Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О ГРАФАХ, СОДЕРЖАЩИХ МОНОХРОМАТИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДВУЦВЕТНОЙ РАСКРАСКЕ РЕБЕР

НЕДЯЛКО Д. НЕНОВ, НИКОЛАЙ Г. ХАДЖИИВАНОВ

Указано бесконечное множество графов, минимальных по отношению свойства, формулированного в заглавии.

Рассматриваются только конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Будем говорить, что задана 2-раскраска ребер графа, если любое ребро покрашено в красный или зеленый цвет. Если в 2-раскраске ребер графа все ребра некоторого треугольника имеют одинаковый цвет, будем говорить, что треугольник монохроматический в данной 2-раскраске.

Хорошо известно (К. В. Б о с т в и к), что в любой 2-раскраске ребер полного графа с шестью вершинами существует монохроматический треугольник.

О п р е д е л е н и е 1. *Граф G будем называть t-графом, если в любой 2-раскраске ребер этого графа существует монохроматический треугольник.*

Ясно, что если граф содержит 6-клику, согласно предложению Боствика, он является t-графом. Э р д е ш и Х а й н а л [1] поставили вопрос о существовании t-графов, не содержащих 6-клик. Г р а х а м в [2] привел пример t-графа с восьмью вершинами, не содержащего 6-клик. Он получается из полного графа с 8 вершинами удалением простого цикла длины 5.

Очевидно, если некоторый граф содержит t-граф, он тоже является t-графом. Поэтому целесообразно ввести следующее

О п р е д е л е н и е 2. *t-граф G будем называть минимальным t-графом, если у него нет собственных t-подграфов.*

Любой t-граф содержит минимальный t-подграф. Поэтому следует изучать только минимальные t-графы.

До сих пор оставался открытым вопрос о существовании бесконечно много минимальных t-графов. Здесь на этот вопрос отвечается утвердительно.

Через $V(G)$ и $E(G)$ будем обозначать соответственно множество вершин и множество ребер графа G. Полный граф с n вершинами обозначим через K_n, а дискретный — через $\bar{K}_n$. Пусть G_1 и G_2-графы, для которых $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Следуя З ы к о в у [3], под соединением G_1+G_2 будем подразумевать граф G, для которого $V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$ и $E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup E_{12}$, где E_{12} состоит из всех ребер $[v_1, v_2]$, $v_1 \in V(G_1)$ и $v_2 \in V(G_2)$. Через C_n обозначим граф, состоящий из одного простого цикла с n вершинами.

Докажем следующие утверждения.

Т е о р е м а 1. *Граф $H_r=C_3+C_{2r+1}$ является минимальным t-графом для любого натурального r.*

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 5, 1979, с. 303—305.

Теорема 2. *Соединение C_3+A является t-графом тогда и только тогда, когда хроматическое число $\chi(A)$ графа A больше 2.*

Теорема 3. *Пусть $|V(G)|\leqq 8$ и G не содержит K_6. Тогда или хроматическое число $\chi(G)\leqq 5$, или $G=H_2$.*

Следствие. *Графы $H_1=K_6$ и H_2 — единственные минимальные t-графы с не более чем 8 вершин.*

Для доказательства этих теорем понадобится следующая

Лемма. *Если G — t-граф, тогда $\chi(G)>5$.*

Доказательство леммы. Допустим, что $\chi(G)\leqq 5$. Тогда G является подграфом некоторого графа типа $L=\bar{K}_{n_1}+\bar{K}_{n_2}+\bar{K}_{n_3}+\bar{K}_{n_4}+\bar{K}_{n_5}$. Достаточно показать, что L не является t-графом. Построим 2-раскраску ребер графа L следующим образом: ребра подграфов $\bar{K}_{n_1}+\bar{K}_{n_2}$, $\bar{K}_{n_2}+\bar{K}_{n_3}$, $\bar{K}_{n_3}+\bar{K}_{n_4}$, $\bar{K}_{n_4}+\bar{K}_{n_5}$, $\bar{K}_{n_5}+\bar{K}_{n_1}$ покрасим в красное, а все остальные ребра графа L — в зеленое. В этой 2-раскраске нет монохроматических треугольников. Следовательно, L, а значит и G, не являются t-графами. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем, что H_r является t-графом. Пусть $C_3=v_1v_2v_3$ и $C_{2r+1}=w_1w_2\cdots w_{2r+1}$. Допустим, что существует 2-раскраска ребер графа H_r без монохроматических треугольников. Можно считать, что ребра $[v_1, v_2]$ и $[v_2, v_3]$ — красные, а $[v_1, v_3]$ — зеленое. Докажем, что все ребра $[v_2, w_i]$ — зеленые. Действительно, если некоторое из них, например $[v_2, w_1]$ — красное, тогда $[v_1, w_1]$ и $[v_3, w_1]$ должны быть зелеными. Получаем, что треугольник $[v_1, v_3, w_1]$ — зеленый, что является противоречием. Итак, все ребра $[v_2, w_i]$ — зеленые. Тогда все ребра графа C_{2r+1}, очевидно, должны быть красными. Очевидно число красных ребер, соединяющих вершину v_1 с вершинами подграфа C_{2r+1}, не превосходит r, так как в противном случае будет красный треугольник. То же самое относится и к вершине v_3. Следовательно, через любую из вершин v_1 и v_3 проходят хотя бы по $r+1$ зеленых ребер к вершинам подграфа C_{2r+1}. Тогда существует вершина w_i, которая соединена зелеными ребрами одновременно с v_1 и v_3, что является противоречием.

