Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

ПРОСТЫЕ ГРУППЫ ДЛИНЫ 9

СТОЙЧО П. ЯКИМОВ

В настоящей статье изучаются простые группы с короткими цепочками собственных подгрупп. Формулировке полученных результатов предпошлем исторический обзор, дающий представление о возникновении понятия о длине группы и о месте в теории простых групп круга задач, связанных с этим понятием.

Определение. *Подгруппа H в группе G называется n-максимальной, если в G существует такая цепочка подгрупп $G=G_0\supset G_1\supset G_2\supset\ldots\supset G_n=H$, что подгруппа G_i максимальна в G_{i-1}, $i=1,2,\ldots,n$.*

Естественно ожидать, что, налагая определенные условия на все n-максимальные подгруппы в данной группе G, мы можем получить четко определенный класс конечных групп.

Хорошо известна, например, теорема Дедекинда, дающая описание всех неабелевых групп, каждая собственная подгруппа которых нормальна — это так называемые группы Гамильтона. Следующий шаг в обобщении этого результата — характеризация конечных групп, в которых все максимальные подгруппы (в нашей терминологии: 1-максимальные подгруппы) нормальны. Этот шаг сделал Виланд: *Конечная группа нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы нормальны.*

В 1954 году Хупперт охарактеризовал конечные группы, в которых соответственно все 2-максимальные и все 3-максимальные подгруппы нормальны: *Если 2-максимальные подгруппы в G нормальны, то G сверхразрешима. Если, кроме того, $\pi(G)$ содержит хотя бы три различных простых числа, то G будет нильпотентной.*

Пусть любая 3-максимальная подгруппа в G нормальна. Тогда коммутант G' нильпотентен, и порядок каждого главного фактора группы G делится не более, чем на два (одинаковых) простых числа. Если, кроме того, $\pi(G)$ содержит хотя бы три различных простых числа, то группа G сверхразрешима.

В цитированных выше результатах все группы оказываются разрешимыми, но при $n=4$ появляются впервые неразрешимые группы.

Теорема (Янко [9]). *Если G — простая группа, все 4-максимальные подгруппы которой нормальны, то G изоморфна $L_2(p)$, где $p=5$ или p — простое и $p\pm 1$ разлагается в произведение не более, чем трех простых чисел, причём $p\equiv\pm 3$ или ± 13* (mod 40).

С увеличением n описание разрешимых и неразрешимых групп, не являющихся простыми, становится мало обозримым. Постепенно усилия математиков, занимающихся подобными задачами, сосредоточились на простых группах. Для простой группы условие нормальности всех n-максимальных

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 5, 1979, с. 209—221.

подгрупп превращается в условие на длину $l(G)$ в смысле следующего определения.

Определение. *Пусть* $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_m = 1$ — *цепочка собственных подгрупп группы* G. *Назовем число* m *длиной цепочки. Максимальное значение* m *называется длиной группы* G *и обозначается через* $l(G)$.

Если G — *простая группа, то все* n-*максимальные подгруппы в* G *нормальны тогда и только тогда, когда* $l(G) = n$.

Простые группы длины 5 описаны Янко (1964): *Если* G — *простая группа с* $l(G) = 5$, *то* G *изоморфна* $L_2(q)$ *для подходящего* q.

При $l(G) = 6$ появляется первая спорадическая простая группа, а именно группа Янко, J_1, порядка 175560. Обобщая результаты Янко, Харада (1968) охарактеризовал простые группы G с $l(G) \leqq 7$.

Теорема (Харада [13]). *Если* G — *простая группа с* $l(G) \leqq 7$, *то* G *изоморфна одной из следующих простых групп:* J_1, M_{11}, A_7, $U_3(3)$, $U_3(5)$, $L_2(q)$ *для подходящего* q.

В 1974 г. Чепулич рассмотрел вопрос о характеризации простых групп длины 8.

Теорема (Чепулич [11]). *Если* G — *простая группа с* $l(G) = 8$, *то либо* G *имеет секционный* 2-*ранг* $\leqq 4$, *либо силовская* 2-*подгруппа в* G — *абелева*.

Отметим еще, что имеются работы, в которых на n-максимальные подгруппы налагаются другие условия, отличные от условий нормальности. Например, Янко, Гаген и др. рассматривали вопрос об описании конечных простых групп, в которых все n-максимальные подгруппы (для небольшого n) нильпотентны. Беркович Я. Г., Манн и др. требовали, чтобы все 2-максимальные подгруппы были p-нильпотентны. Мы не будем формулировать полученные при этих условиях результаты. Довольно полный обзор содержится в докладе Фейта на математическом конгрессе в Ницце (1970).

Основной результат этой статьи — полное описание всех конечных простых групп длины 9.

Теорема 1. *Пусть* G — *конечная простая неабелева группа с* $l(G) = 9$. *Тогда* G *изоморфна одной из следующих простых групп:* A_8, $L_3(4)$, $U_3(4)$, $PSp(3,4)$, $U_3(11)$, $U_3(13)$, $L_2(2^7)$, $L_2(q)$, q — *подходящее нечетное число*.

Это корректная формулировка, которая исправляет некоторые ошибки в анонсе теоремы, опубликованной в [16].

Некоторые обозначения: D_{2^n} — диэдральная группа порядка 2^n; QD_{2^n} — квазидиэдральная группа порядка 2^n; E_{p^n} — элементарная абелева группа порядка p^n; Q_{2^n} — обобщенно-кватернионная группа порядка 2^n; $|G|$ — порядок группы G; $|G|_p$ — порядок силовской p-подгруппы группы G; $\pi(G)$ — множество простых делителей порядка группы G; $\mathrm{Syl}_p(G)$ — множество силовских p-подгрупп группы G; $m(G)$ — 2 — ранг группы G, т. е. порядок максимальной элементарной абелевой 2-подгруппы в G; $\Phi(G)$ — подгруппа Фратини группы G; $O_2(G)$ — наибольшая нормальная в G 2-подгруппа; $O(G)$ — наибольшая нормальная в G $2'$-подгруппа; $H * G$ — центральное произведение групп H и G; $H \int G$ — сплетение групп H и G. $L_n(q) = PSL(n, q)$ — проективная специальная линейная группа степени n над полем из q элементов; $U_n(q) = PSU(n, q^2)$ — проективная специальная унитарная группа степени n над полем из q^2 элементов; $\widehat{A}_n$ — нерасщепляемое центральное расширение знакопеременной группы A_n при помощи Z_2.

Фактор-группа H/K, где $K \lhd H \subseteq G$, называется сечением группы G. Говорят, что группа G имеет секционный 2-ранг $r(G) \leqq s$, если любое сечение силовской 2-подгруппы в G порождается не более чем s элементами.

Если $H \subset G$ — подгруппа с $O(H)=1$, то символом $L(H)$ обозначается 2-слой — единственная максимальная нормальная полупростая подгруппа в H. По определению группа L полупроста, если она разлагается в центральное произведение квазипростых групп. Группа L квазипростая, если $L'=L$ и $L/Z(L)$ — простая группа. Условие $L(H)=1$ эквивалентно 2-скованности подгруппы H.

Все другие обозначения являются общепринятыми, и их определения можно найти, например, в книге Горенстейна [4].

В ходе доказательства теоремы часто приходится устанавливать, что простая группа G имеет секционный 2-ранг $r(G) \leqq 4$, если в G существует подгруппа с некоторыми свойствами. Здесь особенно полезны результаты Харады, которые мы цитируем без доказательства.

