+1)/2$. Все вершины v_i смежны всем вершинам $v^{(j)}$, и никакие две вершины v_i не смежны между собой. Кроме того, только одна пара вершин типа $v^{(j)}$ соединена ребром. Следовательно, $G=R(n; 2)$.

Доказательство теоремы 2. Первая часть теоремы совпадает со следствием 1 при $l=1$. Докажем вторую часть.

Пусть G — граф, который удовлетворяет условиям

$$v(G)=n,\ e(G)\geqq[n^2/4]+1,\ t_m(G)=[n/2]. \tag{18}$$

Согласно (1) имеем

$$[n^2/4]+1\leqq e(G)\leqq(n-d)(d-1)+t_m(G)+1=(n-d)(d-1)+[n/2]+1. \tag{19}$$

Сравнивая (2) и (19) заключаем, что и в (2), и в (19) есть равенство. Следовательно,

$$d=[n/2]+1 \tag{20}$$

и везде в неравенствах в доказательстве теоремы 1 тоже должно быть равенство.

Рассмотрим сначала случай $q>0$. Из равенства в (16) следует, что существует вершина максимальной степени, через которую проходит точно один треугольник. Согласно лемме 1, число n — нечетно, а согласно лемме 2 $G=R(n; 2)$.

Осталось рассмотреть случай, когда все вершины максимальной степени попарно смежны. Если v_1 — произвольная вершина максимальной степени, то $q=0$, и, следовательно, $\varrho=0$, так что из равенства в (10) следует, что $t(v_1)=t_m(G)=[n/2]$. Следовательно, если некоторый треугольник проходит через вершину максимальной степени, то он проходит и через все остальные вершины максимальной степени. Тогда, очевидно, число вершин максимальной степени не больше 3. Впрочем, если их число равно 3, тогда, очевидно, $t_m(G)=1$ и, следовательно, $[n/2]=1$, так что $n=3$. Очевидно $G=R(3; 2)$.

Итак, можно считать, что G имеет не более двух вершин максимальной степени и притом всякий треугольник, который проходит через одну из этих вершин, обязательно проходит и через другую и $n\geqq 4$.

Теперь мы докажем, что имеются точно две вершины максимальной степени. Допустим, что это не так и пусть v_1 — единственная вершина максимальной степени d графа G. Из равенства в (8), так как $q=0$ и $t(v_1)=t_m(G)=[n/2]$, следует $e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d})=0$. Тогда

$$\begin{aligned}[n^2/4]+1\leqq e(G)&\leqq d(v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(d)})+e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d})\\ &=\sum_{i=1}^{d} d(v^{(i)})-e(v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(d)})=\sum_{i=1}^{d} d(v^{(i)})-t(v_1)\leqq d(d-1)-\left[\frac{n}{2}\right].\end{aligned} \tag{21}$$

Неравенство (21) противоречит равенству (20).

Итак, граф G имеет точно две вершины максимальной степени v_1 и $v^{(1)}$ и через ребро $[v_1, v^{(1)}]$ проходят точно $[n/2]$ треугольников $[v_1, v^{(1)}, v^{(i)}]$, $i=2, 3, \ldots, [n/2]+1$. Так как $d(v^{(1)})=[n/2]+1$ и через $v^{(1)}$ проходят $[n/2]+1$ ребер $[v^{(1)}, v_1], [v^{(1)}, v^{(2)}]$, $i=2, 3, \ldots, [n/2]+1$, то $v^{(1)}$ не смежна вершинам v_i, $i=2, 3, \ldots, n-d$. Мы знаем, что вершина v_1 тоже не смежна вершинам $v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}$. Кроме того, вершины $v^{(i)}$, $i=2, 3, \ldots, [n/2]+1$ попарно не смежны, так как иначе, кроме перечисленных выше треугольников, через

v_1 будут проходить и другие, что невозможно. Выше мы доказали, что вершины $v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}$ тоже попарно не смежны. Из равенства в (6) следует, что $d(v_i)=[n/2]$ при $i=2, 3, \ldots, n-d$ и так как вершины $v_i, i=2, \ldots, n-d$, не смежны вершине $v^{(1)}$, то они смежны всем остальным вершинам типа $v^{(j)}$. Следовательно, граф G получается из графа $K(d-1, n-d+1)$ присоединением к нему ребра, соединяющего пару вершин большего хроматического класса. Докажем, что число n четно. Действительно, если это не так, тогда $d=(n+1)/2$ и так как $d(v^{(2)})=n-d+1=(n+1)/2$, то получаем, что $v^{(2)}$ — вершина максимальной степени, что неверно. Следовательно, n — четно и значит $d=n/2+1, n-d+1=n/2$, так что $G=R(n;\ 2)$.

Добавление 1. В этом добавлении дадим прямое доказательство теоремы Радемахера, согласно которой, если $v(G)=n$ и $e(G)\geqq[n^2/4]+1$, то $t(G)\geqq[n/2]$, и докажем непосредственно, что если в последнем неравенстве есть равенство, то $G=R(n;\ 2)$.

Лемма 3. *Пусть $v(G)=n$ и $e(G)\geqq[n^2/4]+1$. Если v_1 — вершина максимальной степени и любая другая вершина максимальной степени смежна вершине v_1, то $t(v_1)\geqq[n/2]$. Если $t(G)=[n/2]$, то $G=R(n;\ 2)$.*

Доказательство леммы 3. Применяя неравенство (7) при $q=0$ и неравенство (2), получаем

$$(22) \qquad [n^2/4]+1\leqq e(G)\leqq(n-d)(d-1)+t(v_1)+1-e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d})$$
$$\leqq t(v_1)+1+[n^2/4]-[n/2].$$

Следовательно, $t(v_1)\geqq[n/2]$.

Допустим, что $t(G)=[n/2]$. Тогда очевидно $t(v_1)=[n/2]$, и, следовательно, неравенства (22) переходят в равенства. Таким образом неравенства (6) переходят в равенства, т. е. $d(v_i)=d-1, i=2, \ldots, n-d$. Кроме того, $e(v_2, v_3 \ldots, v_{n-d})=0$ и $(n-d)(d-1)=[n^2/4]-[n/2]$. С другой стороны, заметим, что $d\geqq[n/2]+1$. Действительно, $e(G)\leqq nd/2$ и если $d\leqq[n/2]$, то $e(G)<[n^2/4]+1$. Тогда равенство $(n-d)(d-1)=[n^2/4]-[n/2]$ дает $d=[n/2]+1$. Так как вершины $v_i, i=2, 3, \ldots, n-d$, — попарно несмежны и их степени равны $d-1$, то любая из этих вершин смежна всем вершинам $v^{(j)}$ за исключением одной (вершины v_i не смежны вершине v_1 при $i=2, \ldots, n-d$). Равенство $t(v_1)=[n/2]$ показывает, что число ребер типа $[v^{(i)}, v^{(j)}]$ равно в точности $[n/2]$. Заметим, что так как $t(v_1)=t(G)$, то все треугольники графа G проходят через вершину v_1.