Таким образом доказано, что H_r — t-граф. Теперь покажем, что H_r является минимальным t-графом. Для этой цели достаточно заметить, что после удаления произвольного ребра графа H_r получается 5-хроматический подграф, который согласно лемме 1 не является t-графом. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Существует 2-раскраска ребер графа H_r только с одним монохроматическим треугольником, $r\geq 2$.

Замечание 2. H_2 изоморфен упомянотому выше примеру Грахама.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\chi(A)\leq 2$. Тогда $\chi(G)\leqq 5$. Согласно лемме 1 G не является t-графом.

Пусть $\chi(A)>2$. Тогда согласно одной теореме Кенига [4], стр. 170] граф A содержит C_{2r+1} для некоторого r. Следовательно граф G содержит C_{2r+1} для некоторого r. Следовательно граф G содержит H_r. Согласно теореме 1 G является t-графом.

Доказательство теоремы 3. Будем предполагать, что $|V(G)|=8$ и $\chi(G)>5$. Так как G не содержит K_6, то

I. Нельзя найти такие две вершины графа G, через которые проходят все ребра графа $\bar{G}$, дополнительного к графу G.

II. В $\bar{G}$ нет три дизъюнктных ребер.

III. В $\bar{G}$ нет конфигурации из 3-клики и дизъюнктного с ней ребра.

IV. В $\bar{G}$ нет 4-клики.

Согласно I существуют хотя бы две дизъюнктные ребра графа $\bar{G}$ — пусть это $[v_1, v_2]$ и $[v_3, v_4]$. Согласно II любое из ребер графа $\bar{G}$ смежно хотя бы одному из этих двух ребер, т. е. проходит через некоторую из вершин v_1, v_2, v_3, v_4. Докажем, что существует ребро графа $\bar{G}$, которое несмежно одновременно этим двум ребрам. Действительно, если это не так, тогда все ребра графа $\bar{G}$ или проходит через две вершины, или составляют 4-клику. Согласно I и IV это невозможно. Итак, можно считать, что в $\bar{G}$ существует ребро, несмежное хотя бы одному из ребер $[v_1, v_2]$ и $[v_3, v_4]$; пусть это ребро $[v_4, v_5]$. Согласно II остальные вершины v_6, v_7 и v_8 составляют 3-клику в G. Рассмотрим вершины $v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8$. Так как они не составляют 6-клику в G, то хотя бы одно из соединяющих их ребер e принадлежит графу $\bar{G}$. Согласно II $e \neq [v_3, v_6]$, $e \neq [v_3, v_7]$, $e \neq [v_3, v_8]$, $e \neq [v_5, v_6]$ $e \neq [v_5, v_7]$, $e \neq [v_5, v_8]$, а согласно III $e \neq [v_3, v_5]$. Покажем, что $e \neq [v_2, v_6]$. Допустим, что это не так. Согласно I существует ребро e_1 графа $\bar{G}$ не проходящее через вершины v_2 и v_4. Но как мы знаем, любое ребро графа $\bar{G}$ должно проходить через некоторую из вершин v_1, v_2, v_3, v_4. Однако из III следует, что $e_1 \neq [v_1, v_6]$, а из II — что $e_1 \neq [v_1, v_7]$, $e_1 \neq [v_3, v_6]$, $e_1 \neq [v_3, v_7]$, $[v_3, v_8]$, $[v_1, v_8]$. Таким образом мы доказали, что $e \neq [v_2, v_6]$. Аналогично заключаем, что $e \neq [v_2, v_7]$ и $e \neq [v_2, v_8]$. Следовательно, $e = [v_2, v_5]$ или $[v_2, v_3]$. Так как эти две возможности симметричны, то мы рассмотрим только первую из них, т. е. $e = [v_2, v_5]$. Теперь согласно I существует хотя бы еще одно ребро e_2 графа $\bar{G}$, не проходящее через v_2 и v_4. Из III следует, что $e_2 \neq [v_1, v_5]$ и $e_2 \neq [v_3, v_5]$, а из II — что $e = [v_1, v_3]$.

Окончательно, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 — простой цикл в $\bar{G}$. Следовательно, G является подграфом графа $C_3 + C_5 = H_2$. Так как $\chi(G) > 5$, а любой собственный подграф G' графа G имеет $\chi(G') \leq 5$, то $G = H_2$. Теорема 3 доказана.

Доказательство следствия. Пусть G — минимальный t-граф и $|V(G)| \leqq 8$. Согласно лемме $\chi(G) > 5$. Согласно теореме 3 или G содержит $H_1 = K_6$, или $G = H_2$. В первом случае получаем $G = H_1$, так как H_1 тоже является t-графом, а G — минимальный t-граф.

Замечание 3. Из этих рассуждений следует, что H_2 является единственным t-графом с не более чем 8 вершинами, который не содержит K_6.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Erdos, A. Hajnal. Research problem 2—5. *J. Combin. Theory*, 2, 1967, 107.
2. R. Graham. On Edgewise 2-colored Graphs with Aconochromatic triangles and containing no complete hexagon. *J. Combin Theory*, 4, 1968, 300.
3. А. Зыков. О некоторых свойствах линейных комплексов. *Мат. сб.*, 24, 1949, 163—188.
4. D. Konig. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936.

Единый центр математики и механики
1090 София *П. Я. 373*

Поступила 7. 10. 1978