Предложение 1. *Если простая группа G содержит инволюцию x такую, что $C_G(x)$ имеет силовскую 2-подгруппу, изоморфную $Z_2 \times D_{2n}$ или $Z_2 \times QD_{2n}$, то $r(G) \leqq 4$.*

Предложение 2. *Пусть G — конечная группа, содержащая инволюцию x и пусть выполняются следующие условия:*

1) *силовская 2-подгруппа $T \in \mathrm{Syl}_2(C_G(x))$ имеет вид: $T = U \times W$, $U \cong Z_2 \times Z_2$, $x \in U$, $W \cong D_{2n}$ или QD_{2n};*

2) *$T \in \mathrm{Syl}_2(C_G(u)$ для любой инволюции $u \in U^{\#}$. Тогда $r(G) \leqq 4$.*

Предложение 3. *Если 2-группа S содержит подгруппу A порядка 8 с $C_S(A) \subseteq A$, то $r(S) \leqq 4$.*

Предложение 4. *Пусть G — конечная группа, содержащая подгруппу $A \cong E_{16}$. Пусть:*

1) *$A \in \mathrm{Syl}_2(C_G(A))$;*

2) *$N_G(A)/C_G(A)$ изоморфна A_7, A_6, S_5, A_5 или $N_G(A)/C_G(A)$ содержит подгруппу индекса $\leqq 2$, изоморфную $Z_3 \times A_5$. Тогда $r(G) \leqq 4$.*

Замечание. Предложения 1 — 4 доказаны в работе [14].

Лемма 1. *Пусть G — конечная простая группа, $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$, $|S| = 2^7$ и $Z(S) \cong Z_2$. Тогда в S нет максимальных подгрупп, изоморфных $Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times D_8$.*

Доказательство леммы. Допустим, что S имеет максимальную подгруппу T, изоморфную $Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times D_8$. Если y — элемент из $S-T$ и $|y| \leqq 4$, то нетрудно показать, что $|C_{Z(T)}(y)| \geqq 2^2$, откуда $|Z(S)|>2$ — противоречие. Поэтому мы должны предположить, что любой элемент $y \in S-T$ имеет порядок 8. Но тогда из леммы 16 [13] следует, что $G \neq G'$. Это, однако, противоречит простоте G.

Доказательство теоремы 1. Из условия $l(G)=9$ следует, что $|S| \leqq 2^8$ для $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и что любая собственная подгруппа $H \subset G$ имеет длину $l(H) \leqq 8$. Отдельно рассматриваются три случая: А) $|S| = 2^8$, Б) $|S| = 2^7$ и В) $|S| \leqq 2^6$.

А) Так как $|S| = 2^8$ и $l(G)=9$, то силовская 2-подгруппа S максимальна в G. Простые группы с максимальной силовской 2-подгруппой были недавно классифицированы Бауманом [2]. Из его результата следует, что $S \cong D_2^8$. Небольшие вычисления показывают, что существует только одна простая G длины 9 с силовской 2-подгруппой D_{28}, а именно $L_2(257)$.

Б) Далее принимаем, что $|S|=2^7$, где $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$, G — конечная простая группа с $l(G)=9$. Имея в виду известные описания конечных простых групп с абелевой силовской 2-подгруппой или секционного 2-ранга $r(G) \leq 4$, мы предположим, что S неабелева и $r(S)>4$. Предположение $r(S)>4$ означает, что выполняется одно из следующих условий: 1) $\Phi(S) \cong Z_2 \times Z_2$,

2) S содержит подгруппу $X \cong E_{32}$,

3) S содержит неабелеву подгруппу Q порядка 2^6 такую, что $Q/\Phi(Q) \cong E_{32}$.

Предложение 5. *Если N —2-локальная подгруппа в G, содержащая S, то N — разрешимая подгруппа.*

Доказательство. Предположим, что N неразрешима. Тогда $l(N)=8$, $O(N)=1$ и $O_2(N) \neq 1$. Из результатов Баумана [2] следует, что $O^2(N/O_2(N)) \cong L_2(q)$, $q=2^n \pm 1>5$ — простое или $q=9$ и что $|O_2(N)| \leq 2^3$. Отсюда $O_2(N) \cong E_8$ и $q=7$. Но тогда $|N|_2=2^6$ — противоречие.

Следствие 1. *Пусть z — центральная инволюция в G. Тогда централизатор $C_G(z)$ — разрешимая подгруппа и $|C_G(z)|=2^7$ или $2^7 . p$, где p — нечетное простое число.*

Предложение 6. *Пусть N-2-локальная подгруппа в G. Если N—2-скована, то N будет разрешимой.*

Доказательство. Предположим, что N — неразрешимая подгруппа в G. Ввиду предложения 5 имеет место неравенство $|N|_2 \leq 2^6$. Положим $\bar{N}=N/O(N)$, $O_2(\bar{N})=\bar{X}$ и $\tilde{X}=\bar{X}/\Phi(\bar{X})$. Тогда $\bar{N}/\bar{X}$ изоморфна подгруппе в $\mathrm{Aut}(\tilde{X})$ и так как N неразрешима, то имеет место один из изоморфизмов $\tilde{X} \cong E_8$ или E_{16}. Если $\tilde{X} \cong E_{16}$, то $l(\bar{N}/\bar{X})=4$ и $\bar{N}/\bar{X} \cong A_5$. Тогда $O(N)=1$ и из предложения 4 следует, что $r(G) \leq 4$ — противоречие. Если $\tilde{X} \cong E_8$, то $\bar{N}/\bar{X} \cong GL_3(2)$ и $O(N)=1$. Применяя предложение 3, снова получаем, что $r(G) \leq 4$ — противоречие.

Наиболее важным шагом в доказательстве теоремы 1 будет доказательство разрешимости 2-локальных подгрупп в G. Ввиду предложения 2 и теоремы 4 из работы [3] для этого достаточно доказать следующее предложение.

Предложение 7. *Централизатор $C_G(x)$ любой инволюции x является 2-скованной подгруппой в G.*

Идея доказательства. Допустим, что в G существует инволюция x такая, что централизатор $C_G(x)$ не будет 2-скованной подгруппой. Из следствия 1 получаем, что x не будет центральной. Из всех таких инволюций выберем x так, что силовская 2-подгруппа в $C_G(x)$ имеет максимальный порядок, т. е. если $|C_G(x_1)|_2>|C_G(x)|_2$ для некоторой инволюции x_1, то централизатор $C_G(x_1)$ будет 2-скованный и, следовательно, разрешимой подгруппой (предложение 6). Положим $H=C_G(x)$, $\bar{H}=H/O(H)$, $\bar{L}=L(\bar{H})$ и $\bar{C}=C_{\bar{H}}(\bar{L})$. Так как $l(\bar{L}/Z(\bar{L})) \leq 7$, то $\bar{L}$ изоморфна одной из следующих групп: M_{11}, $U_3(3)$, $U_3(5)$, J_1, A_7, $\hat{A}_7$, $L_2(q)$ или $SL(2, q)$. Кроме того, из соображений о длине следует, что $\bar{C}$ — разрешимая подгруппа и фактор $\bar{H}/\bar{C}$

изоморфен подгруппе в $\mathrm{Aut}(\bar{L})$. Мы покажем, что в каждом возможном случае получается противоречие.

Доказательство предложения 7 содержится в леммах 2 — 15.

Лемма 2. *Если* $\bar{L} \cong L_2(q)$, *то* $\bar{C} \cong Z_2$ *или* $Z_2 \times Z_2$.

Доказательство. Это одна из лемм в работе [5].

Лемма 3. $\bar{L}$ *не изоморфна* $\widehat{A}_7$.

Доказательство. Допустим, что $\bar{L} \cong \widehat{A}_7$. Если $\bar{C} = Z(\bar{L})$, то $\overline{Z(S)} = \langle \bar{x} \rangle$ (по лемме 6.1., гл. III, [5]) и, следовательно, $x \notin Z(S)$ — противоречие.