Рассмотрим теперь $\max_{1\leqq i\leqq d} d(v^{(i)})$ и пусть этот максимум достигается, например, в $v^{(1)}$. Докажем, что вершина $v^{(1)}$ не смежна никакой из вершин $v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}$. Допустим, что это не так и пусть $[v_2, v^{(1)}]$ — ребро графа G. Легко сообразить, что вершина $v^{(1)}$ смежна хотя двум вершинам $v^{(i_1)}, v^{(i_2)}$, где $i_1\geqq 2, i_2\geqq 2$, потому что число ребер типа $[v^{(i)}, v^{(j)}]$ равно $[n/2]$, а число вершин $v^{(i)}$ равно $[n/2]+1$. Вершина v_2 не смежна вершине $v^{(i_1)}$, так как иначе $[v_2, v^{(1)}, v^{(i_1)}]$ был бы треугольником, не проходящим через вершину v_1. Аналогично, вершина v_2 не смежна вершине $v^{(i_2)}$. Получили противоречие, так как вершина v_2 смежна всем вершинам $v^{(j)}$ за исключением одной.

Итак, вершина $v^{(1)}$ не смежна никакой из вершин $v_2, \ldots, v_{n-d}$. Следовательно, все эти вершины смежны всем вершинам $v^{(2)}, v^{(3)}, \ldots, v^{(d)}$. Если допустим, что в G есть ребро типа $[v^{(i)}, v^{(j)}]$, где $i\geqq 2, j\geqq 2$, тогда получим противоречие: $[v_2, v^{(i)}, v^{(j)}]$ будет треугольником, не проходящим через вершину v_1. Так как число всех ребер типа $[v^{(i)}, v^{(j)}]$ равно $[n/2]$, а ребер типа

$[v^{(i)}, v^{(j)}]$, где $i \geq 2$, $j \geq 2$, вообще нет, то вершина $v^{(1)}$ должна быть смежной всем вершинам $v^{(i)}$, $i=2, 3, \ldots, [n/2]+1$.

Окончательно, любая из вершин $v^{(1)}, v_1, v_2, \ldots, v_{n-d}$ смежна любой из вершин $v^{(2)}, v^{(3)}, \ldots, v^{(d)}$, вершины $v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}$ — попарно несмежны и то же самое верно для вершин $v^{(2)}, v^{(3)}, \ldots, v^{(d)}$. Кроме того, вершины $v^{(1)}$ и v_1 не смежны никакой из вершин $v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}$, а между собой эти две вершины смежны. Наконец, число вершин $v^{(2)}, \ldots, v^{(d)}$ равно $[n/2]$, а число вершин $v^{(1)}, v_1, v_2, \ldots, v_{n-d}$ равно $n-d+1=[(n+1)/2]$. Следовательно, $G=R(n; 2)$.

Лемма 4. *Пусть v_0 — вершина графа G и любое ребро через v_0 является стороной некоторого треугольника. Тогда $t(v_0) \geq d(v_0)/2$.*

Доказательство леммы 4. Пусть A — граф, порожденный множеством вершин графа G, смежных вершине v_0. Очевидно, $d(v; A) \geq 1$ для любой вершины графа A. Следовательно, $2e(A)=\Sigma d(v; A) \geq v(A)$, так что $e(A) \geq v(A)/2$. Остается заметить, что $e(A)=t(v_0)$ и $v(A)=d(v_0)$.

Мы уже в состоянии приступить к доказательству теоремы Радемахера. Пусть G — граф, для которого $v(G)=n$ и $e(G) \geq [n^2/4]+1$. Если все вершины максимальной степени смежны некоторой вершине максимальной степени, тогда согласно лемме 3 имеем $t(G) \geq [n/2]$. Притом, равенство здесь возможно тогда и только тогда, когда $G=R(n; 2)$.

Допустим теперь, что существует пара несмежных вершин максимальной степени d графа G; обозначим их v_1 и v_2. Если любое ребро, проходящее через v_1 или v_2 является стороной некоторого треугольника, тогда согласно лемме 4 имеем $t(v_1, v_2) \geq d$, а, с другой стороны, $d \geq [n/2]+1$, так что в этом случае $t(G) > [n/2]$.

Рассмотрим наконец случай, когда существуют несмежные вершины максимальной степени v_1 и v_2 и ребро $[v_1, v_2]$, которое не является стороной никакого треугольника. Рассмотрим подграф $G'=G-\{v_1, v_2\}$ графа G, порожденный множеством вершин, отличных от v_1 и v_2. Так как $[v_1, v_2]$ не является стороной никакого треугольника, то $d(v_1, v_2) \leq 1+n-2=n-1$, и, следовательно, $e(G')=e(G)-d(v_1, v_2) \geq [n^2/4]+1-(n-1)=[(n-2)^2/4]+1$. Это неравенство дает нам возможность провести доказательство теоремы Радемахера индуктивно. Действительно, допустим, что утверждение теоремы Радемахера верно при $n-2$. Утверждение теоремы Радемахера при n верно во всех вышерассмотренных случаях и в этом мы убедились даже без использования индукционного предположения. А в рассматриваемом случае, применяя индукционное предположение к G', мы заключаем, что $t(G') \geq [(n-2)/2]=[n/2]-1$. Очевидно, $t(G)=t(G')+t(v_1, v_2) \geq t(G')+t(v_1) \geq [n/2]$. Здесь мы воспользовались тем, что $t(v_1) \geq 1$, так как v_1 — вершина максимальной степени графа G. Этим неравенство $t(G) \geq [n/2]$ доказано для любого графа G, для которого $v(G)=n$ и $e(G) \geq [n^2/4]+1$, так как при $n=3$ и $n=4$ утверждение очевидно. Допустим теперь, что $t(G)=[n/2]$. Для нас интересен только рассматриваемый случай. Очевидно, неравенство $t(v_1) \geq 1$ должно перейти в равенство и согласно лемме 1 число n — нечетно, а согласно лемме 2 имеем $G=R(n; 2)$.

Добавление 2. В этом дополнении рассмотрим вопросы, связанные с леммами 1 и 2.

Предложение 1. *Если $v(G)=n$, где n — четно, и существует вершина максимальной степени, через которую проходит точно один треугольник, тогда $e(G) \leq n^2/4$. Притом существуют точно два графа, для* *которых равенство достигается при* $n \geq 6$. *При* $n \geq 8$ *только для одного из них* $\max\{t(v) \mid v$ — *вершина максимальной степени*$\} = 1$.

Доказательство предложения 1. Первая часть предложения 1 совпадает с леммой 1. Докажем вторую часть. Пусть $v(G) = n$, $e(G) = n^2/4$, и через вершину v_1 максимальной степени d проходит единственный треугольник $[v_1, v^{(1)}, v^{(2)}]$. Очевидно,

$$\frac{n^2}{4} = e(G) = d + 1 + \sum_{i=2}^{n-d} d(v_i) - e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}). \tag{23}$$

Докажем, что $e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}) \leq 1$. Действительно, если это не так, тогда из (23) следует, что

$$\frac{n^2}{4} < d + \sum_{i=2}^{n-d} d(v_i) \leq (n-d) \cdot d \leq \frac{n^2}{4}, \tag{24}$$

что является противоречием.