Если $\bar{C} \supset Z(\bar{L})$, то $|C| = 4$ и $H = \bar{C} . \bar{L}$. Так как силовская 2-подгруппа в $\widehat{A}_7$ изоморфна Q_{16}, то силовская 2-подгруппа T в H изоморфна $Z_4 * Q_{16}$ или $Z_2 \times Q_{16}$. Но тогда $\langle x \rangle$ char T, откуда $|C_G(x)|_2 > |T|$, что снова приводит к противоречию.

Лемма 4. $\bar{L}$ *не изоморфна* M_{11} *или* $U_3(5)$.

Доказательство. Предположим, что $\bar{L} \cong M_{11}$ или $U_3(5)$. Так как мультипликатор Шура этих групп тривиален, то имеет место один из изоморфизмов $\bar{H} \cong \langle \bar{x} \rangle \times M_{11}$ или $\langle \bar{x} \rangle \times U_3(5)$. Стало быть, силовская 2-подгруппа в H изоморфна $Z_2 \times QD_{16}$ и ввиду предложения 1 $r(G) \leq 4$, что противоречит нашим предположениям.

Лемма 5. $\bar{L}$ *не изоморфна* $SL(2, q)$, *где* q — *степень нечетного простого числа.*

Доказательство. Допустим противное. Если $\bar{C} = Z(\bar{L})$, то, как и в лемме 3, с помощью леммы 6.1, III, [5] получаем противоречие. Поэтому мы предположим, что $\bar{C} \supset Z(\bar{L})$. Так как централизатор любой центральной инволюции разрешим, то нетрудно показать, что $\overline{Z(S)} \cap \bar{R} = 1$, где $\bar{R} \in \mathrm{Syl}_2(\bar{C} . \bar{L})$. Следовательно, силовская 2-подгруппа в $\bar{H} / \bar{C}$ содержит подгруппу, изоморфную $Z_2 \times D_{2^n}$. Из $l(\bar{L}\,\bar{C}) \leq 7$ и $l(\bar{C}) \geq 2$ получаем, что $l(\bar{L} / Z(\bar{L})) \leq 5$. Есть только одна возможность: $\bar{L} \cong SL(2,9)$, а $\bar{C} \cong Z_4$ или $Z_2 \times Z_2$. Поэтому силовская 2-подгруппа T в H изоморфна $Z_2 \times (Z_4 * Q_{16})$ или $Z_2 \times Z_2 \times Q_{16}$. Но тогда $\langle x \rangle$ char T, откуда $|C_G(x)|_2 > |T|$ — противоречие.

Лемма 6. $\bar{L}$ *не изоморфна* $U_3(3)$.

Доказательство. Предположим, что $\bar{L} \cong U_3(3)$. Так как мультипликатор Шура группы $U_3(3)$ тривиален, то имеет место разложение $H \cong \langle x \rangle \times U_3(3)$. Следовательно, силовская 2-подгруппа $T \in \mathrm{Syl}_2(H)$ изоморфна $Z_2 \times (Z_2 \int Z_4)$.

Очевидно, $\Phi(S)$ не изоморфна $Z_2 \times Z_2$, так как $\Phi(T) \subseteq \Phi(S)$ и $\Phi(T) \cong Z_2 \times Z_4$.

Если S содержит подгруппу X, изоморфную E_{32}, то $X \cap T \cong E_{16}$, что невозможно, так как $m(Z_2 \int Z_4) = 2$.

Допустим, что S содержит подгруппу Q порядка 2^6, для которой $Q / \Phi(Q) \cong E_{32}$. Можно предположить, что $x \in Q$, откуда получаем равенство $Q \cap T = \langle x \rangle \times V$, где V изоморфна подгруппе в $Z_2 \int Z_4$. Подгруппа V будет неабелевой; в противном случае $V \cong Z_4 \times Z_4$, а в Q такой подгруппы не существует. Есть только одна возможность: $V \cong Z_4 * D_8$ и $Q \cap T \cong Z_2 \times Z_4 * D_8$. Из $x \in Q$ следует, что $Z(Q) \subseteq Q \cap T$ и поэтому $Z(Q) \cong Z_4$. Но тогда из равенства $Z(T) = Z(Q \cap T)$ получаем, что $Z(S) \cong Z_4$. Кроме того, $Q \cong Z_4 Q_8 * Q_8$.

Пусть $\langle z\rangle=(Z(S))^2$. Если $N_G(J(S))=S$, $\langle z\rangle\lhd S$ и G непростая (см. [7], следствие 15.5). Если $N_G(J(S))=N_G(S)\supset S$, то снова $\langle z\rangle\lhd N_G(J(S))$ и G непростая, как было показано выше. Поэтому предположим, что $F=N_G(J(S))\supset N_G(S)=S$. Если $O(F)\neq 1$, то $S/C_S(O(F))$ — циклическая группа, так что $C_S(O(F))\supseteq S'\supseteq\langle z\rangle$. Следовательно, $\langle z\rangle\triangle N_G(J(S))=SO(F)$, и мы снова получаем, что G не может быть простой. Мы должны принять, что $O(F)=1$. Так как $O_2(F)\supseteq J(S)$ и $J(S)$ содержит подгруппу, изоморфную $Z_2\times Z_4\times Z_4$, то $|O_2(F)|\geq 2^5$. Если $|O_2(F)|=2^5$, то $O_2(F)\cong Z_2\times Z_4\times Z_4$ и $|F:S|=3$ или 7. Это, однако, невозможно. Пусть $|O_2(F)|=2^6$. Так как $Z(S)\subseteq Z(O_2(F))$, то центр $Z(O_2(F))$ изоморфен Z_4, $Z_2\times Z_4$, $Z_2\times Z_2\times Z_4$ или $Z_4\times Z_4$. В первых трех случаях $\langle z\rangle\lhd N_G(J(S))$ и G не будет простой. Если $Z(O_2(F))\cong Z_4\times Z_4$, то $|F:S|=3$ и силовская 3-подгруппа в F действует регулярно на $Z(O_2(F))$. Кроме того, $O_2(F)/Z(O_2(F))\cong Z_2\times Z_2$. Следовательно, $\Phi(O_2(F))=Z(O_2(F))$ или $\Phi(O_2(F))=\Omega_1(Z(O_2(F)))$. В первом случае Q должна содержать подгруппу, изоморфную $Z_4\times Z_4$, что невозможно.

Если $\Phi(O_2(F))\cong Z_2\times Z_2$, то $O_2(F)=P_1P_2$, где подгруппы P_1, P_2 инвариантны относительно силовской 3-подгруппы $A\in \mathrm{Syl}_3(F)$ и $P_1\cap P_2=\Phi(O_2(F))$. Мы можем предполагать, что $P_1=Z(O_2(F))$. Нетрудно показать, что подгруппа P_2 абелева. Если A действует тривиально на $P_2/\Phi(O_2(F))$, то $P_2=C_{P_2}(A)\times[P_2, A]$, где $C_{P_2}(A)\cong Z_2\times Z_2$. Отсюда следует, что $O_2(F)\cong Z_2\times Z_2\times Z_4\times Z_4$. Но тогда S' — циклическая подгруппа и, следовательно, $r(S)\leq 4$ (см. [8]). Пусть A действует нетривиально на $P_2/\Phi(O_2(F))$. Тогда $P_2\cong E_{16}$ или $Z_4\times Z_4$. Во всех случаях $O_2(F)$ будет абелевой подгруппой порядка 2^6, а S' — циклической подгруппой, что, как было уже показано, ведет к противоречию.

Лемма 7. *Если для централизатора H выполнены следующие условия:*

1) $\bar{L}\cong L_2(q)$; *q — нечетно,*

2) $\bar{H}=\bar{C}\times\bar{L}$, *то* $r(G)\leq 4$.

Доказательство. Из 1) и 2), как уже было показано в лемме 2, следует, что подгруппа $\bar{C}$ изоморфна Z_2 или $Z_2\times Z_2$. В первом случае заключение получаем с помощью предложения 1, а во втором — с помощью предложения 2.

Лемма 8. *Централизатор H не удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\bar{L}\cong L_2(q)$; *q — нечетное,*

2) $|\bar{H}:\bar{C}.\bar{L}|=r$ *или* $2r$, *где r — нечетное простое число.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда из списка простых групп длины не больше 6 видно, что $r=3$ и $q=p^3$, p — простое число.

Пусть $|\bar{H}:\bar{C}.\bar{L}|=6$. Тогда $l(\bar{L})=5$ и $\bar{L}\cong L_2(27)$. Следовательно, $O(H)=1$ и $H/\langle x\rangle\cong P\Gamma L(2,27)$. Так как централизатор центральной инволюции в $P\Gamma L(2,27)$ имеет порядок $2^3.3.7$, то для центральной инволюции z в G получаем, что $C_G(z)$ содержит элементы порядка 3 и 7, а это ввиду следствия 1 невозможно.

Предположим теперь, что $|\bar{H}:\bar{C}.\bar{L}|=3$. Тогда $\bar{L}\cong L_2(8)$, $L_2(27)$ или $L_2(125)$. Пусть $\bar{L}\cong L_2(27)$ или $L_2(125)$. По лемме 2 подгруппа $\bar{C}$ изоморфна Z_2 или $Z_2\times Z_2$; при этом $\bar{C}\cong Z_2\times Z_2$ только в случае $\bar{L}\cong L_2(27)$, так как $l(L_2(125))=6$. Если $\bar{C}\cong Z_2$, то по теореме Мазурова [1] силовская 2-подгруппа в G должна быть элементарной порядка 8, что невозможно. Если $\bar{C} \cong Z_2 \times Z_2$ и $\bar{L} \cong L_2(27)$, то, как и выше, получаем, что централизатор центральной инволюции в G содержит элементы порядков 3 и 7, что противоречит следствию 1.

Пусть теперь $\bar{L} \cong L_2(8)$. Если $\bar{C} \cong Z_2$, то при помощи теоремы Мазурова [1] снова получаем противоречие. Если $\bar{C} \cong Z_2 \times Z_2$, то силовская 2-подгруппа $T \in \mathrm{Syl}_2(H)$ нормальна в $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$. В противном случае существует $g \in S$ с $T^g \neq T$. Возьмем $y \in T^g - T$. Тогда ввиду $\bar{C} \cong Z_2 \times Z_2$ имеем $C_T(y) \cong E_8$ и, следовательно, $T \operatorname{char} T\langle y \rangle$. Но теперь из $|S : T\langle y \rangle| = 2$ следует, что $T \lhd S$. Однако, если $T \lhd S$, то $|N_G(T)| \geq 2^7 . 3 . 7$, откуда $l(N_G(T)) > 8$ — противоречие. Это заканчивает доказательство леммы.

Лемма 9. *$\bar{L}$ не изоморфна J_1 или A_7.*

Доказательство. Предположим, что $\bar{L} \cong J_1$. Так как мультипликатор Шура группы J_1 тривиален, то имеет место разложение $\bar{H} \cong \bar{C} \times J_1$. Но тогда централизатор любой центральной инволюции в G содержит элементы порядков 3 и 5, что противоречит следствию 1.

Если $\bar{L} \cong A_7$, то либо $\bar{H} = \bar{C} \times \bar{L}$, либо $|\bar{H} : \bar{C} . \bar{L}| = 2$. Рассмотрим сначала случай, когда $\bar{H} = \bar{C} \times \bar{L}$. Из $l(A_7) = 6$ следует, что $\bar{C} \cong Z_2$ или $Z_2 \times Z_2$. В первом случае силовская 2-подгруппа в H изоморфна $Z_2 \times D_8$, и по предложению 1 имеем $r(G) \leq 4$-противоречие. Если $\bar{C} \cong Z_2 \times Z_2$, то силовская 2-подгруппа в H изоморфна $Z_2 \times Z_2 \times D_8$, и мы получаем противоречие из предложения 2.

Допустим теперь, что $|\bar{H} : \bar{L}| = 2$, откуда $O(H) = 1$, $C = \langle x \rangle$ и $H / \langle x \rangle \cong S_7$. Нетрудно показать, что H расщепляется над $\langle x \rangle$, так что силовская 2-подгруппа в H изоморфна $Z_2 \times Z_2 \times D_8$. Пусть $H = \langle x \rangle \times L$, где $L \cong S_7$. Хорошо известно, что L содержит инволюцию $x_1 \in L$, для которой $C_L(x_1) \cong \langle x_1 \rangle \times PGL(2,5)$. Следовательно, $C_G(x_1)$ — неразрешимая подгруппа и $T \in \mathrm{Syl}_2(H)$ будет силовской 2-подгруппой и в $C_G(x_1)$ (здесь мы воспользовались условиями выбора инволюции x). Аналогично T будет силовской 2-подгруппой и в $C_G(xx_1)$. Теперь мы можем применить предложение 2 и получить противоречие. Этим заканчивается доказательство леммы.

Лемма 10. *H не удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\bar{L} \cong L_2(q)$; $q \neq 3^2$,

2) $|\bar{H} : \bar{C} . \bar{L}| = 2$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда по лемме 2 $\bar{C}$ изоморфна Z_2 или $Z_2 \times Z_2$. Рассмотрим сначала случай, когда $\bar{C} \cong Z_2$. Тогда $l(\bar{L}) \leq 6$ и из списка простых групп длины не больше 6 видно, что $\bar{L} \cong L_2(p)$, p — нечетное простое число, $L_2(3^3)$, $L_2(5^2)$ или $L_2(5^3)$. Пусть $\bar{L} \cong L_2(p)$, $L_2(3^3)$ или $L_2(5^2)$, так что $\bar{H} / \bar{C} \cong PGL(2, q)$. Если $\bar{H}$ не расщепляется над $\langle x \rangle$, то $T \in \mathrm{Syl}_2(H)$ будет квазидиэдральной или обобщенно кватернионной. В обоих случаях $\langle x \rangle = Z(T)$ char T и, следовательно, $|C_G(x)|_2 > |T|$ — противоречие. Если H расщепляется над $\langle x \rangle$, I то T изоморфна $Z_2 \times D_{2^n}$ и из предложения 1 снова получаем противоречие. Аналогично рассматривается случай $\bar{L} \cong L_2(5^2)$ и $\bar{H} / \langle x \rangle \cong PGL(2,5^2)$.

Пусть теперь $\bar{L} \cong L_2(5^2)$ и $\bar{H} / \langle x \rangle \cong PGL^*(2,5^2)$ (для обозначения $PGL^*(2,5^2)$ см. [5]). Тогда $T / \langle x \rangle \cong QD_{16}$, и мы покажем, что T расщепляется над $\langle x \rangle$.

Из $\Phi(T/\langle x\rangle)\cong Z_4$ следует, что $\Phi(T)\cong Z_2\times Z_4$ или Z_4. Предположим, что $\Phi(T)\cong Z_2\times Z_4$, откуда следует включение $x\in\Phi(T)$. Положим $R_2\in \mathrm{Syl}_2(L)$ и выберем $y\in N_S(T)-T$ с $y^2\in T$; тогда $W=\langle x\rangle\times R_2\lhd T\langle y\rangle$ и $W/\langle x\rangle=\Omega_1(T/\langle x\rangle)$. Хорошо известно, что $\Phi(T)=\mho^1(T)$; поэтому существует элемент $\bar{u}\in T-W$ такой, что $u^2=x$ или xz, где $\langle z\rangle=\Omega^1(\Phi(T))=Z(S)$, $S\in\mathrm{Syl}_2(G)$. Если $u^2=xz$, то $(u^y)^2=(xz)^y=x$, поэтому без ограничения можно предполагать, что $u^2=x$. Но тогда $\bar{u}$ — инволюция в $\bar{T}=T/\langle x\rangle$, не принадлежащая $\bar{R}_2=\Omega_1(\bar{T})$, что невозможно. Следовательно, $\Phi(T)\cong Z_4$. Если тогда $u\in T-W$ — элемент порядка 4, то $u^2=z$ и $\langle R_2, u\rangle\cap\langle x\rangle=1$, т. е. $T=\langle x\rangle\times R_2\langle u\rangle$ расщепляется над $\langle x\rangle$ и, следовательно, $T\cong Z_2\times QD_{16}$. Теперь из предложения 1 сразу получаем противоречие.