Рассмотрим сначала случай, когда $e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}) = 1$. В этом случае из (23) следует

$$\frac{n^2}{4} = d + \sum_{i=2}^{n-d} d(v_i) \leq (n-d) \cdot d \leq \frac{n^2}{4} \tag{25}$$

и, следовательно, $d = n/2$ и $d(v_i) = d$, $i = 2, 3, \ldots, n/2$. Пусть единственное ребро, соединяющее вершины типа v_i, $i = 2, 3, \ldots, n/2$, есть $[v_2, v_3]$. Любая из вершин v_i при $i > 3$ смежна всем вершинам $v^{(j)}$, а любая из вершин v_2 и v_3 смежна всем за исключением одной из вершин $v^{(j)}$. Единственное ребро, соединяющее вершины типа $v^{(j)}$ — это $[v^{(1)}, v^{(2)}]$. Вершина $v^{(1)}$ не смежна одновременно вершинам v_2 и v_3, так как в противном случае $d(v^{(1)}) = 1 + n/2 > d$ — противоречие. Аналогично, вершина $v^{(2)}$ не смежна одновременно вершинам v_2 и v_3. С другой стороны, вершина v_i, $i = 2$ или $i = 3$, смежна хотя бы одной из вершин $v^{(1)}$, $v^{(2)}$. Пусть, например, v_2 смежна $v^{(1)}$. Тогда v_3 смежна $v^{(2)}$. Очевидно v_i при $i = 2$ и $i = 3$ смежна всем вершинам $v^{(j)}$ при $j \geq 3$.

Окончательно, при $e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}) = 1$, G имеет вершины $v_1, v_2, \ldots, v_{n/2}$, $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n/2)}$ и ребра $[v_i, v^{(j)}]$ при $i = 1, 4, \ldots, n/2$, и $j = 1, 2, \ldots, n/2$, или при $i = 2$ и $j = 1, 3, \ldots, n/2$, или при $i = 3$ и $j = 2, 3, \ldots, n/2$, а также $[v_2, v_3]$ и $[v^{(1)}, v^{(2)}]$. Этот граф обозначим $G(n)$. Очевидно $n \geq 6$ и $G(n)$ является регулярным графом степени $n/2$, для которого $t(v_1) = t(v_4) = t(v_5) = \cdots = t(v_{n/2}) = t(v^{(3)}) = t(v^{(4)}) = \cdots = t(v^{(n/2)}) = 1$ и $t(v_2) = t(v_3) = t(v^{(1)}) = t(v^{(2)}) = n/2 - 2$. Заметим, что при $n = 6$ и только тогда, через любую вершину (максимальной степени) графа $G(n)$ проходит точно один треугольник.

Рассмотрим теперь случай, когда $e(v_2, \ldots, v_{n-d}) = 0$. Очевидно,

$$\frac{n^2}{4} = e(G) = d(v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(d)}) = \sum_{i=1}^{d} d(v^{(i)}) - e(v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(d)}) \tag{26}$$

$$= \sum_{i=1}^{d} d(v^{(i)}) - 1 \leq d^2 - 1$$

и, следовательно, $d^2 \geq n^2/4 + 1$, т. е. $d \geq n/2 + 1$. Кроме того

$$(27)\qquad \frac{n^2}{4}=e(G)=d+1+\sum_{i=1}^{n-d}d(v_i)\leqq 1+(n-d)d,$$

а так как $d\geqq n/2+1$, то

$$(28)\qquad (n-d)\,.\,d\leqq n^2/4-1.$$

Неравенства (27) и (28) показывают, что в (27) и (28) должно быть равенство и, следовательно, $d(v_i)=d$, $i=1, 2, \ldots, n-d$ и $d=n/2+1$.

Мы получили, что в случае $e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d})=0$, G имеет вершины $v_1, v_2, \ldots, v_{n/2-1}, v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n/2+1)})$ и ребра $[v_i, v^{(j)}]$, где $1\leqq i\leqq n/2-1$ и $1\leqq j\leqq n/2+1$, а также $[v^{(1)}, v^{(2)}]$. Полученный граф обозначим $H(n)$, $n\geqq 4$. Имеем $d(v_1)=\cdots=d(v_{n/2-1})=n/2+1$, $d(v^{(1)})=d(v^{(2)})=n/2$ и $d(v^{(j)})=n/2-1$ при $j=3, 4, \ldots, n/2+1$.

Очевидно $G(n)$ и $H(n)$ не изоморфны при $n\geqq 6$.

Следствие 3. *Пусть* $v(G)=n$, *где* n — *четно, и* $e(G)\geqq n^2/4+1$. *Тогда через любую вершину максимальной степени графа* G *проходят хотя два треугольника. Для любого четного* n, $n\geqq 6$, *существуют точно два графа* G, *для которых* $v(G)=n$, $e(G)\geqq n^2/4+1$ *и в которых можно найти вершину максимальной степени, через которую проходят только два треугольника. Только в одном из них, через любую вершину максимальной степени проходят точно два треугольника.*

Доказательство следствия 3. Первая часть следствия 3 тривиально следует из предложения 1. Докажем вторую часть. Пусть $v(G)=n$, где n — четно и $e(G)\geqq n^2/4+1$, а v_1 — вершина максимальной степени, для которой $t(v_1)=2$. Пусть $[v_1, v^{(i)}, v^{(j)}]$ — треугольник графа G. Удалим из графа G ребро $[v^{(i)}, v^{(j)}]$. Для полученного графа G' имеем: $v(G')=n$, $e(G')\geqq n^2/4$ и v_1 — вершина максимальной степени графа G', через которую проходит точно один треугольник. Тогда согласно предложению 1, $G'=G(n)$ или $G'=H(n)$. Равенство $G'=G(n)$ невозможно, так как если оно выполнено, тогда $d(v_1;\ G')=d(v^{(i)};\ G')$, потому что граф $G(n)$ регулярен, а неравенство $d(v_1;\ G)=d(v_1;\ G')<d(v^{(i)}, G')+1=d(v^{(i)};\ G)$ противоречиво. Следовательно, $G'=H(n)$. Граф G получается из графа $H(n)$ путем присоединения ребра типа $[v^{(i)}, v^{(j)}]$, отличного от ребра $[v^{(1)}, v^{(2)}]$. Однако таким образом получаются точно два графа: первый из них $H^2(n)$ — присоединением ребра $[v^{(2)}, v^{(3)}]$, а второй — $H^{1,1}(n)$ — присоединением ребра $[v^{(3)},v^{(4)}]$. Первый из этих графов определен при $n/2+1\geqq 3$, т. е. $n\geqq 4$, а второй при $n/2+1\geqq 4$, т. е. $n\geqq 6$.

Графы $H^2(n)$ и $H^{1,1}(n)$ не изоморфны. В $H^2(n)$ только при $n=4$ через любую вершину максимальной степени проходят точно два треугольника. В $H^{1,1}(n)$ это верно для любого $n\geqq 6$.

Следствие 4. *Если* $v(G)=n$, *где* n — *четно, и существует вершина максимальной степени, через которую проходят точно* m *треугольников,* $m\geqq 1$, *тогда*

$$(29)\qquad e(G)\leqq n^2/4+m-1.$$

Доказательство следствия 4. Доказательство проведем индукцией по m. При $m=1$ следствие 4 совпадает с первой частью предложения 1. Допустим теперь, что утверждение верно для $m-1$, $m-1\geqq 1$, и докажем его для m. Пусть $v(G)=n$ и v_1 — вершина максимальной степени, через которую проходят точно m треугольников. Пусть один из этих треугольников $[v_1, v^{(1)}, v^{(2)}]$. Удалим ребро $[v^{(1)}, v^{(2)}]$ из графа G. В полученном графе G' вершина v_1 тоже имеет максимальную степень и через v_1 проходят точно $m-1$ треугольников. По индукционному предположению $e(G')\leq n^2/4+m-2$. Следовательно, $e(G)=e(G')+1\leq n^2/4+m-1$.