Наконец, пусть $L\cong L_2(5^2)$ и силовская 2-подгруппа в H/C изоморфна $Z_2\times D_8$. Нетрудно показать, что снова H расщепляется над $\langle x\rangle$, т. е. $T=\langle x, u\rangle\times R_2$, $R_2\in\mathrm{Syl}_2(L)$. Инволюцию u можно выбрать так, что $C_L(u)\cong\langle u\rangle\times PGL(2,5)$. Следовательно, $C_G(u)$ — неразрешимая подгруппа и $T\in\mathrm{Syl}_2(C_G(u))$. Аналогично $T\in\mathrm{Syl}_2(C_G(ux))$. Но теперь из предложения 2 следует, что $r(G)\leq 4$ — противоречие.

Итак, мы можем предполагать, что $\bar{C}\cong Z_2\times Z_2$, откуда $l(\bar{L})\leq 5$ и $\bar{L}\cong L_2(p)$, где p — нечетное простое число, или $L_2(3^3)$. Следовательно, $T/R_1\cong D_8$ с $R_1\in\mathrm{Syl}_2(\bar{C})$. Если силовская 2-подгруппа $S\in\mathrm{Syl}_2(G)$ содержит подгруппу $X\cong E_{32}$, то $X\cap R_1=1$. Но тогда $X\cap T\cong Z_2\times Z_2$, так как $m(D_8)=2$ и $|\langle x, T\rangle|>2^7$ — противоречие.

Допустим, что S содержит неабелеву подгруппу Q с $Q/\Phi(Q)\cong E_{32}$. По лемме Томпсона о слиянии $x\sim x_1\in Q$ и $C_Q(x_1)$ имеет порядок 2^5. Поэтому $C_Q(x_1)\cong T$, откуда $|Z(T)|>2^2$ ($|Z(Q)|\geq 4$ и $x_1\notin Z(Q)$) — противоречие.

Наконец пусть $\Phi(S)\cong Z_2\times Z_2$. Тогда $R_1\cap\Phi(S)=1$; в противном случае существует инволюция x_1, для которой $C_G(x_1)$ — неразрешимая подгруппа и $|C_G(x_1)|_2>|T|$, что противоречит выбору инволюции x. Отсюда следует, что в $T-R_1R_2$, $R_2\in\mathrm{Syl}_2(L)$ есть инволюция t, которая централизирует R_1. Поэтому $T=R_1\times\langle R_2, t\rangle\cong Z_2\times Z_2\times D_8$, и при помощи предложения 2 снова получаем противоречие. Этим заканчивается доказательство леммы.

Лемма 11. *Централизатор H не удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\bar{L}\cong L_2(2^n)$,

2) $\bar{H}=\bar{C}\times\bar{L}$.

Доказательство. Допустив противное, мы, как и в лемме 2, можем показать, что $\bar{C}$ изоморфна Z_2 или $Z_2\times Z_2$. Кроме того, так как $l(\bar{L})\leq 7$ и силовская 2-подгруппа в G не содержит абелевой подгруппы порядка 2^6, для $\bar{L}$ имеются только две возможности: $L_2(8)$ или $\bar{L}_2(16)$.

Если $\bar{C}\cong Z_2$, то по теореме Мазурова [1] силовская 2-подгруппа в G будет элементарной порядка 8 — противоречие.

Предположим, что $\bar{C}\cong Z_2\times Z_2$, откуда $\bar{L}\cong L_2(8)$. Мы утверждаем, что силовская 2-подгруппа $T\in\mathrm{Syl}_2(H)$ нормальна в $S\in\mathrm{Syl}_2(G)$. В противном случае $N_S(T)=\langle T, T^g\rangle$, где $T^g\neq T$, $g\in S$. Но тогда $Z(N_S(T))$ содержит инволюцию из $\bar{C}$, централизатор которой неразрешим и имеет силовскую 2-подгруппу, строго содержащую T. Это, однако, невозможно ввиду выбора инволюции x. Положим $N=N_G(T)=S\langle u\rangle$, где $u\in\bar{L}$ — элемент порядка 7, нормализующий T. Очевидно, $T\subset O_2(N)$ и $O_2(N)=C^{(U)}_{O_2(N)}[u, O_2(N)]$, где, $[u, O_2(N)]\subset T$ изоморфна E_8, а $C^{(u)}_{O_2(N)}$ имеет порядок 2^3 и $R_1\subset C^{(u)}_{O_2(N)}$ $R_1\in \mathrm{Syl}_2(\bar{C})$. Отсюда нетрудно вывести, что в R_1 есть инволюция x_1, для которой $C_G(x_1)$ — неразрешимая подгруппа и $|C_G(x_1)|_2>|T|$. Мы снова получили противоречие с выбором инволюции x.

Чтобы закончить доказательство предложения 7, нужно рассмотреть оставшиеся две возможности: $\bar{L}\cong L_2(9)$ и $|\bar{H}:\bar{C}.\bar{L}|=2$ или 4.

Пусть $|\bar{H}:\bar{C}.\bar{L}|=2$. По лемме 2 $\bar{C}$ изоморфна Z_2 или $Z_2\times Z_2$. Если $\bar{C}\cong Z_2\times Z_2$, то, как показано в лемме 2, $\bar{H}/\bar{C}\cong S_6$ и H расщепляется над C, так что $H=C\times K$, где $K\cong S_6$. Тогда по лемме 1, $|Z(S)|>2$ и так как $Z(S)\subset Z(T)$, $T\in \mathrm{Syl}_2(H)$, то $Z(S)\cong Z\times Z_2$. Из строения группы S_6 ясно, что в Z(S) имеется инволюция z с $M=C_G(z)=S\langle u\rangle$, где u — 3-элемент, содержащийся в H. Если $O(M)\neq 1$, то $O(M)=\langle u\rangle$, подгруппа $C_S(O(M))$ имеет порядок 2^6 и $\langle z_1\rangle=T'$ не содержится в $C_S(O(M))$. Но тогда S расщепляется над $\langle z_1\rangle$, а это невозможно, потому что $\langle z_1\rangle\subset R_2\subset S$ и $R_2\cong D_8$, $R_2\in \mathrm{Syl}_2(K')$. Следовательно, $O(M)=1$ и $M/O_2(M)\cong S_3$. Подгруппа $\langle u\rangle$ действует тривиально на C, поэтому $C\subset O_2(M)$ и $Z(T)\subset O_2(M)$. Из строения группы S_6 ясно, что $T\cap O_2(M)\cong E_{32}$, откуда $Z(O_2(M))\cong E_8$ и $(T\cap O_2(M))\ \mathrm{char}\ O_2(M)$. Отсюда $O_2(M)=C^{(u)}_{O_2(M)}\times[u, O_2(M)]$, поскольку $[u, O_2(M)]\subset Z(O_2(M))$. Но $|Z(C^{(u)}_{O_2(M)})|>2$, так что в G существует центральная инволюция с неразрешимым централизатором. Ввиду следствия 1 это невозможно.

Ситуация $\bar{C}\cong Z_2$ и $\bar{H}/\bar{C}\cong PGL(2,9)$ или $PGL^*(2,9)$ аналогична ситуации, рассмотренной в лемме 10.

Во всех рассуждениях ниже мы будем предполагать, что $Z(S)\cong Z_2$, где $S\in \mathrm{Syl}_2(G)$. Пусть $\bar{C}\cong Z_2$ и $\bar{H}/\bar{C}\cong S_6$. Нетрудно показать, что $\bar{H}$ расщепляется над $\langle\bar{x}\rangle$, т. е. $\bar{H}\cong\langle\bar{x}\rangle\times S_6$. Тогда силовская 2-подгруппа $T\in \mathrm{Syl}_2(H)$ имеет вид $T=R_2\times\langle u, x\rangle$, где $R_2\in \mathrm{Syl}_2(L)$ и инволюция u индуцирует автоморфизм Галуа на $\bar{L}$. По лемме 9.7, из гл. VI, [5], мы можем выбрать элемент $y\in N_S(T)-T$ таким образом, чтобы он нормализовал любую элементарную абелеву подгруппу в T порядка 16.

Пусть A — элементарная абелева подгруппа в T порядка 16. Положим $N=N_G(A)$, $\bar{N}=N/C_G(A)$. Очевидно, $A\in \mathrm{Syl}_2(C_G(A))$ и $C_G(A)=A\,.\,O(N)$. Кроме того, $A=\langle u, x\rangle\times B$, где $B=A\cap R_2$ и $\bar{K}=\bar{N}\cap\bar{H}\cong S_3$. При этом $\bar{P}=O_3(\bar{K})$ нормализует B и централизует $B^*=\langle u, x\rangle$ или $\langle uz, x\rangle$ (мы положили $\langle z\rangle=Z(R_2)$). Фактор-группа $\bar{N}$ будет разрешимой. В противном случае неравенство $l(\bar{N})\leq 4$ приводит к единственно возможному изоморфизму $\bar{N}\cong A_5$, а из предложения 4 следует, что $r(G)\leq 4$ — противоречие. Очевидно, $5\nmid|\bar{N}|$ (потому что $\bar{P}$ не действует регулярно на A). Из $y\in N$ следует, что $12/|\bar{N}|$, так что $7\nmid|N|$. Следовательно, $|\bar{N}|=2^a\,.\,3^b$. Положим $k=|\bar{N}:\bar{K}|$; из $|\bar{N}|_2\leq 8$ следует, что $k=2, 4, 6$ или 12.

Пусть теперь $|H:C.\bar{L}|=4$, откуда $C=\langle x\rangle$ и $H/C\cong P\Gamma L(2,9)$. Из $\Phi(T/\langle x\rangle)\cong Z_4$, $T\in \mathrm{Syl}_2(H)$ следует, что $\Phi(T)\cong Z_4$ или $Z_2\times Z_4$. Очевидно, $\Phi(S)$ не изоморфна $Z_2\times Z_2(S\in \mathrm{Syl}_2(G)$ и $S\supset T)$ и S не содержит подгруппы, изоморфной E_{32}. Допустим что существует подгруппа $Q\subset S$ порядка 2^6, для которой $Q/\Phi(Q)\cong E_{32}$. Нетрудно показать, что $T\cap Q\cong Z_2\times Z_2\times D_8$ и

$x \in Z(T \cap Q)$. Отсюда получаем, что $Z(Q) \cong Z_2 \times Z_2$, $Q \cong Z_2 \times Q_8 * Q_8$, $T \cap Q = \langle x, u \rangle \times R_2$, где $R_2 \in \mathrm{Syl}_2(\bar{L})$ и инволюция $\bar{u}$ индуцирует автоморфизм Галуа на $\bar{L}$. Легко видеть, что все элементарные абелевы подгруппы из T порядка 16 сопряжены в T и находятся в $R_2 \times \langle x, u \rangle$. Поэтому мы можем выбрать элемент $y \in N_S(T) - T$ таким образом, чтобы он нормализовал любую элементарную абелеву подгруппу в T порядка 16. Кроме того, в T найдется инволюция t такая, что $T = \langle t \rangle (R_2 \times \langle x, u \rangle)$ (для общности мы полагаем $t = 1$ в случае $\bar{C} \cong Z_2$ и $\bar{H}/\bar{C} \cong S_6$). Теперь, если A — элементарная абелева подгруппа в T порядка 16, мы можем повторить рассуждения для аналогичной ситуации в случае $\bar{C} \cong Z_2$ и $\bar{H}/\bar{C} \cong S_6$ и снова получить группу $N = N_G(A)$ с теми же свойствами, как и раньше. Мы фиксируем обозначения, которые приняли выше. Следующее изложение во многом следует анализу аналогичной ситуации, которая появляется в работе [5].

Лемма 12. *$k = 2$ или 4.*

Доказательство. Предположим, что $k \neq 2$ и 4. Тогда $9 \not| \, |\bar{N}|$. Пусть $\bar{Q} \in \mathrm{Syl}_3(\bar{N})$ с $\bar{Q} \supset \bar{P}$. Подгруппы $B = [A, P]$ и $B^* = C_A(\bar{P})$ будут $\bar{Q}$-инвариантными и $\bar{Q} = \bar{P} \times \bar{P}^*$; при этом $B^* = [A, \bar{P}^*]$ и $B = C_A(\bar{P}^*)$. Из $V = R_2 \langle x, u \rangle$ и $Z = Z(V) \subseteq A$ следует, что $Z = \langle z \rangle \times B^*$ будет $\bar{P}^*$-инвариантной. Следовательно, так как y централизует $b^* \in B^*$ и $b^* \sim x$, получаем, что $t \neq 1$. Из $V \in \mathrm{Syl}_2(C_G(z))$ следует, что P^* нормализует V и $H = N_G(V)$ содержит подгруппу $\langle R, P^* \rangle$, где $R = T \langle y \rangle$. Положим $\tilde{H} = H / C_G(V) \cdot V$. Тогда $12 / |\tilde{H}|$ и из $V \in \mathrm{Syl}_2(C_G^{\cdot}(V))$ следует, что $\tilde{H}$ действует точно на Z, откуда $\tilde{H} \cong A_4$. Тогда $\tilde{R} = \langle t, \tilde{y} \rangle \lhd \tilde{H}$ и без ограничения общности можно предположить, что P^* нормализует R.

Полагая $\bar{R} = R/Z$, мы получим, что P^* централизует $\bar{V} = \bar{R}_2 \cong Z_2 \times Z_2$, так как P^* централизует $V/B^* \cong R_2 \cong D_8$. Подгруппа $\bar{V}$ нормальна в $\bar{R}$, поэтому $\bar{V}$ централизует $[\bar{R}, P^*]$ и из $\bar{R} = \bar{V}[\bar{R}, P^*]$ получаем, что $\bar{R} = \bar{V} C_{\bar{R}}(\bar{V}) = \bar{R}_2 C_{\bar{R}}(\bar{R}_2)$. Следовательно, инволюция $\bar{t} \in \bar{R}$ централизует $\bar{R}_2$. Но это невозможно, так как из $R_1 R_2 \langle t \rangle / R_1 \cong D_{16}$, $R_1 = \langle u, x \rangle$ следует, что $\bar{R}_2 \langle \bar{t} \rangle \cong D_8$.

Лемма 13. *Имеет место неравенство $k \neq 4$.*

Доказателство. Пусть $k = 4$, так что $|\bar{N}| = 24$. Подгруппа $\bar{P}$ не действует регулярно на A; поэтому $\bar{P}$ соответствует подгруппе в A_8, порожденной двумя 3-циклами. Хорошо известно, что порядок нормализатора $N_{A_8}(\langle (123)(456) \rangle)$ не делится на 8. Следовательно, $\bar{P}$ не будет нормальной в $\bar{N}$, и из $\bar{K} \cong S_3$ получаем, что $\bar{N} \cong S_4$.