Интересно и здесь, как и в предложении 1, заняться вопросом о достижении равенства в (29). Это тоже можно сделать без особых затруднений, однако для краткости мы сформулируем и докажем все только в случае $m=2$ и $m=3$. Общий случай рассматривается аналогично.

Следствие 5. *Пусть $v(G)=n$, где n — четно, и существует вершина максимальной степени, через которую проходят точно два треугольника. Тогда $e(G)\leq n^2/4+1$. При $n\geq 6$ существуют точно два графа, для которых равенство достигается. Только для одного из них* $\max\{t(v)\mid v$ — вершина максимальной степени$\}=2$.

Доказательство следствия 5. Неравенство содержится в следствии 4. Пусть теперь оно переходит в равенство. Тогда согласно следствию 3 имеем $G=H^2(n)$ или $G=H^{1,1}(n)$ (см. доказательство следствия 3)

Следствие 6. *Пусть $v(G)=n$, где n — четно, и существует вершина максимальной степени, через которую проходят точно четире треугольника. Тогда $e(G)\leq n^2/4+2$. При $n\geq 10$ существуют точно четыре графа, для которых равенство достигается. Точно в одном из них* $\max\{t(v)\mid v$ — *вершина максимальной степени*$\}=3$.

Доказательство следствия 6. Неравенство содержится в следствии 4. Пусть теперь оно переходит в равенство и v_1 — вершина максимальной степени, через которую проходят точно три треугольника. Один из этих треугольников пусть будет $[v_1, v^{(i)}, v^{(j)}]$. Удалим из графа G ребро $[v^{(i)}, v^{(j)}]$. Для полученного графа G' имеем $e(G')=n^2/4+1$ и v_1 — вершина максимальной степени графа G', через которую проходят точно два треугольника. Согласно следствию 5 имеем $G'=H^2(n)$ или $G'=H^{1,1}(n)$. Граф G получается из $H^2(n)$ или $H^{1,1}(n)$ присоединением к нему нового ребра типа $[v^{(i)}, v^{(j)}]$. Заметим, что к графу G' нельзя присоединить нового ребра так, чтобы три ребра типа $[v^{(p)}, v^{(q)}]$ имели общую вершину, так как она имела бы степень $n/2-1+3=d+1>d$.

Следовательно, при $n=6$ существуют два графа, при $n=8$ — три графа а при $n\geq 10$ — четыре графа, для которых равенство достигается.

Перейдем к результатам, связанным с леммой 2. Отметим сначала следующее предложение, которое тривиально следует из леммы 2 с помощью индукции:

Следствие 7. *Пусть n — нечетно и $v(G)=n$. Если v_1 — вершина максимальной степени графа G, для которой $t(v_1)=m$, $m\geq 1$, то*

$$e(G)\leq[n^2/4]+m. \tag{30}$$

Интересен вопрос о том, когда (30) переходит в равенство. При $m=1$ ответ на этот вопрос содержится в лемме 2. Рассмотрим сейчас случай $m=2$. Общий случай $m\geq 3$ исследуется аналогично.

Следствие 8. *Пусть n — нечетно и $v(G)=n$. Если v_1 — вершина максимальной степени графа G, для которой $t(v_1)=2$, то $e(G)\leq[n^2/4]+2$ и равенство здесь достигается только при $n\geq 7$ и то при любом $n\geq 9$ для единственного графа.*

Доказательство следствия 8. Первая часть утверждения содержится в следствии 7. Допустим теперь, что $e(G)=[n^2/4]+2$ и v_1 — вершина максимальной степени графа G, для которой $t(v_1)=2$. Пусть $[v_1, v^{(i)}, v^{(j)}]$ — треугольник графа G. Через G' обозначим граф, который получается после удаления ребра $[v^{(i)}, v^{(j)}]$ из графа G. Тогда $v(G')=n$, $e(G')=[n^2/4]+1$ и $t(v_1;\ G')=1$. Согласно лемме 2 имеем $G'=R(n;\ 2)$. Следовательно, G получается из $R(n;\ 2)$ присоединением к нему нового ребра типа $[v^{(i)}, v^{(j)}]$. Это ребро не может быть смежным ребру $[v^{(1)}, v^{(2)}]$, так как если они имеют общую вершину, например, $v^{(2)}$ — тогда $d(v^{(2)})=(n-1)/2+2>(n+1)/2=d$ — противоречие. Следовательно, G имеет вершины $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1/2}, v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v_{(n+1)/2}$ и ребра $[v_i, v^{(j)}]$, $1\leq i\leq (n-1)/2$, $1\leq j\leq (n+1)/2$ и еще $[v^{(1)}, v^{(2)}]$ и $[v^{(3)}, v^{(4)}]$. Этот граф обозначаем через $R(n;\ 2)$. Отметим, что $(n+1)/2\geq 4$, т. е. $n\geq 7$.

Предложение 2. *Пусть n — нечетно, $v(G)=n$ и $\max\{t(v)\mid v$ — вершина максимальной степени графа $G\}=1$. Тогда*

$$e(G)\leq [n^2/4]-1 \quad \text{при } n>5. \tag{31}$$

Равенство в (31) для любого $n>7$ достигается точно для трех графов, а при $n=7$ — для пяти графов.

Доказательство предложения 2. Пусть v_1 — вершина максимальной степени, для которой $t(v_1)=1$. Согласно лемме 2 имеем $e(G)\leq [n^2/4]+1$. Если допустим, что $e(G)=[n^2/4]+1$, тогда согласно лемме 2 имеем $G=R(n;\ 2)$. Так как $d(v^{(1)})=d$ и $t(v^{(1)})=(n-1)/2$, то $(n-1)/2\leq 1$, т. е. $n\leq 3$. Следовательно, при $n>3$ имеем $e(G)\leq [n^2/4]$. Допустим, что $e(G)=[n^2/4]$ и $n>3$. Тогда

$$[n^2/4]=e(G)=d+1+d(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d})=d+1+\sum_{i=2}^{n-d} d(v_i)-e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d}) \tag{32}$$

$$\leq (n-d)d+1-e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d})\leq [n^2/4]+1-e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d})$$

и, следовательно, $e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d})\leq 1$.

Допустим сначала, что $e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d})=1$. Согласно (32) имеем $d(v_i)=d$, $i=1, 2, \ldots, n-d$ и $d=(n\pm 1)/2$. Впрочем возможность $d=(n-1)/2$ отпадает, так как $[n^2/4]=e(G)\leq nd/2=n(n-1)/4<[n^2/4]$ при $n\geq 5$. Следовательно, $d=(n+1)/2$. Пусть $[v_2, v_3]$ — единственное ребро графа G типа $[v_i, v_j]$, а $[v^{(1)}, v^{(2)}]$ — единственное ребро типа $[v^{(i)}, v^{(j)}]$. Вершина v_2 смежна точно одной из вершин $v^{(1)}, v^{(2)}$ — пусть v_2 смежна $v^{(1)}$. Тогда v_2 смежна всем вершинам $v^{(3)}, v^{(4)}, \ldots, v^{((n+1)/2)}$. Аналогично v_3 смежна всем вершинам $v^{(3)}, v^{(4)}, \ldots, v^{((n+1)/2)}$. Следовательно, $(n+1)/2-2\leq 1$, т. е. $n\leq 5$, а это невозможно, потому что $(n-1)/2\geq 3$.