Обозначим через V $(T \cap N)$-инвариантную силовскую 2-подгруппу в прообразе $O_2(\bar{N})$ в N. Тогда $|V| = 2^6$, $U = V(T \cap N)$, $|U| = 2^7$. При помощи леммы Фратини мы можем найти подгруппу $P \in \mathrm{Syl}_3(N)$, которая нормализует V, централизует x и отображается на $\bar{P}$. В пересечении $R_2 \cap N$ имеется инволюция r, которая централизует B^* и инвертирует P. Тогда $Y = B^* \langle r \rangle \cong E_8$ и $Y \in \mathrm{Syl}_2(N_N(P))$.

а) $Z(V) \cong Z_2$. Тогда по лемме 2.6, гл. VI, [5], V будет 2-подгруппой типа A_8. По лемме 2.2 (V), гл. II, [5], $V_1 = [V, P] \cong Q_8 * Q_8$ и P действует регулярно на $V_1 / Z(V_1)$. Очевидно, $Z(V_1) = V_1 \cap Y$, и, следовательно, $V_1 Y = U$.

Так как $Y \cong E_8$, то U расщепляется над V_1 и U будет 2-группой типа A_{10} (лемма 2.7 (iii), гл. VI, [5]). Но тогда $r(G) \leq 4$ — противоречие.

б) $|Z(V)| \geq 4$.

Очевидно, центр $Z(V)$ P-инвариантен и $Z(V) \subseteq A$. В таком случае либо $B \subseteq Z(V)$, либо $Z(V) \subseteq B^*$. Если $Z(V) \subseteq B^*$, то $Z(V) = B^*$ и $C_V(x) \neq A$ — противоречие. Следовательно, $B \subseteq Z(V)$. Если $V_1 = [V, P]$, то $V_1 / B \cong Z_2 \times Z_2$ или Q_8. Рассмотрим различные возможности.

Пусть $V_1 / B \cong Z_2 \times Z_2$. Тогда $V_1 \cong E_{16}$ или $Z_4 \times Z_4$. Если $V_1 \cong E_{16}$, то V расщепляется над A, так что $r(V) \geq 5$ или V — 2-группа типа $L_3(4)$ (лемма 2.2 (iv), гл. II, [5]).

Предположим, что V — 2-группа типа $L_3(4)$. Тогда из $U = V\langle r \rangle$ следует, что U-2 — группа типа $\widehat{A}_8$ (лемма 2.2 (viii), гл. II, [5]) и $r(U) \leq 4$ — противоречие.

Если $r(V) \geq 5$, то $Z(V) \cong E_8$. В противном случае $B = V_1 \cap A = Z(V)$ и из $r(V) \geq 5$ следует, что $\Phi(V) \cong Z_2$ и $V \cong Z_2 \times (Q_8 * Q_8)$. Но тогда $B = Z(V) \cap C_V(P) \cap A = B^*$ — противоречие. Однако, если $Z(V) \cong E_8$, то $|Z(U)| = 4$. Это невозможно, так как мы предположили, что $Z(U) \cong Z_2$.

Итак, мы должны принять, что $V_1 \cong Z_4 \times Z_4$, откуда $V_1 \cap Y = 1$ и $U = V_1 Y$. Из $Y \cong E_8$ получаем $C_Y(V_1) \neq 1$ (лемма 2.1 (iv), гл. II, [5]). Так как $Y = B^*\langle r \rangle$ и B^* стабилизирует цепочку $V_1 \supset B \supset 1$, то $C_Y(V_1) \subseteq B^*$ и, следовательно, некоторая инволюция $b \in B^*$ централизует V_1. С другой стороны, подгруппа $\langle r, x \rangle$ действует точно на V_1, и поэтому $V_2 = V_1\langle r, x \rangle$ будет 2-группой типа M_{12}, а $U = \langle b \rangle V_2 = \langle b \rangle \times V_2$. Это невозможно, потому что тогда $|Z(U)| > 2$.

Наконец, пусть $V_1 / B \cong Q_8$. Тогда $\Omega_1(V_1) \cong E_8$ и $V_1' \subseteq \Omega_1(V_1)$. Если $V_1' \subset \Omega_1(V_1)$, то $V_1' \cong Z_2$ и из $V_1 \lhd U$ следует, что $V_1' = Z(U)$. Но тогда $V_1' \subseteq B \cap B^* = 1$ — противоречие. Следовательно, $V_1' = \Omega_1(V_1)$ и V_1 имеет максимальный класс, что тоже невозможно.

Лемма 14. *Имеет место неравенство* $k \neq 2$.

Доказательство. Допустим, что $k = 2$, так что $|\bar{N}| = 12$. Из $\bar{K} \cong S_3$ следует, что $\bar{N}$ не изоморфна A_4. Поэтому $\bar{P} \lhd \bar{N}$ и $B^* = C_A(\bar{P}) \lhd N$.

Пусть $t \neq 1$. Тогда $Z(T) = \langle z, x \rangle$, y нормализует $Z(T)$ и $\langle z \rangle = Z(S)$, так что $x^y = xz$. Но $x \in B^*$ и $B^* \lhd N$, откуда xz, а, следовательно, и $z \in B^*$ — противоречие.

Пусть $t = 1$. В этом случае $T = R_2 \times \langle x, u \rangle = R_2 \times B^*$. Очевидно $T \subset N$ и $R = T\langle y \rangle \in \mathrm{Syl}_2(N)$. Кроме того, $T = AA_1$, где A_1 — вторая элементарная абелева подгруппа в T порядка 16. Из $T^y = T$ и $A^y = A$ следует, что $A_1^y = A_1$.

Весь ход рассуждения применим и к A_1. Положим: $N_1 = N_G(A_1)$, $\bar{N}_1 = N / C_G(A_1)$ и $K_1 = H \cap N_1$. Тогда $K \cong S_3$ и $|\bar{N}_1 : \bar{K}_1| = 2$. Снова $\bar{P}_1 = O_3(\bar{K}_1)$ нормализует, но не централизует $B_1 = A_1 \cap R_2$, и централизует $B_1^* = \langle u, x \rangle$ или $\langle x, uz \rangle$. При этом $B_1^* \neq B^*$ и из первой части леммы $B_1^* \lhd N_1$, $R = T\langle y \rangle \in \mathrm{Syl}_2(N_1)$. Следовательно, R нормализует $B^* \cap B_1^* = \langle x \rangle$, откуда следует, что y централизует x-противоречие.

Это заканчивает доказательство предложения 7 и в случае, когда $Z(S) \cong Z_2$, $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$.

Предположим теперь, что $Z(S) \cong Z_2 \times Z_2$. Тогда есть только одна возможность: $\bar{C} \cong Z_2$, $\bar{H} / \bar{C} \cong S_6$.

Лемма 15. *Если* $Z(S)\cong Z_2\times Z_2$, *то централизатор* H *не может удовлетворять следующим условиям:*

1) $\bar{L}\cong L_2(9)$,

2) $\bar{C}\cong Z_2$,

3) $\bar{H}/\bar{C}\cong S_6$.

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда $\bar{H}$ расщепляется над $\langle\bar{x}\rangle$, т. е. $\bar{H}\cong\langle\bar{x}\rangle\times S_6$. Силовская 2-подгруппа $T\in\mathrm{Syl}_2(H)$ имеет разложение $T=\langle x, u\rangle\times R_2$, где $R_2\in\mathrm{Syl}_2(\bar{L})$, а инволюция $\bar{u}$ индуцирует автоморфизм Галуа на $\bar{L}$. Кроме того, $Z(S)=\langle b, z\rangle$, где $\langle z\rangle=Z(R_2)$, а $b\in\langle x,u\rangle$. Тогда хотя бы две центральные инволюции, скажем z_1 и z_2, имеют централизаторы порядков $2^7.3$. Положим $H_i=C_G(z_i)$, $i=1,2$ и $P_i\in\mathrm{Syl}_3(H\cap H_i)$. Нетрудно показать, что $O(H_i)=1$ и $X_i=O_2(H_i)$ имеет порядок 2^6. Из $x\in X_i$ следует, что $|Z(X_i)|\geq 8$ и так как P_i действует нетривиально на $Z(X_i)$, то для $Z(X_i)$ есть только одна возможность: $Z(X_i)\cong E_8$, $i=1,2$. Пусть $Y=X_1\cap X_2$, так что $|Y|=2^5$ и $x\in Y$. Из $x\in Y$ получаем, что Y будет неабелевой. Кроме того, если $Z(X_1)\subset Y$, то и $Z(X_2)\subset Y$, откуда следует, что Y должна быть абелевой — противоречие. Положим $\bar{X}_i=X_i/Z(X_i)$, так что $\bar{X}_i\cong E_8$, $Z_2\times Z_4$, Q_8 или D_8. Отметим, что из $Z(X_i)\subset Y$ следует $X_1=YZ(X_1)$, $X_2=YZ(X_2)$, $Y\cap Z(X_1)=Y\cap Z(X_2)=Z(S)$; стало быть $\bar{X}_1\cong\bar{X}_2$.

а. $\bar{X}_i\cong Z_2\times Z_4$.

Тогда $[P_i, X_i]\subset Z(X_i)$ и $X_i=C_{X_i}(P_i)\times[P_i,X_i]$. Подгруппа $C_{X_i}(P_i)$ имеет порядок 2^4 и $Z(C_{X_i}(P_i))\cong Z_2$. Следовательно $C_{X_i}(P_i)\cong D_{16}$, Q_{16} или QD_{16}, откуда получаем противоречие, так как фактор этих групп по центру не изоморфен $Z_2\times Z_4$.

б. $\bar{X}_i\cong D_8$. В этом случае $X_i=CX_i(P_i)\times[P_i,X_i]$ и $C_{X_i}(P_i)\cong D_{16}$, Q_{16} или QD_{16}. Следовательно, $Y\cong Z_2\times D_{16}$, $Z_2\times Q_{16}$ или $Z_2\times QD_{16}$ и $\langle z_1\rangle=U^2(У)=\langle z_2\rangle$, что невозможно.

в. $\bar{X}_i\cong Q_8$. Очевидно $\phi(X_i)\subseteq\langle X, Z(x_i)\rangle$ и $\Phi(X_i)$ $Z(X_i)$; поэтому $\Phi(X_i)\cap Z(X_i)\cong Z_2$ или $Z_2\times Z_2$. Если $\Phi(X_i)=\langle x, Z(X_i)\rangle$, то $Z(X_i)\subset Y$, что, как уже отмечалось, невозможно. Если $\Phi(X_i)\cong E_8$, то $\Phi(X_i)\cap Z(X_i)=[P_i, Z(X_i)]$ и $Z(X_i)=\langle z_i, [P_i, Z(X_i)]\rangle$. Снова получаем противоречие, так как $Z(X_i)\subset Y$. Наконец, если $\Phi(X_i)\cong Z_2\times Z_2$, то нетрудно показать, что $|C_{X_i}(P_i)|\geq 8$, а это невозможно.

г. $\bar{X}_i\cong E_8$. В этом случае $\Phi(X_i)\subseteq Z(X_i)$. Если $\Phi(X_i)=Z(X_i)$, то $Z(X_i)\subset Y$, а это невозможно. Если $\Phi(X_i)\cong Z_2\times Z_2$, то так как $z_i\notin\Phi(X_i)$, имеем $Z(X_i)=\langle z_i\rangle\times\Phi(X_i)\subseteq Y$, и мы снова получаем противоречие. Наконец, если $\Phi(X_i)\cong Z_2$, то $\Phi(X_i)=\langle z_i\rangle$, откуда $T\subset X_i$ и $Z(X_i)\cong Z_2\times Z_2$ — противоречие. Это заканчивает доказательство леммы, а вместе с тем и предложения 7.

Как мы уже отметили, из предложения 7 следует, что все 2-локальные подгруппы в G будут разрешимыми. Следовательно, G будет изоморфной одной из следующих простых групп: $L_2(q)$, $q>3$, $Sz(2^n)$, $U_3(2^n)$, $n\geq 2$, A_7, M_{11}, $L_3(3)$, $U_3(3)$ или ${}^2F_4(2)'$ (простая группа Титса). Однако нетрудно проверить, что если простая группа из этого списка имеет секционный 2-ранг >4, то и ее длина больше 9. Это означает, что в случае Б) снова S абелева или имеет секционный 2-ранг ≤ 4.

В) Допустим, что S — неабелева группа. Если $|S|\leqq 2^5$, то $r(S)\leqq 4$. Если $|S|=2^6$ и $r(S)>4$, то $\Phi(S)\cong Z_2$ или S содержит подгруппу, изоморфную E_{32}. Но тогда из результатов в [8] и [12] получаем, что $r(S)\leqq 4$ — противоречие. Следовательно, S абелева или $r(S)\leqq 4$.

Теперь, выделяя простые группы длины $l=9$ из списков простых групп, имеющих абелеву силовскую 2-подгруппу или секционный 2-ранг $\leqq 4$ (см. [5] и [15]), получаем перечень групп, приведенный в теореме 1. Теорема 1 доказана.

Результаты этой статьи являются частью диссертации, выполненной на кафедре „Высшей алгебры“ МГУ, под руководством чл.-корр. АН СССР А. И. Кострикина, которому выражаю глубокую благодарность за внимание и помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Мазуров. О централизаторах инволюций в простых группах. *Мат. сб.*, 93 1974, 529—539.
2. B. Baumann. Endliche nichtauflösbare Gruppen mit einer nilpotenten maximalen Untergruppe. *J. Algebra*, 38, 1976, 119—135.
3. D. Gorenstein. On finite simple groups of characteristic 2 tupe. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, 36, 1969, 5—13.
4. D. Gorenstain. Finite groups. New York, 1968.
5. D. Gorenstein, K. Harada. Finite groups whose 2-subgroups are generated by at most 4 elements. *Memoirs Amer. Math Soc.*, 147, 1974.
6. D. Gorenstein, R. Lyons. Nonsolvable finite groups with solvable 2-local subgroups. *J. Algebra*, 38, 1976, 453—532.
7. G. Glaubermann. Global and local properties of finite groups. In *Finite simple groups*, New York, 1971.
8. P. Chabot. Croups whose Sylow 2 — subgroups have cyclic commutator group *J. Algebra*, 21, 1972, 312—320.
9. Z. Janko. Finite groups with invariant fourth maximal subgroups. *Math. Z.*, 82, 1963, 82—89.
10. Z. Janko. Finite simple groups with short chains of subgroups. *Math. Z.*, 84, 1964, 428—437.
11. Vl. Cepulic. On finite simple groups of length 8. *Ill. J. Math.*, 18, 1974, 389—417.
12. G. Mason. Two theorems on groups of characteristic 2-type. *Pacif. J. Math.*, 57 1975, 233—253.
13. K. Harada. Finite simple groups with short chains of subgroups. *J. Math. Soc. Japan*, 20, 1968, 655—672.
14. K. Harada. On finite groups having self-centralizing 2-subgroups of small order. *J. Algebra*, 33, 1975, 144—160.
15. J. H. Walter. The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups. *Ann. Math.*, 89, 1969, 405—514.
16. С. П. Якимов. Простые группы длины 9. *Успехи мат. наук*, 33, 1978, № 2, 212.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 23. 11. 1977