Рассмотрим теперь случай, когда $e(v_2, v_3, \ldots, v_{n-d})=0$. Сейчас

$$\left[\frac{n^2}{4}\right]=e(G)=d+1+\sum_{i=2}^{n-d} d(v_i)\leq (n-d)d+1 \tag{33}$$

и, следовательно,

$$(n-d)d\geq [n^2/4]-1. \tag{34}$$

С другой стороны,

$$\left[\frac{n^2}{4}\right]=e(G)=d(v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(d)})=\sum_{i=1}^{d} d(v^{(i)})-e(v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(d)})$$

$$=\sum_{i=1}^{d} d(v^{(i)})-1\leq d^2-1,$$

так что $d^2\geqq[n^2/4]+1$ и, следовательно,

$$d\geqq[n/2]+1. \tag{35}$$

Из (34) и (35) легко следует, что $d=[n/2]+1$. Действительно, если допустим, что $d\geqq[n/2]+2$, тогда $d\geqq(n+3)/2$ и, следовательно, $\varphi(d)=(n-d)d \leqq\varphi((n+3)/2)<[n^2/4]-1$, что противоречит неравенству (34). Итак, $d=(n+1)/2$. Из (33) получаем

$$d+\sum_{i=2}^{n-d} d(v_i)=\left[\frac{n^2}{4}\right]-1. \tag{36}$$

Равенство (36) показывает, что существует $i, i\geq 2$, для которого $d(v_i)<d$. Пусть, например, $d(v_2)<d$. Снова из (36) следует, что $d(v_2)=d-1$ и $d(v_i)=d$ при $i\geq 3$. Пусть $[v^{(1)}, v^{(2)}]$ — единственное ребро типа $[v^{(i)}, v^{(j)}]$. Тогда $d(v^{(k)})=d$ при $k=1$ или $k=2$ и, следовательно, $t(v^{(k)})\leqq 1$, так что $(n-1)/2\leqq 2$, т. е. $n\leqq 5$. При $n=5$ легко убедиться, что граф G с вершинами v_1, v_2, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ и ребрами $[v_1, v^{(i)}]$, $i=1, 2, 3$, $[v_2, v^{(i)}]$, $i=1, 3$ и $[v^{(1)}, v^{(2)}]$ имеет $e(G)=[n^2/4]$ и $\max\{t(v)\mid v$ — вершина максимальной степени$\}=1$ и это единственный граф, для которого выполняется равенство $e(G)=[n^2/4]$.

Таким образом мы доказали, что неравенство (31) выполнено при $n>5$. Займемся экстремальным случаем, когда (31) переходит в равенство при $n>5$.

I) $d(v_2)\leqq d-2$.

Имеем

$$\left[\frac{n^2}{4}\right]-1=e(G)\leq d+1+d-2+\sum_{i=3}^{n-d} d(v_i)-e(v_2, \ldots, v_{n-d})\leq(n-d)d-1\leq\left[\frac{n^2}{4}\right]-1,$$

где v_1 — вершина максимальной степени, для которой $t(v_1)=1$ и, следовательно, $d(v_2)=d-2$, $d(v_3)=d(v_4)=\cdots=d(v_{n-d})=d$, $e(v_2, \ldots, v_{n-d})=0$ и $(n-d)d=[n^2/4]$, т. е. $d=(n+1)/2$. Заметим, что v_2 не смежна ни вершине $v^{(1)}$, ни вершине $v^{(2)}$, где $[v^{(1)}, v^{(2)}]$ — единственное ребро типа $[v^{(i)}, v^{(j)}]$. Действительно, если v_2 смежна, например, вершине $v^{(1)}$, тогда $d(v^{(1)})=(n-1)/2+1=d$ и $t(v^{(1)})\geq 2$, так как при $n>5$ выполняется неравенство $(n-1)/2\geq 3$. К графу G присоединим новые ребра $[v_2, v^{(1)}]$ и $[v_2, v^{(2)}]$. Для полученного графа G' имеем $e(G')=[n^2/4]+1$. В графе G' вершина v_1 имеет максимальную степень и через нее проходит один треугольник. Согласно лемме 2 имеем $G'=R(n; 2)$. Следовательно, граф G получается из графа Радемахера $R(n; 2)$, если удалим из него ребра $[v_2, v^{(1)}]$ и $[v_2, v^{(2)}]$. Обозначим этот граф через $R^{-2}(n; 2)$.

Итак, в случае I единственный экстремальный граф есть $R^{-2}(n; 2)$.

II) $d(v_2)\leq d-1$, $d(v_3)\leq d-1$.

В этом случае аналогично получаем $d(v_2)=d(v_3)=d-1$, $d(v_i)=d$, $i\geq 4$, $d=(n+1)/2$, $e(v_2, \ldots, v_{n-d})=0$. Вершина v_2 смежна хотя бы одной из вершин $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, где $[v^{(1)}, v^{(2)}]$ — единственное ребро типа $[v^{(i)}, v^{(j)}]$. Вершина v_3 тоже смежна хотя бы одной из вершин $v^{(1)}$, $v^{(2)}$.

IIa) Вершины v_2 и v_3 смежны одновременно одной из вершин $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, например, вершине $v^{(1)}$.

Теперь $d(v^{(1)})=d$ и, следовательно $t(v^{(1)})\leqq 1$. Так как любая из вершин $v_i, i\geqq 4$, смежна одновременно $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$, то таких вершин не должно быть. Следовательно, $(n-1)/2\leqq 3$, т. е. $n\leqq 7$ и, значит, $n=7$. Окончательно, в случае IIa есть единственный экстремальный граф G_1, который имеет вершины $v_1, v_2, v_3, v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}$ и ребра $[v_1, v^{(i)}], i=1, 2, 3, 4, [v_2, v^{(i)}], i=1, 3, 4, [v_3, v^{(i)}], i=1, 3, 4$ и $[v^{(1)}, v^{(2)}]$. Для него $n=7, e(G_1)=[n^2/4]-1$ и через любую вершину максимальной степени проходит точно один треугольник.

IIб) Вершины v_2 и v_3 не смежны одновременно никакой из вершин $v^{(1)}, v^{(2)}$.

Вершина v_2 смежна хотя одной из вершин $v^{(1)}, v^{(2)}$, например, вершине $v^{(1)}$. Тогда v_3 не смежна $v^{(1)}$ и, следовательно, смежна $v^{(2)}$. Следовательно, v_2 не смежна $v^{(2)}$. Значит, вершины $v_i, i=1, 2, \ldots, n-d$ смежны всем вершинам $v^{(j)}, j\geqq 3$. Мы получили, что граф G получается из графа $R(n; 2)$ вычитанием ребер $[v_2, v^{(2)}]$ и $[v_3, v^{(1)}]$. Этот граф обозначим через $R^{-1,-1}(n; 2)$.

Итак, в случае Iб имеется единственный экстремальный граф $R^{-1,-1}(n; 2)$.

III) $$d(v_2)=d-1,\ d(v_3)=\cdots=d(v_{n-d})=d.$$

Теперь

$$[n^2/4]-1=e(G)=d+1+d-1+(n-d-2)d-e(v_2, \ldots, v_{n-d}) \tag{37}$$
$$=(n-d)d-e(v_2, \ldots, v_{n-d})\leq[n^2/4]-e(v_2, \ldots, v_{n-d})$$

и, следовательно, $e(v_2, \ldots, v_{n-d})\leqq 1$,

IIIa) $e(v_2, \ldots, v_{n-d})=1$.

Из (37) получаем $d=(n+1)/2$. Легко установить, что $(n-1)/2\leqq 3$, т. е. $n\leqq 7$, и так как $(n-1)/2\geqq 3$, то $n=7$. Легко проверить, что вершины $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ не смежны одновременно вершинам v_2 и v_3. С другой стороны, v_3 не смежна хотя бы одной из вершин $v^{(1)}, v^{(2)}$ — например, $v^{(1)}$. Вершина v_3 не смежна вершине $v^{(2)}$. Действительно, если v_3 смежна $v^{(2)}$, тогда $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ не смежны v_2 и, следовательно, v_2 смежна вершинам $v^{(3)}$ и $v^{(4)}$. Однако и v_3 смежна хотя бы одной из вершин $v^{(3)}$ и $v^{(4)}$ и получим, что $t(v_3)\geqq 2$, что является противоречием. Так как вершина v_3 не смежна вершине $v^{(2)}$, то v_3 смежна $v^{(3)}$ и $v^{(4)}$. Вершина v_2 не может быть смежной одновременно вершинам $v^{(3)}$ и $v^{(4)}$, однако v_2 не смежна и вершине $v^{(1)}$. Следовательно, v_2 смежна вершине $v^{(2)}$ и, например, вершине $v^{(3)}$. Получили, что G имеет вершины $v_1, v_2, v_3, v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}$ и ребра $[v^{(1)}, v^{(2)}], [v_2, v_3], [v_1, v^{(i)}], i=1, 2, 3, 4, [v_2, v^{(i)}], i=2, 3, [v_3, v^{(i)}], i=1, 3, 4$. Обозначим этот граф G_2.

Итак, в случае IIIa единственный экстремальный граф G_2.

IIIб) $e(v_2, \ldots, v_{n-d})=0$.

В этом случае (37) дает $(n-d)d=[n^2/4]-1$, а это невозможно, как легко проверяется.

IV) $d(v_i)=d, i=1, 2, \ldots, n-d$.

Теперь

$$[n^2/4]-1=e(G)=1+(n-d)d-e(v_2, \ldots, v_{n-d})\leq 1+[n^2/4]-e(v_2, \ldots, v_{n-d}) \tag{38}$$

и, следовательно, $e(v_2, \ldots, v_{n-d})\geqq 2$.

IVa) $e(v_2, \ldots, v_{n-d})=0$.

Из (38) следует $(n-d)d=[n^2/4]-2$ и, значит, $d=(n+3)/2$. Тогда G получается из полного бихроматического графа $K((n+3)/2, (n-3)/2)$ присоединением к нему нового ребра, соединяющего вершины большего хроматического класса. Этот граф обозначим $H(n)$.

Итак, в случае IVa единственный экстремальный граф есть $H(n)$.

IVб) $e(v_2, \ldots, v_{n-d})=1$.

Из (38) вытекает $[n^2/4]-1=(n-d)d$, что невозможно.

IVв) $e(v_2, \ldots, v_{n-d})=2$.

Из (38) следует $d=(n+1)/2$. Пусть $[v_2, v_3]$ — ребро графа G. Тогда, хотя одна из вершин v_2, v_3, например, v_2 — смежна только одной вершине — v_3 — типа v_i и, следовательно, смежна $d-1$ вершинам типа $v^{(j)}$. Другая из вершин v_2, v_3 — v_3 — смежна хотя $d-2$ вершинам типа $v^{(j)}$. Следовательно, v_2 и v_3 одновременно смежны хотя $d-3$ вершинам типа $v^{(j)}$ и, значит, $d-3\leqq 1$, т. е. $(n+1)/2\leqq 4$, так что $n\leqq 7$. Однако $(n-1)/2\geqq 4$ и, следовательно, $n\geqq 9$ — противоречие.

Окончательно: при $n>7$ экстремальные графы $R^{-2}(n;\ 2)$, $R^{-1,-1}$, $(n;\ 2)$ и $H(n)$, а при $n=7$ к ним надо перечислить еще два — G_1 и G_2. Все эти графы попарно не изоморфны.

Следствие 9. *Пусть n — нечетно, $v(G)=n$, $e(G)\geqq[n^2/4]$ и $t(G)>0$. Тогда существует вершина максимальной степени, через которую проходят хотя бы два треугольника.*

Предложение 3. *Пусть n — нечетно, $v(G)=n$ и* $\max\{t(v) \mid v$ — вершина максимальной степени$\}=2$. *Тогда $e(G)\leqq[n^2/4]$ при $n>5$. При этом для любого $n>9$ равенство достигается точно для двух графов. Экстремальные графы указаны в тексте доказательства.*

Доказательство предложения 3. Пусть v_1 — вершина максимальной степени d, для которой $t(v_1)=2$. Тогда

$$e(G)=2+d+\sum_{i=2}^{n-d} d(v_i)-e(v_2, \ldots, v_{n-d}) \tag{39}$$

и, следовательно, $e(G)\leqq 2+(n-d)d\leqq 2+[n^2/4]$. Докажем, что равенство $e(G)=2+[n^2/4]$ невозможно. Допустим, что оно выполнено. Тогда $d(v_i)=d$, $2\leqq i\leqq n-d$, $e(v_2, \ldots, v_{n-d})=0$ и $d=(n+1)/2$. Граф G имеет точно два ребра типа $[v^{(i)}, v^{(j)}]$. Они не смежны. Действительно, если допустим, что это не так и $v^{(i)}$ — их общая вершина, тогда, очевидно, $d(v^{(i)})=2+(n-1)/2>d$, что является противоречием. Обозначим эти две ребра $[v^{(1)}, v^{(2)}]$ и $[v^{(3)}, v^{(4)}]$. Очевидно, $d(v^{(1)})=1+(n-1)/2=d$ и, следовательно, $t(v^{(1)})\leqq 2$. Так как $t(v^{(1)})=(n-1)/2$, то $(n-1)/2\leqq 2$, т. е. $n\leqq 5$. Но тогда $(n+1)/2\leqq 3$, что невозможно, так как вершины типа $v^{(i)}$ имеются хотя бы четыре. Полученное противоречие показывает, что $e(G)\leqq 1+[n^2/4]$.

Докажем, что равенство $e(G)=1+[n^2/4]$ невозможно. Допустим противное. Тогда

$$\left[\frac{n^2}{4}\right]+1=e(G)=2+d+\sum_{i=2}^{n-d} d(v_i)-e(v_2, \ldots, v_{n-d})\leqq 2+d(v_i)-d+(n-d)d$$

и, следовательно, $d(v_i)\geqq d-1$ для любого $i=2, 3, \ldots, n-d$. Допустим, что для двух различных значений индекса i, например, $i=2$ и $i=3$, имеем $d(v_i)=d-1$. Тогда

$$\begin{aligned}[n^2/4]+1=e(G)&\leqq 2+d+d-1+d-1+(n-d-3)d-e(v_2, \ldots, v_{n-d})\\ &\leqq(n-d)d\leqq[n^2/4],\end{aligned}$$

что является противоречием. Поэтому можно считать, что или $d(v_i)=d$ при $i=2, 3, \ldots, n-d$, или $d(v_2)=d-1$ и $d(v_i)=d$ при $3\leq i\leq n-d$.

Рассмотрим сначала первый случай. Сейчас

$$[n^2/4]+1=e(G)=2+(n-d)d-e(v_2, \ldots, v_{n-d})\leq[n^2/4]+1+1-e(v_2, \ldots, v_{n-d}).$$

Следовательно, $e(v_2, \ldots, v_{n-d})\leq 1$. Допустим, что $e(v_2, \ldots, v_{n-d})=1$. Теперь $(n-d)d=[n^2/4]$ и $d=(n+1)/2$. Единственное ребро типа $[v_i, v_j]$ пусть будет $[v_2, v_3]$. Любая из вершин v_2, v_3 смежна $d-1$ вершинам типа $v^{(j)}$ и, следовательно, существуют хотя бы $d-2$ вершин типа $v^{(j)}$, которые смежны одновременно вершинам v_2 и v_3. Так как $d(v_2)=d$, то $t(v_2)\leq 2$ и, следовательно, $d-2\leq 2$, т. е. $n\leq 7$. С другой стороны, $(n-1)/2\geq 3$ и, следовательно, $n=7$. Нетрудно убедиться, что существует вершина v максимальной степени графа G, для которой $t(v)>2$. Рассмотрим теперь случай, когда $e(v_2, \ldots, v_{n-d})=0$. Теперь $[n^2/4]+1=2+(n-d)d$ и, следовательно, $(n-d)d=[n^2/4]-1$, что невозможно.

Итак, случай, когда $d(v_i)=d$ при $i=2, \ldots, n-d$, полностью рассмотрен. Пусть теперь $d(v_2)=d-1$ и $d(v_i)=d$ при $3\leq i\leq n-d$. Имеем $[n^2/4]+1=e(G)=1+(n-d)d-e(v_2, \ldots, v_{n-d})\leq 1+[n^2/4]$ и, следовательно, $d=(n+1)/2$, $e(v_2, \ldots, v_{n-d})=0$. Пусть $[v^{(1)}, v^{(2)}]$ — одно из двух ребер типа $[v^{(i)}, v^{(j)}]$. Вершина v_2 смежна хотя бы одной из вершин $v^{(1)}, v^{(2)}$ — например, $v^{(1)}$. Тогда $d(v^{(1)})=d$ и, следовательно, $t(v^{(1)})\leq 2$. Очевидно $t(v^1)\geq(n-1)/2-1$ и, следовательно, $n\leq 7$. Если $n=7$, тогда вершина v_2 не смежна вершине $v^{(2)}$ и, следовательно, смежна вершинам $v^{(3)}$ и $v^{(4)}$. Нетрудно сообразить, что некоторая из вершин $v^{(i)}$ имеет максимальную степень, и через нее проходят больше двух треугольников. Следовательно, $n\leq 5$ и, так как $(n+1)/2\geq 3$, то $n=5$. Тогда нетрудно сообразить, что G имеет вершины $v_1, v_2, v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ и ребра $[v_1, v^{(i)}]$, $i=1, 2, 3$, $[v_2, v^{(i)}]$, $i=1, 3$ и $[v^{(1)}, v^{(2)}]$, $[v^{(2)}, v^{(3)}]$.

Окончательно $e(G)\leq[n^2/4]$ при $n>5$, а при $n=5$ есть единственный граф, для которого $e(G)=[n^2/4]+1$.

Осталось найти экстремальные графы, т. е. те графы, которые удовлетворяют условиям предложения и равенству $e(G)=[n^2/4]$. Из равенств (39), $e(G)=[n^2/4]$ и неравенств $d(v_i)\leq d$ получаем

$$[n^2/4]\leq 2+d(n-d)-e(v_2, \ldots, v_{n-d})\leq 2+[n^2/4]-e(v_2, \ldots, v_{n-d})$$

и, следовательно, $e(v_2, \ldots, v_{n-d})\leq 2$.

I) $e(v_2, \ldots, v_{n-d})=2$.

Теперь $[n^2/4]=d+\Sigma_{i=2}^{n-d}d(v_i)\leq(n-d)d\leq[n^2/4]$ и, следовательно, $d=(n+1)/2$ и $d(v_i)=d$, $i=2, \ldots, n-d$. Легко сообразить, что существует такое ребро $[v_i, v_j]$, что v_i смежна $d-1$ вершинам типа $v^{(k)}$, а v_j смежна хотя бы $d-2$ вершинам типа $v^{(k)}$. Следовательно, существуют хотя бы $d-3$ треугольников, проходящих через ребро $[v_i, v_j]$. Тогда $d-3\leq 2$, и, следовательно, $n\leq 9$. Так как $(n-1)/2\geq 4$, то $n=9$. Можно проверить, что существует вершина максимальной степени графа G, через которую проходят больше двух треугольников.

II) $e(v_2, \ldots, v_{n-d})=1$.

Теперь $[n^2/4]=e(G)=1+d+\Sigma_{i=2}^{n-d}d(v_i)$. Если допустим, что $d(v_i)=d$ при $i=2, \ldots, n-d$, тогда $[n^2/4]=1+(n-d)d$, что невозможно. Поэтому, например, $d(v_2)\leq d-1$. Тогда $[n^2/4]\leq(n-d)d\leq[n^2/4]$, и, следовательно, $d(v_2)=d-1$, $d(v_i)=d$ при $i=3, \ldots, n-d$ и $d=(n+1)/2$. Так как $e(v_2, \ldots, v_{n-d})=1$, то существует ребро типа $[v_i, v_j]$. Легко сообразить, что через ребро $[v_i, v_j]$ проходят хотя бы $d-3$ треугольников, и, следовательно, $n \leq 9$. При $n=7$ получаем, что G имеет вершины $v_1, v_2, v_3, v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}$ и ребра $[v_2, v_3]$, $[v^{(1)}, v^{(2)}]$, $[v^{(2)}, v^{(3)}]$, $[v_1, v^{(i)}]$, $i=1, 2, 3, 4$, $[v_2, v^{(i)}]$, $i=2, 4$, $[v_3, v^{(i)}]$, $i=1, 3, 4$. Полученный граф является экстремальным. При $n=9$ экстремальных графов нет.

III) $e(v_2, \ldots, v_{n-d})=0$.

Теперь

$$\left[\frac{n^2}{4}\right]=e(G)=2+d+\sum_{i=2}^{n-d} d(v_i). \tag{40}$$

С другой стороны, $e(G)=\sum_{i=1}^{d} d(v^{(i)})-2=[n^2/4]$, и, следовательно, $d^2 \geq [n^2/4]+2$ т. е. $d \geq [n/2]+1$. Докажем, что $d \leq [n/2]+2$. Действительно, если допустим что $d \geq [n/2]+3=(n+5)/2$ и положим $\varphi(d)=d(n-d)$, тогда $\varphi(d) \leq \varphi((n+5)/2=[n^2/4]-6<[n^2/4]-2$, а, с другой стороны, из (40) следует $[n^2/4]-2 \leq \varphi(d)$' Итак, $[n/2]+1 \leq d \leq [n/2]+2$.

IIIa) $d=[n/2]+1$.

Так как $d+\sum_{i=2}^{n-d} d(v_i)=[n^2/4]-2 \leq \varphi(d)=[n^2/4]$, то представляются следующие две возможности:

1) $d(v_2)=d(v_3)=d-1$, $d(v_i)=d$, $i=4, \ldots, n-d$,

2) $d(v_2)=d-2$, $d(v_i)=d$, $i=3, 4, \ldots, n-d$.

Рассмотрим их последовательно.

1a) Оба ребра типа $[v^{(i)}, v^{(j)}]$ — не смежны. Пусть они $[v^{(1)}, v^{(2)}]$ и $[v^{(3)}, v^{(4)}]$. Нетрудно сообразить, что $(n-1)/2 \leq 4$, и, следовательно, $n \leq 9$. Случай $n=9$ легко отбросить. Следовательно, $n=7$. Легко получить, что G имеет вершины $v_1, v_2, v_3, v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}$ и ребра

$$[v^{(1)}, v^{(2)}], [v^{(3)}, v^{(4)}], [v_1, v^{(i)}], i=1, 2, 3, 4, [v_2, v^{(i)}], i=1, 3, 4, [v_3, v^{(i)}], i=1, 2, 4.$$

Полученный граф — экстремальный.

1б) Оба ребра типа $[v^{(i)}, v^{(j)}]$ — смежны. Пусть они $[v^{(1)}, v^{(2)}]$ и $[v^{(2)}, v^{(3)}]$. Легко сообразить, что $(n-1)/2 \leq 4$, т. е. $n \leq 9$. При $n=9$ получаем следующий экстремальный граф — вершины $v_1, v_2, v_3, v_4, v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}, v^{(5)}$ и ребра $[v^{(1)}, v^{(2)}]$, $[v^{(2)}, v^{(3)}]$, $[v_1, v^{(i)}]$, $i=1, 2, 3, 4, 5$, $[v_i, v^{(j)}]$, $i=2, 3$, $j=1, 3, 4, 5$, $[v_4, v^{(i)}]$, $i=1, 2, 3, 4, 5$. При $n=7$ получаем следующий экстремальный граф: вершины $v_1, v_2, v_3, v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}$ и ребра $[v^{(1)}, v^{(2)}]$, $[v^{(2)}, v^{(3)}]$, $[v_1, v^{(i)}]$, $i=1, 2, 3, 4$, $[v_i, v^{(j)}]$, $i=2, 3$, $j=1, 3, 4$.

2a) Оба ребра типа $[v^{(i)}, v^{(j)}]$ — не смежны. Пусть они $[v^{(1)}, v^{(2)}]$ и $[v^{(3)}, v^{(4)}]$. Легко сообразить, что $(n-1)/2 \leq 3$, т. е. $n \leq 7$ и так как $(n+1)/2 \geq 4$, то $n=7$. В этом случае экстремальный граф имеет следующий вид: вершины — $v_1, v_2, v_3, v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}$ и ребра — $[v^{(1)}, v^{(2)}]$, $[v^{(3)}, v^{(4)}]$, $[v_i, v^{(j)}]$, $i=1, 3$, $j=1, 2, 3, 4$, $[v_2, v^{(i)}]$, $i=1, 3$.

2б) Оба ребра типа $[v^{(i)}, v^{(j)}]$ — смежны. Пусть они $[v^{(1)}, v^{(2)}]$ и $[v^{(2)}, v^{(3)}]$. В этом случае $d(v^{(2)})=2+(n-1)/2-1=d$ и, следовательно, $t(v^{(2)}) \leq 2$. Так как $t(v^{(2)}) \geq (n-1)/2$, то $(n-1)/2 \leq 2$ и, следовательно, $n \leq 5$.

IIIб) $d=[n/2]+2$.

Так как $[n^2/4]-2=d+\sum_{i=2}^{n-d} d(v_i) \leq \varphi(d)=[n^2/4]-2$, то $d(v_i)=d$ при $i=2, 3, \ldots, n-d$. В этом случае тривиально получаются следующие экстремальные графы: $H^2(n)$ с вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_{(n-3)/2}, v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n+3)/2}$ и ребрами $[v_i, v^{(j)}]$, $1 \leq i \leq (n-3)/2$, $1 \leq j \leq (n+3)/2$, $[v^{(1)}, v^{(2)}]$, $[v^{(2)}, v^{(3)}]$ и $H^{1,1}(n)$

с теми же самыми вершинами и ребрами за исключением последнего, который в случае заменяем на $[v^{(3)}, v^{(4)}]$.

Следствие 10. *Пусть n — нечетно, $n>5$, $v(G)=n$ и $e(G)\geq[n^2/4]+1$. Тогда существует вершина максимальной степени графа G, через которую проходят хотя бы три треугольника.*

Добавление 3. В этом добавлении отметим две следствия из теоремы 1.

Следствие 11. *Если $v(G)=n$ и $e(G)\geqq d(n-d)+1$, где d — максимальная степень вершин графа G, тогда $t_m(G)\geqq n-d$.*

Следствие 12. *Если $v(G)=n$ и $e(G)\geqq[n^2/4]+1$ и, кроме того, граф G имеет единственную вершину v_1 максимальной степени d, то $d\geq[n/2]+2$, $t(v_1)\geq d$ при четном n и $t(v_1)\geqq d-1$ при нечетном n. Этих неравенств нельзя усилить.*

Доказательство следствия 12. Так как $\Sigma d(v)=2e(G)$, то $d+(n-1)(d-1)\geqq 2([n^2/4]+1)$ и, следовательно, $d\geq[n/2]+2$. Из теоремы 1 следует $t(v_1)\geq[n^2/4]-(n-1)(d-1)$. Остается проверить, что $[n^2/4]-(n-1)(d-1)\geq d$ при четном n и $d\geq n/2+2$, а $[n^2/4]-(n-1)(d-1)\geqq d-1$ при нечетном n и $d\geq(n-1)/2+2$.

Пусть n четно. Рассмотрим граф G с вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_{n-d}, v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(d)}$ и ребрами $[v_1, v^{(i)}]$, $i=1, 2, \ldots, d$, $[v^{(i)}, v^{(i+1)}]$, $i=1, 2, \ldots, d-1$, $[v^{(d)}, v^{(1)}]$ и $[v_i, v^{(j)}]$, $i=2, \ldots, n-d$, $j=1, 2, \ldots, d-1$. Очевидно, при $d=n/2+2$ имеем $e(G)=n^2/4+1$ и v_1 — единственная вершина максимальной степени графа G. Ясно, что $t(v_1)=d$.

Предположим теперь, что n нечетно. Рассмотрим граф, который определили выше, и удалим из него ребро $[v^{(d)}, v^{(1)}]$. Полученный граф G' при $d=(n-1)/2+2$ имеет $e(G')=(n^2-1)/4+1$ и v_1 — единственная вершина максимальной степени; кроме того, $t(v_1)=d-1$.

Нетрудно найти все экстремальные графы в этой задаче.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Turan. On the theory of graphs. *Colloq. Math.*, **3**. 1954, 19—30.
2. Н. Хаджииванов. Триъгълници в граф. *Математика*, **16**, 1977, № 1, 9—14.
3. Н. Хаджииванов, Н. Ненов. О максимуме числа ребер графа. *Доклады БАН*, **29**, 1976, 1575—1578.
4. Н. Хаджииванов. Усиление одной теоремы Радемахера о графах. *Плиска*, **2**, 1979 (в печати).
5. P. Erdos. On the number of triangles contained in certain graphs. *Canad. Math. Bull.* **7**, 1964, 53—56.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 22. 4. 1977